МАТЕМАТИКА 2018. Т. 28. Вып. 2

УДК 517.925

© *А. А. Гайнетдинова*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ[1]

Алгоритм понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с использованием оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) допускаемой алгебры Ли модифицирован для систем ОДУ с малым параметром, допускающих приближенные алгебры Ли операторов. Приведены инвариантные представления ОДУ второго порядка и систем двух ОДУ второго порядка. Введен ОИД приближенной алгебры Ли. Показано, что можно построить ОИД специального вида, позволяющий получать первый интеграл рассматриваемой системы. Приведены примеры использования алгоритма для случаев полного и неполного наследования алгебры Ли.

Ключевые слова: системы ОДУ с малым параметром, приближенные алгебры Ли, инвариантное представление, оператор инвариантного дифференцирования.

DOI: 10.20537/vm180202

Методы группового анализа успешно используются для исследования и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см., например, [1–6]). Например, метод последовательного понижения порядка позволяет понизить порядок уравнения, а в некоторых случаях — и проинтегрировать его. Известны различные модификации этого метода для интегрирования систем ОДУ [7–11].

В [11] предложен алгоритм понижения порядка с использованием дифференциальных инвариантов и оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) допускаемой алгебры Ли.

Добавление слагаемых с малым параметром в уравнение обычно разрушает допускаемую группу преобразований. Одним из возможных способов решения этой проблемы является использование концепции приближенных групп преобразований. Существует два различных подхода к построению приближенных групп преобразований: один предложен В. А. Байковым, Р. К. Газизовым и Н. Х. Ибрагимовым (см., например, [12]), а другой — В. И. Фущичем и В. М. Штеленем (см. [13]). Способы интегрирования ОДУ с малым параметром с использованием приближенных симметрий рассматривались ранее в работах [6, 14, 15] и др.

В настоящей работе исследуются особенности применения алгоритма понижения порядка [11] к системам уравнений с малым параметром, допускающим приближенные алгебры Ли. Используются основные понятия приближенных алгебр Ли, введенные в [12]. Вопрос об инвариантном представлении систем ОДУ с малым параметром в общем случае обсуждался в работах [16–19].

В первом параграфе детально разобраны инвариантные представления ОДУ второго порядка с малым параметром, допускающих приближенные алгебры Ли, при полном и частичном наследовании точной двумерной алгебры Ли операторов и систем двух ОДУ второго порядка с малым параметром, допускающих приближенные алгебры Ли, при полном и частичном наследовании точной четырехмерной алгебры Ли операторов. Во втором параграфе показано, что для приближенной алгебры Ли можно построить ОИД, и предложен алгоритм построения ОИД специального вида, использование которого позволяет получить первый интеграл исходной системы. В третьем параграфе применение модификации алгоритма понижения порядка

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному заданию № 1.3103.2017/4.6.

с использованием дифференциальных инвариантов и ОИД допускаемой алгебры Ли проиллюстрировано на примерах ОДУ второго порядка и систем двух ОДУ второго порядка с малым параметром, инвариантных относительно приближенных алгебр Ли как с полным, так и с частичным наследованием.

В работе рассматриваются только приближения первого порядка по ε (т. е. с точностью до слагаемых порядка ε^2). Поэтому используются следующие обозначения: равенство $f(x,\varepsilon) = o(\varepsilon)$ означает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(x,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$; под приближенным равенством $f \approx g$ понимается, что

$$f(x,\varepsilon) = g(x,\varepsilon) + o(\varepsilon).$$

§ 1. Системы с малым параметром, инвариантные относительно приближенных групп преобразований

Будем рассматривать систему n ОДУ p-го порядка вида

$$u_i^{(p)}(t) = f_{i,(0)}(t,u_1,\ldots,u_n,u_1',\ldots,u_n^{(p-1)}) + \varepsilon f_{i,(1)}(t,u_1,\ldots,u_n,u_1',\ldots,u_n^{(p-1)}), \qquad (1.1)$$

где t — независимая переменная, $u_i = u_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, — неизвестные функции, $u_i^{(q)} = \frac{\mathrm{d}^q u_i}{(\mathrm{d}t)^q}$ — производная q-го порядка функции $u_i(t)$.

Пусть система (1.1) допускает (с точностью $o(\varepsilon)$) приближенную алгебру Ли с базисными операторами

$$X_{\alpha_0} = X_{\alpha_0,(0)} + \varepsilon X_{\alpha_0,(1)}, \;\; \alpha_0 = 1,\ldots,r_0, \;\; r_0 \leqslant r,$$
$$X_{\alpha_1} = \varepsilon X_{\alpha_1,(0)}, \;\; \alpha_1 = r_0+1,\ldots,r,$$

где

$$X_{\alpha,(0)} = \xi_{\alpha,(0)}(t,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n}\eta^l_{\alpha,(0)}(t,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial}{\partial u_l}, \;\; \alpha = 1,\ldots,r,$$
$$X_{\alpha_0,(1)} = \xi_{\alpha_0,(1)}(t,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n}\eta^l_{\alpha_0,(1)}(t,u_1,\ldots,u_n)\frac{\partial}{\partial u_l}, \;\; \alpha_0 = 1,\ldots,r_0,$$

и операторы $X_{\alpha,(0)}$ образуют точную алгебру Ли L_r симметрий невозмущенного уравнения, $r = pn$.

Инварианты приближенных алгебр Ли и инвариантное представление уравнений с малым параметром

В дальнейшем будем рассматривать только системы (1.1), представимые через дифференциальные инварианты допускаемой группы преобразований. Дифференциальные инварианты определены в продолженном пространстве $\mathbb{R}^{(1+p)n+1}$, которое получается из пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ добавлением переменных $u_i^{(q)}$, $i = 1,\ldots,n$, $q = 1,\ldots,p$. Обозначим размерность продолженного пространства через N, $N = 1+n+pn$.

В продолженном пространстве действуют операторы $\hat{X}_\alpha^{(p)}$, $\alpha = 1,\ldots,r$, то есть операторы X_α, продолженные на производные p-го порядка. Инвариантом продолженной группы преобразований является функция, зависящая от всех переменных пространства $\mathbb{R}^N$ и для которой справедливы утверждения, сформулированные в работах [16, 17]. А именно, по критерию инвариантности (см., например, [16]) функция $I_p = I_{p,(0)} + \varepsilon I_{p,(1)}$ является дифференциальным инвариантом p-го порядка приближенной алгебры Ли тогда и только тогда, когда

$$\hat{X}_\alpha^{(p)}\,(I_p) \approx 0, \;\; \alpha = 1,\ldots,r, \qquad (1.2)$$

где $\hat{X}_\alpha^{(p)}$ — оператор X_α, продолженный на производные p-го порядка. Система (1.2) является системой приближенных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Методы решения таких систем рассмотрены в [16, 17]. Расщепляя уравнения системы (1.2) по степеням ε, получим

$$\begin{aligned} &\Omega_0\colon \hat{X}^{(p)}_{\alpha,(0)}\big(I_{p,(0)}\big) = 0, \ \ \alpha = 1,\ldots,r,\\ &\Omega_1\colon \hat{X}^{(p)}_{\alpha_0,(0)}\big(I_{p,(1)}\big) + \hat{X}^{(p)}_{\alpha_0,(1)}\big(I_{p,(0)}\big) \approx 0, \ \ \alpha_0 = 1,\ldots,r_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Методы решения системы (1.2) требуют исследования систем Ω_0 и Ω_1 на полноту и совместность. Полнота системы Ω_1 эквивалентна замкнутости системы операторов $\{Y_i\}$:

$$Y_{\alpha_0} = \hat{X}^{(p)}_{\alpha_0,(0)} + \Big(\hat{X}^{(p)}_{\alpha_0,(1)}(I_{p,(0)})\Big)\frac{\partial}{\partial I_{p,(1)}}, \ \ \alpha_0 = 1,\ldots,r_0,$$

относительно операции коммутирования.

В [17] исследована совместность подсистем вида Ω_1. Для этого введены в рассмотрение матрицы $\Delta^{(p)}_{r_0,(0)}$, $\Delta^{(p)}_{r_0,(1)}$, $\Lambda^{(p)}_{r,(0)}$, составленные из координат операторов $\hat{X}^{(p)}_{\alpha_0,(0)}$, $\hat{X}^{(p)}_{\alpha_0,(1)}$ и $\hat{X}^{(p)}_{\alpha,(0)}$ соответственно:

$$\Delta^{(p)}_{r_0,(0)} = \begin{pmatrix} \xi_{1,(0)} & \eta^1_{1,(0)} & \ldots & \eta^n_{1,(0)} & \zeta^{1,(1)}_{1,(0)} & \ldots & \zeta^{n,(p)}_{1,(0)}\\ \ddots & & & & & & \\ \xi_{r_0,(0)} & \eta^1_{r_0,(0)} & \ldots & \eta^n_{r_0,(0)} & \zeta^{1,(1)}_{r_0,(0)} & \ldots & \zeta^{n,(p)}_{r_0,(0)} \end{pmatrix},$$

$$\Delta^{(p)}_{r_0,(1)} = \begin{pmatrix} \xi_{1,(1)} & \eta^1_{1,(1)} & \ldots & \eta^n_{1,(1)} & \zeta^{1,(1)}_{1,(1)} & \ldots & \zeta^{n,(p)}_{1,(1)}\\ \ddots & & & & & & \\ \xi_{r_0,(1)} & \eta^1_{r_0,(1)} & \ldots & \eta^n_{r_0,(1)} & \zeta^{1,(1)}_{r_0,(1)} & \ldots & \zeta^{n,(p)}_{r_0,(1)} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{(p)}_{r,(0)} = \begin{pmatrix} \xi_{1,(0)} & \eta^1_{1,(0)} & \ldots & \eta^n_{1,(0)} & \zeta^{1,(1)}_{1,(0)} & \ldots & \zeta^{n,(p)}_{1,(0)}\\ \ddots & & & & & & \\ \xi_{r,(0)} & \eta^1_{r,(0)} & \ldots & \eta^n_{r,(0)} & \zeta^{1,(1)}_{r,(0)} & \ldots & \zeta^{n,(p)}_{r,(0)} \end{pmatrix},$$

а также блочные матрицы

$$M^{(p)} = \begin{pmatrix} \Delta^{(p)}_{r_0,(0)} & \Delta^{(p)}_{r_0,(1)}\\ 0 & \Lambda^{(p)}_{r,(0)} \end{pmatrix},$$

где p — порядок продолжения, а координаты продолжений $\zeta^{i,(q)}_{\alpha,(0)}$, $\zeta^{i,(q)}_{\alpha_0,(1)}$ вычисляются по стандартным формулам (см., например, [2]). Пусть

$$\operatorname{rg}\Delta^{(p)}_{r_0,(0)} = R^{(p)}_\Delta, \ \ \operatorname{rg}\Lambda^{(p)}_{r,(0)} = R^{(p)}_\Lambda, \ \ \operatorname{rg}M^{(p)} = R^{(p)}_M.$$

В [17] доказано, что система Ω_1 совместна на решениях системы Ω_0, если $R^{(p)}_M = R^{(p)}_\Lambda + R^{(p)}_\Delta$. В противном случае к системе Ω_0 необходимо добавить s уравнений, на которых нарушается условие совместности, $s = R^{(p)}_M - \Big(R^{(p)}_\Lambda + R^{(p)}_\Delta\Big)$, и повторить процедуру проверки полноты и совместности систем Ω_0 и Ω_1.

Решением системы (1.3) в общем случае будут $N - R^{(p)}_\Delta$ функционально независимых инвариантов порядков $q_k \leqslant p$, причем $N - R^{(p)}_\Lambda - s$ из них имеют «нулевой» порядок по ε:

$$I_{q_k} = I_{q_k,(0)} + \varepsilon I_{q_k,(1)} + o(\varepsilon), \ \ \ k = 1,\ldots,N - R^{(p)}_\Lambda - s,$$

а остальные — «первый» порядок по ε:

$$I_{q_m} = \varepsilon I_{q_m,(0)} + o(\varepsilon), \quad m = N - R_\Lambda^{(p)} - s + 1, \dots, N - R_\Delta^{(p)}.$$

Инвариантное представление системы дифференциальных уравнений с малым параметром вида (1.1), согласно [16–19] имеет вид

$$\Psi_i(I_p,\varepsilon) \equiv \Psi_{i,(0)}\left(I_{q_1},\dots,I_{q_{N-R_\Lambda^{(p)}-s}}\right) + \varepsilon\Psi_{i,(1)}\left(I_{q_1,(0)},\dots,I_{q_{N-R_\Lambda^{(p)}-s},(0)}\right) \approx 0, \qquad i = 1,\dots,n, \quad q_k \leqslant p. \tag{1.4}$$

Рассмотрим инвариантное представление ОДУ с малым параметром и их систем на примере ОДУ второго порядка и систем двух ОДУ второго порядка.

Инвариантное представление обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром

Пусть система (1.1) представляет собой одно уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} = f_0(t,x,\dot{x}) + \varepsilon f_1(t,x,\dot{x}) \tag{1.5}$$

и допускает два оператора X_1 и X_2, образующих приближенную алгебру Ли, при этом $X_{1,(0)}$ и $X_{2,(0)}$ образуют точную двумерную алгебру Ли (т. е. операторы являются существенными).

Известно, что невозмущенная двумерная алгебра Ли имеет 4 канонические неподобные реализации (см. классификацию, например, в [6]). Инвариантное представление невозмущенного уравнения второго порядка в зависимости от рангов матриц $\Lambda^p_{2,(0)}$ имеет один из двух видов, представленных в таблице 1.

Таблица 1. Инвариантное представление ОДУ второго порядка

$R_\Lambda^{(0)}$	$R_\Lambda^{(1)}$	$R_\Lambda^{(2)}$	Инвариантное уравнение
2	2	2	$I_{2,(0)} = F\left(I_{1,(0)}\right)$
1	2	2	$I_{2,(0)} = F\left(I_{0,(0)}\right)$

Исследование различных видов наследования двумерных алгебр Ли на основе классификации приближенных алгебр Ли с двумя существенными операторами (см. [20]) показало, что инвариантное представление произвольного уравнения (1.5) имеет один из следующих четырех видов.

1. Пусть наследование полное, то есть $X_\alpha = X_{\alpha,(0)} + \varepsilon X_{\alpha,(1)}$, $\alpha = 1,\,2$. Тогда $R_\Lambda^{(2)} = R_\Delta^{(2)}$, $R_M^{(2)} = R_\Delta^{(2)} + R_\Lambda^{(2)}$, $R_\Lambda^{(2)} = 2$, $R_M^{(2)} = 4$ и дополнительных уравнений на $I_{k,(0)}$ не возникает. Далее рассмотрим ранг $R_\Lambda^{(0)}$ матрицы $\Lambda^{(0)}_{2,(0)}$.

   (a) Если $R_\Lambda^{(0)} = 2$, то инвариантное представление уравнения (1.5) имеет вид
   $$\Psi_0\left(I_1,\,I_2\right) + \varepsilon\Psi_1\left(I_{1,(0)},\,I_{2,(0)}\right) \approx 0,$$
   или
   $$I_2 \approx F_0\left(I_1\right) + \varepsilon F_1\left(I_{1,(0)}\right).$$

   (b) Если $R_\Lambda^{(0)} = 1$, то инвариантное представление уравнения (1.5) имеет вид
   $$\Psi_0\left(I_0,\,I_2\right) + \varepsilon\Psi_1\left(I_{0,(0)},\,I_{2,(0)}\right) \approx 0,$$
   или
   $$I_2 \approx F_0\left(I_0\right) + \varepsilon F_1\left(I_{0,(0)}\right).$$

Здесь $I_2 = I_{2,(0)} + \varepsilon I_{2,(1)}$ — дифференциальный инвариант второго порядка, $I_1 = I_{1,(0)} + \varepsilon I_{1,(1)}$ — дифференциальный инвариант первого порядка, $I_0 = I_{0,(0)} + \varepsilon I_{0,(1)}$ — алгебраический инвариант.

2. Пусть наследование частичное, например: $X_1 = X_{1,(0)} + \varepsilon X_{1,(1)}$, $X_2 = \varepsilon X_{2,(0)}$. В этом случае ранги матриц $\Delta^{(0)}_{1,(0)}$, $\Delta^{(1)}_{1,(0)}$ и $\Delta^{(2)}_{1,(0)}$ равны 1. Ранги матриц $\Lambda^{(2)}_{2,(0)}$ и $M^{(2)}$ в этом случае соответственно равны $R^{(2)}_{\Lambda} = 2$, $R^{(2)}_{M} = 3$, то есть, $R^{(2)}_{M} = R^{(2)}_{\Delta} + R^{(2)}_{\Lambda}$, и дополнительных уравнений на $I_{k,(0)}$ не возникает. Далее снова рассмотрим ранг $R^{(0)}_{\Lambda}$ матрицы $\Lambda^{(0)}_{2,(0)}$.

   (a) Если $R^{(0)}_{\Lambda} = 2$, то инвариантное представление уравнения (1.5) имеет вид

$$\Psi_0\left(I_1,\, I_2\right) + \varepsilon\Psi_1\left(I_{1,(0)}, I_{0,(0)},\, I_{2,(0)}\right) \approx 0,$$

   или

$$I_2 \approx F_0\left(I_1\right) + \varepsilon F_1\left(I_{1,(0)},\, I_{0,(0)}\right).$$

   (b) Если $R^{(0)}_{\Lambda} = 1$, то инвариантное представление уравнения (1.5) имеет вид

$$\Psi_0\left(I^1_0,\, I_2\right) + \varepsilon\Psi_1\left(I^1_{0,(0)}, I^2_{0,(0)},\, I_{2,(0)}\right) \approx 0,$$

   или

$$I_2 \approx F_0\left(I^1_0\right) + \varepsilon F_1\left(I^1_{0,(0)},\, I^2_{0,(0)}\right).$$

Здесь $I_2 = I_{2,(0)} + \varepsilon I_{2,(1)}$ — дифференциальный инвариант второго порядка, $I_1 = I_{1,(0)} + \varepsilon I_{1,(1)}$ — дифференциальный инвариант первого порядка, $I_0 = I_{0,(0)} + \varepsilon I_{0,(1)}$, $I^1_0 = I^1_{0,(0)} + \varepsilon I^1_{0,(1)}$, $I^2_0 = \varepsilon I^2_{0,(0)}$ — алгебраические инварианты.

Инвариантное представление системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром

Пусть система (1.1) является системой двух ОДУ второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f_0(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) + \varepsilon f_1(t,x,y,\dot{x},\dot{y}), \\ \ddot{y} = g_0(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) + \varepsilon g_1(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) \end{cases} \tag{1.6}$$

и допускает четыре приближенных оператора $X_1, \ldots, X_4$.

В [10] на основе классификации четырехмерных алгебр было показано, что инвариантное представление невозмущенной системы двух уравнений второго порядка в зависимости от рангов матриц Λ_p имеет один из двух видов, представленных в таблице 2.

Таблица 2. Инвариантное представление систем двух ОДУ второго порядка

$R^{(0)}_{\Lambda}$	$R^{(1)}_{\Lambda}$	$R^{(2)}_{\Lambda}$	Инвариантная система
3	4	4	$I^1_{2,(0)} = F\left(I_{1,(0)}\right), \quad I^2_{2,(0)} = G\left(I_{1,(0)}\right)$
2	4	4	$I^1_{2,(0)} = F\left(I_{0,(0)}\right), \quad I^2_{2,(0)} = G\left(I_{0,(0)}\right)$

Аналогично предыдущему случаю в зависимости от типа наследования и рангов матриц $\Delta^{(2)}_{r_0,(0)}$, $\Lambda^{(2)}_{4,(0)}$ и $M^{(2)}$ система (1.6) имеет одно из следующих инвариантных представлений.

1. Наследование полное, ранги матриц $\Delta^{(2)}_{4,(0)}$, $\Lambda^{(2)}_{4,(0)}$ равны $R^{(2)}_{\Delta}=4$, $R^{(2)}_{\Lambda}=4$, $R_{M,2}=R^{(2)}_{\Delta}+$ $+R^{(2)}_{\Lambda}$. Тогда существует $N-R^{(2)}_{\Delta}=3$ функционально независимых дифференциальных инварианта и инвариантное представление имеет вид
$$\begin{cases} F_0\left(I,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon F_1\left(I_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\\ G_0\left(I,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon G_1\left(I_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\end{cases}$$
где $I_2^i=I^i_{2,(0)}+\varepsilon I^i_{2,(1)}$, $i=1,2,$ — дифференциальные инварианты второго порядка, $I=I_{(0)}+\varepsilon I_{(1)}$ — дифференциальный инвариант первого порядка, если $R^{(0)}_{\Lambda}=3$, или алгебраический инвариант, если ранг матрицы $R^{(0)}_{\Lambda}=2$.

2. Наследование частичное, $R^{(2)}_{\Delta}=3$, $R^{(2)}_{\Lambda}=4$, $R_{M,2}=R^{(2)}_{\Delta}+R^{(2)}_{\Lambda}$. Тогда существует $N-R^{(2)}_{\Delta}=4$ функционально независимых дифференциальных инварианта и инвариантное представление имеет вид
$$\begin{cases} F_0\left(I^1,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon F_1\left(I^1_{(0)}, I^2_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\\ G_0\left(I^1,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon G_1\left(I^1_{(0)}, I^2_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\end{cases}$$
где $I_2^i=I^i_{2,(0)}+\varepsilon I^i_{2,(1)}$, $i=1,2,$ — дифференциальные инварианты второго порядка, $I^1=$ $=I^1_{(0)}+\varepsilon I^1_{(1)}$ и $I^2_{(0)}$ — дифференциальный инвариант первого порядка и алгебраический инвариант соответственно, если $R^{(0)}_{\Lambda}=3$, и в обратном порядке, если $R^{(0)}_{\Lambda}=2$.

3. Наследование частичное, $R^{(2)}_{\Delta}=2$, $R^{(2)}_{\Lambda}=4$, $R_{M,2}=R^{(2)}_{\Delta}+R^{(2)}_{\Lambda}$. Тогда существует $N-R^{(2)}_{\Delta}=5$ функционально независимых дифференциальных инвариантов и инвариантное представление имеет вид
$$\begin{cases} F_0\left(I^1,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon F_1\left(I^1_{(0)}, I^2_{(0)}, I^3_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\\ G_0\left(I^1,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon G_1\left(I^1_{(0)}, I^2_{(0)}, I^3_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\end{cases}$$
где $I_2^i=I^i_{2,(0)}+\varepsilon I^i_{2,(1)}$, $i=1,2,$ — дифференциальные инварианты второго порядка, $I^1=$ $=I^1_{(0)}+\varepsilon I^1_{(1)}$ и $I^2_{(0)}$ — дифференциальный инвариант первого порядка и алгебраический инвариант соответственно, если $R^{(0)}_{\Lambda}=3$, и в обратном порядке, если $R^{(0)}_{\Lambda}=2$, $I^4=\varepsilon I^4_{(0)}$ — алгебраический инвариант.

4. Наследование частичное, $R^{(2)}_{\Delta}=1$, $R^{(2)}_{\Lambda}=4$, $R_{M,2}=R^{(2)}_{\Delta}+R^{(2)}_{\Lambda}$. Тогда существует $N-R^{(2)}_{\Delta}=6$ функционально независимых дифференциальных инвариантов и инвариантное представление имеет вид
$$\begin{cases} F_0\left(I^1,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon F_1\left(I^1_{(0)}, I^2_{(0)}, I^3_{(0)}, I^4_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\\ G_0\left(I^1,\, I_2^1,\, I_2^2\right)+\varepsilon G_1\left(I^1_{(0)}, I^2_{(0)}, I^3_{(0)}, I^4_{(0)},\, I^1_{2,(0)},\, I^2_{2,(0)}\right)\approx 0,\end{cases}$$
где $I_2^i=I^i_{2,(0)}+\varepsilon I^i_{2,(1)}$, $i=1,2,$ — дифференциальные инварианты второго порядка, $I^1=$ $=I^1_{(0)}+\varepsilon I^1_{(1)}$ и $I^2_{(0)}$ — дифференциальный инвариант первого порядка и алгебраический инвариант соответственно, если $R^{(0)}_{\Lambda}=3$, и в обратном порядке, если $R^{(0)}_{\Lambda}=2$, $I^3_{(0)}$ и $I^4_{(0)}$ — алгебраические инварианты.

Можно показать, что никакого другого представления системы (1.6) нет. Следовательно, рассматривая систему (1.4) как алгебраическую, можно разрешить ее относительно инвариантов второго порядка и получить эквивалентное представление

$$\begin{cases} I_2^1 \approx F_{(0)}\left(I^1\right) + \varepsilon F_{(1)}\left(I_{(0)}^1, \ldots, I_{(0)}^{5-R_\Delta^{(2)}}\right), \\ I_2^2 \approx G_{(0)}\left(I^1\right) + \varepsilon G_{(1)}\left(I_{(0)}^1, \ldots, I_{(0)}^{5-R_\Delta^{(2)}}\right), \end{cases}$$

где I^m — дифференциальные инварианты младших порядков, $m = 1, \ldots, 5 - R_\Delta^{(2)}$, а $R_\Delta^{(2)}$, в зависимости от наследования, может принимать значения от 1 до 4.

Обобщая вышесказанное, перепишем (1.4) в виде

$$I_p^j = F_{j,(0)}(I^1) + \varepsilon F_{j,(1)}(I_{(0)}^1, I_{(0)}^2, \ldots, I_{(0)}^{N-R_\Delta^{(p)}-n}), \; j = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

где I^m — дифференциальные инварианты младших порядков, $m = 1, \ldots, N - R_\Delta^{(p)} - n$, $R_\Delta^{(p)}$, в зависимости от наследования, может принимать значения от 1 до r.

§ 2. Оператор инвариантного дифференцирования

В классической теории оператором инвариантного дифференцирования (ОИД) группы преобразований G_r называется линейный дифференциальный оператор $\lambda(t, x, y, \ldots)D_t$, результатом действия которого на дифференциальный инвариант группы является дифференциальный инвариант более высокого порядка той же группы. В [2] показано, что ОИД является оператор, который коммутирует с инфинитезимальными операторами допускаемой группы, то есть

$$[\hat{X}_\alpha^{(p)}, \lambda D_t] = 0, \;\; \alpha = 1, \ldots, r,$$

а решения системы вида

$$\hat{X}_\alpha^{(p)}(\lambda) - \lambda D_t(\xi_\alpha) = 0$$

на функцию λ дают набор функционально независимых ОИД данной группы преобразований.

Построим для приближенной алгебры Ли оператор, связывающий ее инварианты. Тогда, по аналогии с невозмущенным случаем, ОИД приближенной алгебры Ли определяется как оператор λD_t такой, что

$$\hat{X}_\alpha^{(p)}\left(\lambda D_t\left(I_p\right)\right) \approx 0.$$

Вид функции λ будем определять из условия приближенного коммутирования

$$[\hat{X}_\alpha^{(p)}, \; \lambda D_t] \approx 0. \tag{2.1}$$

Пусть функция λ является суммой $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1$. Определим вид функций λ_0 и λ_1.

Условие (2.1) перепишем в виде

$$[\hat{X}_{\alpha,(0)}^{(p)} + \varepsilon\hat{X}_{\alpha,(1)}^{(p)}, (\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1)\, D_t] = [\hat{X}_{\alpha,(0)}^{(p)}, \lambda_0] + \varepsilon\left([\hat{X}_{\alpha,(0)}^{(p)}, \lambda_1 D_t] + [\hat{X}_{\alpha,(1)}^{(p)}, \lambda_0 D_t]\right) + o(\varepsilon).$$

Раскладывая эти выражения по степеням ε, получим

$$[\hat{X}_{\alpha,(0)}^{(p)}, \lambda_0] = 0, \;\; [\hat{X}_{\alpha_1,(0)}^{(p)}, \lambda_1 D_t] + [\hat{X}_{\alpha_1,(1)}^{(p)}, \lambda_0 D_t] \approx 0.$$

Первая система коммутаторов дает систему дифференциальных уравнений первого порядка на λ_0:

$$\hat{X}_{\alpha,(0)}^{(p)}\left(\lambda_0\right) - \lambda_0 D_t\left(\xi_{\alpha,(0)}\right) = 0, \;\; \alpha = 1, \ldots, r, \tag{2.2}$$

а вторая система коммутаторов — систему на λ_0 и λ_1:

$$\hat{X}^{(p)}_{\alpha_1,(0)}(\lambda_1)+\hat{X}^{(p)}_{\alpha_1,(1)}(\lambda_0)-\lambda_0 D_t\left(\xi_{\alpha_1,(1)}\right)-\lambda_1 D_t\left(\xi_{\alpha_1,(0)}\right)\approx 0,\quad \alpha_1=1,\ldots,r_0. \tag{2.3}$$

Доказательство существования решения системы (2.2) дано в [2]. Система (2.3) должна быть полна и совместна на решениях (2.2). Исследование полноты и совместности для системы (2.3) аналогично исследованию полноты и совместности системы Ω_1.

Применение такого ОИД к дифференциальным инвариантам младших порядков I^q, где $q=1,\ldots,(N-R^{(p)}_\Delta-n-1)$, на решениях системы (1.7) приводит к соотношению

$$\begin{cases} \lambda D_t(I_{q_1})|_{(1.7)}\approx H_0(I_{q_1})+\varepsilon H_1(I_{q_1,(0)},\ldots,I_{q_{N-R^{(p)}_\Delta-n-1},(0)}),\\ \lambda D_t(I_{q_k})|_{(1.7)}\approx \varepsilon H_k(I_{q_1,(0)},\ldots,I_{q_{N-R^{(p)}_\Delta-n-1},(0)}),\ k=2,\ldots,N-R^{(p)}_\Delta-n-1. \end{cases}$$

с некоторыми функциями H_ν. Расщепляя эти уравнения по степеням ε, получим систему

$$\begin{cases} \lambda_0 D_t(I_{q_1,(0)})=H_0(I_{q_1,(0)}),\\ \lambda_0 D_t(I_{q_1,(1)})+\lambda_1 D_t(I_{q_1,(0)})\approx H_1(I_{q_1,(0)},\ldots,I_{q_{N-R^{(p)}_\Delta-n-1},(0)}),\\ \lambda_0 D_t(I_{q_k,(0)})=H_k(I_{q_1,(0)},\ldots,I_{q_{N-R^{(p)}_\Delta-n-1},(0)}),\ k=2,\ldots,N-R^{(p)}_\Delta-n-1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Первое уравнение системы (2.4) можно переписать в виде

$$\hat{H}_0(I_{q_1,(0)})\mathrm{d}I_{q_1,(0)}=\frac{\mathrm{d}t}{\lambda_0}.$$

Правая часть этого соотношения интегрируема, если $\lambda_0=(D_t(\Phi_0))^{-1}$, с некоторой дифференцируемой функцией Φ_0. Подставляя первое уравнение системы (2.4) в остальные и учитывая представление λ_0, получим, что для интегрируемости остальных уравнений системы (2.4) функция λ_1 должна иметь вид $D_t(\Phi_1)\,(D_t(\Phi_0))^{-1}$, где Φ_1 также дифференцируемая функция. Найдем условия существования ОИД специального вида с функцией λ вида

$$(D_t(\Phi_0+\varepsilon\Phi_1))^{-1}.$$

Условие коммутирования ОИД с операторами группы дает систему

$$\begin{cases} D_t\left(\hat{X}^{(p)}_{\alpha,(0)}(\Phi_0)\right)=0,\\ D_t\left(\hat{X}^{(p)}_{\alpha_1,(0)}(\Phi_1)+\hat{X}^{(p)}_{\alpha_1,(1)}(\Phi_0)\right)\approx 0. \end{cases}$$

Интегрируя эти выражения, получим систему неоднородных уравнений первого порядка, состоящую из двух подсистем:

$$\begin{aligned} &\Pi_0\colon \hat{X}^{(p-1)}_{\alpha,(0)}(\Phi_0)=C_{\alpha,(0)},\\ &\Pi_1\colon \hat{X}^{(p-1)}_{\alpha_1,(0)}(\Phi_1)+\hat{X}^{(p-1)}_{\alpha_1,(1)}(\Phi_0)\approx C_{\alpha_1,(1)}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $C_{\alpha,(0)}$ и $C_{\alpha_1,(1)}$ — некоторые постоянные. Решение этой системы существует, если подсистема Π_0 полна и совместна, а подсистема Π_1 полна и совместна на решениях системы Π_0.

Согласно [21] полнота подсистемы Π_0 системы (2.5) эквивалентна замкнутости системы операторов

$$Y_\alpha=\hat{X}^{(p-1)}_{\alpha,(0)}+\frac{\partial}{\partial\Phi_0}.$$

В работе [11] было показано, что исследование замкнутости этих операторов сводится к исследованию системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c_{\pi\rho}^{\sigma} C_{\sigma,(0)} = 0, \ \ \pi,\rho = 1,\ldots,r,$$

где $c_{\pi\rho}^{\sigma}$ — структурные константы точной алгебры, порождаемой операторами $X_{\alpha,(0)}$.

Совместность подсистемы Π_0 системы (2.5) следует из того, что ранг матрицы $\Lambda_{r,(0)}^{(p-1)}$ максимален, и, следовательно, подсистема Π_0 всегда совместна (см. [11]). Полнота и совместность подсистемы Π_1 исследуются аналогично исследованию полноты и совместности системы Ω_1.

Если $C_{\alpha,(0)} = 0$, $\alpha = 1,\ldots,r$, и $C_{\alpha_1,(1)} = 0$, $\alpha_1 = 1,\ldots,r_0$, мы получим, что $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1$ — инвариант рассматриваемой приближенной алгебры Ли, и уравнения (2.4) превращаются в тождество. В противном случае (то есть если среди $C_{\alpha,(0)}$, $C_{\alpha_1,(1)}$ есть хотя бы одна ненулевая постоянная) после интегрирования системы (2.4), подставления результата в систему (1.7) и исключения дифференциальных следствий получившиеся уравнения являются приближенно инвариантными относительно операторов вида

$$\left(C_{\rho,(0)} + \varepsilon C_{\rho,(1)}\right) \hat{X}_{\pi}^{(p-1)} - \left(C_{\pi,(0)} + \varepsilon C_{\pi,(1)}\right) \hat{X}_{\rho}^{(p-1)}. \tag{2.6}$$

Действительно,

$$\Big(\left(C_{\rho,(0)} + \varepsilon C_{\rho,(1)}\right) \hat{X}_{\pi}^{(p-1)} - \left(C_{\pi,(0)} + \varepsilon C_{\pi,(1)}\right) \hat{X}_{\rho}^{(p-1)}\Big) \left(\Phi_0 + \varepsilon\Phi_1\right) =$$
$$= \left(C_{\rho,(0)} + \varepsilon C_{\rho,(1)}\right)\left(C_{\pi,(0)} + \varepsilon C_{\pi,(1)}\right) - \left(C_{\pi,(0)} + \varepsilon C_{\pi,(1)}\right)\left(C_{\rho,(0)} + \varepsilon C_{\rho,(1)}\right) = 0.$$

Пусть $C_{\rho,(0)} \neq 0$. В противном случае Φ_0 будет инвариантом точной алгебры L_r.

Далее обозначим $\left(C_{\rho,(0)} + \varepsilon C_{\rho,(1)}\right) = C_\rho$.

Утверждение 1. *Среди всех линейных комбинаций (2.6) можно выделить $r-1$ линейно независимых комбинаций, которые образуют приближенную алгебру Ли.*

Доказательство. Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда рассмотрим операторы

$$\overline{X}_{\pi-1} = C_\pi \hat{X}_1^{(p-1)} - C_1 \hat{X}_\pi^{(p-1)}, \ \ \pi = 2,\ldots,r.$$

Эти операторы по построению являются линейно независимыми, так как операторы $X_1,\ldots,X_r$ образуют базис алгебры L_r.

Любая другая комбинация может быть выражена через выбранные:

$$C_\nu \hat{X}_\mu^{(p-1)} - C_\mu \hat{X}_\nu^{(p-1)} = C_\nu \hat{X}_\mu^{(p-1)} - C_\mu \hat{X}_\nu^{(p-1)} \pm \frac{C_\mu C_\nu}{C_1} \hat{X}_1^{(p-1)} = \frac{C_\mu}{C_1}\overline{X}_{\nu-1} - \frac{C_\nu}{C_1}\overline{X}_{\mu-1}.$$

Множество $\{\overline{X}_\pi\}$ относительно операции коммутирования образует приближенную алгебру Ли:

$$[\overline{X}_{\mu-1}, \overline{X}_{\nu-1}] = [C_\mu \hat{X}_1^{(p-1)} - C_1 \hat{X}_\mu^{(p-1)}, C_\nu \hat{X}_1^{(p-1)} - C_1 \hat{X}_\nu^{(p-1)}] =$$
$$= C_\mu C_\nu [\hat{X}_1^{(p-1)}, \hat{X}_1^{(p-1)}] - C_1 C_\mu [\hat{X}_1^{(p-1)}, \hat{X}_\nu^{(p-1)}] + C_1 C_\nu [\hat{X}_1^{(p-1)}, \hat{X}_\mu^{(p-1)}] + C_1^2 [\hat{X}_\mu^{(p-1)}, \hat{X}_\nu^{(p-1)}] \approx$$
$$\approx \textstyle\sum_{\sigma=1}^{r} \left(C_1 C_\nu c_{1\nu}^{\sigma} - C_1 C_\mu c_{1\mu}^{\sigma} + C_1^2 c_{\mu\nu}^{\sigma}\right) \hat{X}_\sigma^{(p-1)} =$$
$$= C_1\left(C_\nu c_{1\nu}^1 - C_\mu c_{1\mu}^1 + C_1 c_{\nu\mu}^1\right) \hat{X}_1^{(p-1)} + C_1 \textstyle\sum_{\sigma=2}^{r} \left(C_\nu c_{1\nu}^{\sigma} - C_\mu c_{1\mu}^{\sigma} + C_1 c_{\mu\nu}^{\sigma}\right) \dfrac{C_\sigma \hat{X}_1^{(p-1)} - \overline{X}_{\sigma-1}}{C_1} =$$
$$= \textstyle\sum_{\sigma=1}^{r} \left(C_\nu c_{1\nu}^{\sigma} - C_\mu c_{1\mu}^{\sigma} + C_1 c_{\mu\nu}^{\sigma}\right) C_\sigma \hat{X}_1^{(p-1)} - \sum_{\sigma=2}^{r} \left(C_\nu c_{1\nu}^{\sigma} - C_\mu c_{1\mu}^{\sigma} + C_1 c_{\mu\nu}^{\sigma}\right) \overline{X}_{\sigma-1} =$$
$$= -\textstyle\sum_{\sigma=2}^{r} \left(C_\nu c_{1\nu}^{\sigma} - C_\mu c_{1\mu}^{\sigma} + C_1 c_{\mu\nu}^{\sigma}\right) \overline{X}_{\sigma-1}.$$

Таким образом, операторы $\overline{X}_\pi$ образуют приближенную алгебру Ли. □

Соотношение вида $S(\Phi, I, C) = 0$, получившееся после интегрирования системы (2.4), добавляется к системе (1.7). После удаления дифференциальных следствий к получившейся системе с $r-1$ линейно независимыми приближенными симметриями также можно применить описанную процедуру.

Замечание 1. Для простоты вычислений можно положить $C_{\alpha_1,(1)} \equiv 0$, $\alpha_1 = 1, \ldots, r_0$.

Таким образом, алгоритм понижения порядка систем ОДУ с малым параметром, допускающих приближенные алгебры Ли, следующий:

1) найти инвариантное представление рассматриваемой системы;

2) построить ОИД специального вида;

3) в случае успешного построения — подействовать полученным ОИД на инварианты младших порядков, получить систему (2.4);

4) проинтегрировать систему (2.4);

5) добавить полученный интеграл к исходной системе;

6) удалить дифференциальные следствия и получить систему меньшего порядка.

Замечание 2. В случае если полученная система меньшего порядка не наследует никакой точной алгебры, то есть допускает только операторы вида $X_{\alpha_1} = \varepsilon X_{\alpha_1,(0)}$, $\alpha_1 = 1, \ldots, r_0$, то представленный алгоритм применяется только к системе при $\varepsilon = 0$.

§ 3. Применение алгоритма

Рассмотрим подробнее применение описанного алгоритма к интегрированию ОДУ второго порядка с малым параметром и к интегрированию систем двух ОДУ второго порядка с малым параметром.

Везде будем предполагать, что ОИД λD_t ищем в виде $(D_t(\Phi))^{-1} D_t$, $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1$.

Интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром

Пример 1. Приближенные операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \varepsilon x \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$$

образуют приближенную алгебру Ли ($[X_1, X_2] \approx -\varepsilon X_2$). Уравнение, инвариантное относительно этой алгебры, имеет вид

$$\ddot{x} = f_0(\dot{x}) + \varepsilon\left(f_1(\dot{x}) - f_0(\dot{x})(2x\dot{x} - t) + f_0'(\dot{x})\dot{x}(x\dot{x} - t)\right).$$

Алгебра имеет следующие дифференциальные инварианты:

$$I_1 = \dot{x} + \varepsilon\dot{x}(x\dot{x} - t), \;\; I_2 = \ddot{x} + \varepsilon\ddot{x}(2x\dot{x} - t).$$

Уравнение в инвариантах запишется как

$$I_2 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}).$$

Функция Φ для ОИД находится как частное решение системы вида (2.5). Пусть, например,

$$\Phi = t - \varepsilon\frac{x^2}{2}, \quad \lambda D_t = (1+\varepsilon x\dot{x})D_t.$$

Применяя ОИД к I_1, получим

$$(1+\varepsilon x\dot{x})D_t(I_1) = (1+\varepsilon x\dot{x})D_t\left(\dot{x}+\varepsilon\dot{x}(x\dot{x}-t)\right) = I_2 + \varepsilon\left(I_1\right)^3 - \varepsilon I_1 + o(\varepsilon) \approx$$
$$\approx F_0(I_1) + \varepsilon\left(F_1(I_{1,(0)}) + \left(I_{1,(0)}\right)^3 - I_{1,(0)}\right).$$

Расщепляя по степеням ε, получим систему

$$\begin{cases} D_t\left(I_{1,(0)}\right) = D_t\left(\Phi_0\right)F_0(I_{1,(0)}), \\ D_t\left(I_{1,(1)}\right) \approx D_t\left(\Phi_1\right)F_0(I_{1,(0)}) + D_t\left(\Phi_0\right)\left(I_{1,(1)}F_0'(I_{1,(0)}) + F_1(I_{1,(0)}) + \left(I_{1,(0)}\right)^3 - I_{1,(0)}\right). \end{cases}$$

Интегрируя, получим, что исходное уравнение свелось к уравнению первого порядка:

$$I_1 \approx H_0\left(\Phi_0\right) + \varepsilon\left(\Phi_1 H_1\left(\Phi_0\right) + H_2\left(\Phi_0\right)\right).$$

Это уравнение приближенно допускает оператор $X_2 = \varepsilon x\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}$ и интегрируемо.

Пример 2. Операторы

$$X_1 = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = (t+\varepsilon t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (x+\varepsilon tx)\frac{\partial}{\partial x}$$

образуют приближенную алгебру ($[X_1,\, X_2] \approx X_1$). Уравнение, инвариантное относительно этой алгебры, имеет вид

$$\ddot{x} = \frac{1}{t}f_0(\dot{x}) + \varepsilon\left(\frac{1}{t}f_1(\dot{x},\frac{x}{t}) - 2f_0(\dot{x}) + \frac{t\dot{x}-x}{t}f_0'(\dot{x})\right).$$

Дифференциальными инвариантами алгебры являются

$$I_1 = \dot{x} + \varepsilon(t\dot{x}-x), \quad I_2 = t\ddot{x} + 2\varepsilon t^2\ddot{x}, \quad I_0 = \varepsilon\frac{x}{t}.$$

Тогда уравнение имеет следующее инвариантное представление:

$$I_2 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}, I_{0,(0)}).$$

Функция Φ для ОИД находится как частное решение системы вида (2.5). Пусть, например,

$$\Phi = \ln t - \varepsilon t, \quad \lambda D_t = (t+\varepsilon t^2)D_t.$$

Применяя ОИД к I_1 и I_0, получим

$$(t+\varepsilon t^2)D_t(I_1) = (t+\varepsilon t^2)D_t(\dot{x}+\varepsilon(t\dot{x}-x)) = I_2 + o(\varepsilon) \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}),$$
$$(t+\varepsilon t^2)D_t(I_0) = (t+\varepsilon t^2)D_t\left(\varepsilon\frac{x}{t}\right) = I_0 + \varepsilon I_1 + o(\varepsilon).$$

Расщепляя по степеням ε, получим систему

$$\begin{cases} D_t\left(I_{1,(0)}\right) = D_t\left(\Phi_0\right)F_0(I_{1,(0)}), \\ D_t\left(I_{1,(1)}\right) \approx D_t\left(\Phi_1\right)F_0(I_{1,(0)}) + D_t\left(\Phi_0\right)\left(I_{1,(1)}F_0'(I_{1,(0)}) + F_1(I_{1,(0)})\right), \\ D_t\left(I_{0,(0)}\right) = D_t\left(\Phi_0\right)\dfrac{I_{1,(0)}}{I_{0,(0)}}. \end{cases}$$

Интегрируя, получим, что исходное уравнение свелось к уравнению первого порядка:

$$I_1 \approx H_0(\Phi_0) + \varepsilon\left(\Phi_1 H_1(\Phi_0) + H_2(\Phi_0)\right).$$

Это уравнение приближенно допускает оператор $X_1 = \varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x}$.

В этом случае повторное применение алгоритма возможно только в «точном» смысле. А именно, для этого оператора можно построить ОИД $\lambda_0 D_t$, где $\lambda_0 = \left(D_t\left(\Phi_0^2\right)\right)^{-1}$. Выберем $\Phi_0^2 = x$, тогда ОИД имеет вид $\frac{1}{\dot x}D_t$. Инвариантами оператора X_1 являются t и $\dot x$. Применяя полученный ОИД к инварианту t, получим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}t}{\hat H(t)} = \dot x\,\mathrm{d}t,$$

интегрируя которое получим невозмущенную часть решения исходного уравнения.

Пример 3. Операторы

$$X_1 = \varepsilon t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = (t + \varepsilon t x)\frac{\partial}{\partial x}$$

образуют приближенную алгебру ($[X_1, X_2] \approx \varepsilon X_2$). Уравнение, инвариантное относительно этой алгебры, имеет вид

$$\ddot x = \frac{1}{t^2}f_0(t\dot x - x) + \varepsilon\left(\frac{x}{t^2}f_0(t\dot x - x) + \left(\frac{x^2}{2t^2} - \frac{x\dot x}{t}\right)f_0'(t\dot x - x) + \frac{1}{t^2}f_1(t, t\dot x - x) + \frac{2t\dot x - x^2}{t^2}\right).$$

Дифференциальными инвариантами алгебры являются

$$I_1 = t\dot x - x + \varepsilon\left(\frac{x^2}{2} - t x\dot x\right), \qquad I_2 = t^2\ddot x + \varepsilon\left(x^2 - 2tx\dot x - t^2 x\ddot x\right), \qquad I_0 = \varepsilon t.$$

Тогда уравнение имеет следующее инвариантное представление:

$$I_2 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}, I_{0,(0)}).$$

Функция Φ для ОИД находится как частное решение системы вида (2.5). Пусть, например, $\Phi = \ln t$, тогда $\lambda D_t = tD_t$. Применяя ОИД к I_1 и I_0, получим

$$\begin{aligned}
&tD_t(I_1) = tD_t(t\dot x - x + \varepsilon\left(\frac{x^2}{2} - tx\dot x\right)) = I_2 - \varepsilon I_1^2 + o(\varepsilon) \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}) - \varepsilon(I_{1,(0)})^2,\\
&tD_t(I_0) = tD_t(\varepsilon t) = I_0.
\end{aligned}$$

Расщепляя по степеням ε, получим систему

$$\begin{cases}
D_t\left(I_{1,(0)}\right) = D_t(\Phi_0)\,F_0(I_{1,(0)}),\\
D_t\left(I_{1,(1)}\right) \approx D_t(\Phi_0)\left(I_{1,(1)}F_0'(I_{1,(0)}) + F_1(I_{1,(0)}) - I_{1,(0)}^2\right),\\
D_t\left(I_{0,(0)}\right) = D_t(\Phi_0)\left(I_{0,(0)}\right).
\end{cases}$$

Интегрируя, получим, что исходное уравнение свелось к уравнению первого порядка

$$I_1 \approx H_0(\Phi_0) + \varepsilon\left(\Phi_1 H_1(\Phi_0) + H_2(\Phi_0)\right).$$

Это уравнение приближенно допускает оператор $X_2 = (t + \varepsilon t x)\dfrac{\partial}{\partial x}$. Следовательно, может быть проинтегрировано.

Интегрирование системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром

Пример 4. Операторы

$$X_1 = (1+\varepsilon t)\frac{\partial}{\partial t},\ \ X_2 = (1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x},\ \ X_3 = (1+\varepsilon t)\frac{\partial}{\partial y},\ \ X_4 = (t+\varepsilon t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (y+\varepsilon ty)\frac{\partial}{\partial y}$$

образуют приближенную алгебру Ли:

$$[X_1,\, X_2] = 0, \quad [X_1,\, X_3] = \varepsilon X_3, \quad [X_1,\, X_4] = X_1 + \varepsilon X_4,$$
$$[X_2,\, X_3] = 0, \quad [X_2,\, X_4] = 0, \quad [X_3,\, X_4] = X_3.$$

Для инвариантного представления системы (1.6) в этом случае используются инварианты

$$I_1 = \dot y + \varepsilon(t\dot y - y), \quad I_2^1 = \frac{\ddot x}{\dot x^2}(1+\varepsilon(x\ddot x + 2\dot x)), \quad I_2^2 = \frac{\ddot y + \varepsilon\ddot y(t+x)}{\dot x}.$$

Тогда в инвариантах система (1.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} I_2^1 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}), \\ I_2^2 \approx G_0(I_1) + \varepsilon G_1(I_{1,(0)}). \end{cases}$$

Функция Φ для построения ОИД находится как частное решение системы вида (2.5). Пусть, например, $\Phi_0 = x$, $\Phi_1 = -\dfrac{x^2}{2}$. Тогда ОИД имеет вид

$$\frac{1+\varepsilon x}{\dot x}D_t.$$

Применяя этот ОИД к инварианту младшего порядка I_1, получим соотношения вида (2.4), а именно:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\dot x}D_t(\dot y) = G_0(\dot y), \\ \dfrac{1}{\dot x}D_t(t\dot y - y) + \dfrac{x}{\dot x}D_t(\dot y) \approx (t\dot y - y)G_0'(\dot y) + G_1(\dot y), \end{cases}$$

Интегрирование этой системы дает первый интеграл системы, добавив который к самой системе и избавившись от дифференциальных следствий получим новую систему:

$$\begin{cases} I_1 \approx H_1(\Phi_0) + \varepsilon(\Phi_1 H_2(\Phi_0) + H_3(\Phi_0)), \\ I_2^1 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}). \end{cases}$$

которая с точностью $o(\varepsilon)$ допускает операторы X_1, X_3 и X_4.

Процедуру можно повторить еще три раза.

Пример 5. Операторы

$$X_1 = (1+\varepsilon t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \varepsilon x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = (1+\varepsilon t)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = (t+\varepsilon t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (y+\varepsilon ty)\frac{\partial}{\partial y}$$

образуют приближенную алгебру Ли:

$$[X_1,\, X_2] = 0, \quad [X_1,\, X_3] = \varepsilon X_3, \quad [X_1,\, X_4] = X_1 + \varepsilon X_4,$$
$$[X_2,\, X_3] = 0, \quad [X_2,\, X_4] = 0, \quad [X_3,\, X_4] = X_3.$$

Для инвариантного представления системы (1.6) в этом случае используются инварианты

$$I_1 = \dot{y} + \varepsilon(t\dot{y} - y), \quad I_2^1 = \frac{x\ddot{x}}{\dot{x}^2}(1 + 2\varepsilon\dot{x}), \quad I_2^2 = \frac{x\ddot{y} + \varepsilon tx\ddot{y}}{\dot{x}}, \quad I_0 = \varepsilon x.$$

Тогда в инвариантах система (1.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} I_2^1 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}, I_{0,(0)}), \\ I_2^2 \approx G_0(I_1) + \varepsilon G_1(I_{1,(0)}, I_{0,(0)}). \end{cases}$$

Функция Φ для построения ОИД находится как частное решение системы вида (2.5). Пусть, например, $\Phi_0 = \ln x$, $\Phi_1 = 0$. Тогда ОИД имеет вид

$$\frac{x}{\dot{x}}D_t.$$

Применяя этот ОИД к инвариантам I_1 и I_0 и расщепляя по степеням ε, получим соотношения вида (2.4), а именно:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\dot{x}}D_t(\dot{y}) = G_0(\dot{y}), \\ \dfrac{x}{\dot{x}}D_t(t\dot{y} - y) \approx (t\dot{y} - y)G_0'(\dot{y}) + G_1(\dot{y}), \\ \dfrac{x}{\dot{x}}D_t(\varepsilon x) = \varepsilon x. \end{cases}$$

Интегрирование этой системы дает первый интеграл системы, добавив который к самой системе и избавившись от дифференциальных следствий получим новую систему

$$\begin{cases} I_1 \approx H_1(\Phi_0) + \varepsilon(\Phi_1 H_2(\Phi_0) + H_3(\Phi_0)), \\ I_2^1 \approx F_0(I_1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}, I_{0,(0)}), \end{cases}$$

которая с точностью $o(\varepsilon)$ допускает операторы X_1, X_3 и X_4.

Процедуру можно повторить еще три раза.

Пример 6. Операторы

$$X_1 = \varepsilon t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = (1 + \varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = (1 + \varepsilon t)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = (t + \varepsilon t^2)\frac{\partial}{\partial t} + (y + \varepsilon ty)\frac{\partial}{\partial y}$$

образуют приближенную алгебру Ли:

$$[X_1,\, X_2] = 0, \quad [X_1,\, X_3] \approx 0, \quad [X_1,\, X_4] \approx 0,$$
$$[X_2,\, X_3] = 0, \quad [X_2,\, X_4] = 0, \quad [X_3,\, X_4] = X_3.$$

Для инвариантного представления системы (1.6) в этом случае используются инварианты

$$I_1^1 = t\dot{x} + \varepsilon t\dot{x}(t-1), \;\; I_1^2 = \varepsilon\dot{y}, \;\; I_2^1 = t^2\ddot{x} + \varepsilon(2t^3\ddot{x} - t^2x\ddot{x} + 2t^2\dot{x}), \;\; I_2^2 = \frac{t\ddot{y}}{\dot{y}} + \varepsilon\frac{t^2\dot{y}\ddot{y} + ty\ddot{y}}{\dot{y}^2}.$$

Тогда в инвариантах система (1.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} I_2^1 \approx F_0(I_1^1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}^1, I_{1,(0)}^2), \\ I_2^2 \approx G_0(I_1^1) + \varepsilon G_1(I_{1,(0)}^1, I_{1,(0)}^2). \end{cases}$$

Функция Φ для построения ОИД находится как частное решение системы вида (2.5). Пусть, например, $\Phi_0 = \ln t$, $\Phi_1 = -t$. Тогда ОИД имеет вид

$$(t + \varepsilon t^2)D_t.$$

Применение этого ОИД к инвариантам первого порядка I_1 позволит получить соотношения

$$\begin{cases} (t+\varepsilon t^2)D_t(I_1^1) = F_0(I_1^1) + \varepsilon F_1(I_{1,(0)}^1, I_{1,(0)}^2) + I_1^1 - \varepsilon\left(I_1^1\right)^2, \\ (t+\varepsilon t^2)D_t(I_1^2) \approx I_1^2\left(G_0(I_1^1) + \varepsilon G_1(I_{1,(0)}^1, I_{1,(0)}^2)\right). \end{cases}$$

Расщепляя эти уравнения по степеням ε, получим систему

$$\begin{cases} tD_t(t\dot{x}) = F_0(t\dot{x}) + t\dot{x}, \\ tD_t(t^2\dot{x} - tx\dot{x}) + t^2D_t(t\dot{x}) \approx (t^2\dot{x} - tx\dot{x})F_0'(t\dot{x}) + F_1(t\dot{x}, \dot{y}) + t^2\dot{x} - tx\dot{x} + (t\dot{x})^2, \\ tD_t(\dot{y}) = \dot{y}G_0(t\dot{x}). \end{cases}$$

Проинтегрировав эту систему, добавив результат к исходной системе и избавившись от дифференциальных следствий, получим новую систему:

$$\begin{cases} I_1^1 \approx H_1(\Phi_0) + \varepsilon(\Phi_1 H_2(\Phi_0) + H_3(\Phi_0)), \\ I_1^2 \approx \varepsilon H_4(\Phi_0), \\ I_2^2 \approx G_0(I_1^1) + \varepsilon G_1(I_{1,(0)}^1, I_{1,(0)}^2), \end{cases}$$

которая с точностью $o(\varepsilon)$ допускает операторы X_2, X_3 и X_4.

Процедуру можно повторить еще три раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли С., Шефферс Г. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. М.–Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 704 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
4. Stephani H. Differential equations. Their solution using symmetries. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. XII, 260 p.
5. Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. Springer, New York, 1989. 412 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-4307-4
6. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) // Успехи математических наук. 1992. Т. 47. Вып. 4 (286). С. 83–144.
7. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2001. Vol. 34. No. 13. P. 2883–2911. DOI: 10.1088/0305-4470/34/13/316
8. Ayub M., Khan M., Mahomed F.M. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability // Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 2013. Article ID 147921. 15 p. DOI: 10.1155/2013/147921
9. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Reduction of order for systems of ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2004. Vol. 11. Issue 1. P. 13–20. DOI: 10.2991/jnmp.2004.11.1.3
10. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. 2017. Vol. 473. Issue 2197. 20160461. DOI: 10.1098/rspa.2016.0461
11. Газизов Р.К., Гайнетдинова А.А. Оператор инвариантного дифференцирования и его применение для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9. Вып. 4. С. 12–21.
12. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Приближенные группы преобразований // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 10. С. 1712–1732.
13. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On approximate symmetry and approximate solutions of the nonlinear wave equation with a small parameter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1989. Vol. 22. No. 18. P. L887–L890. DOI: 10.1088/0305-4470/22/18/007

14. Bagderina Yu.Yu. Solution of ordinary differential equation with a large Lie symmetry group // Nonlinear Dynamics. 2002. Vol. 30. Issue 3. P. 287–294. DOI: 10.1023/A:1020568028406
15. Gazizov R.K., Ibragimov N.H., Lukashchuk V.O. Integration of ordinary differential equation with a small parameter via approximate symmetries: reduction of approximate symmetry algebra to a canonical form // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2010. Vol. 31. Issue 2. P. 141–151. DOI: 10.1134/S1995080210020058
16. Gazizov R.K. Representation of general invariants for approximate transformation groups // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1997. Vol. 213. Issue 1. P. 202–228. DOI: 10.1006/jmaa.1997.5525
17. Bagderina Yu. Invariants of multi-parameter approximate transformation groups // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 281. Issue 2. P. 539–551. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00142-2
18. Bagderina Yu.Yu., Gazizov R.K. Invariant representation and symmetry reduction for differential equations with a small parameter // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2004. Vol. 9. Issue 1. P. 3–11. DOI: 10.1016/S1007-5704(03)00010-8
19. Багдерина Ю.Ю., Газизов Р.К. Приближенно инвариантные решения дифференциальных уравнений с малым параметром // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 3. С. 347–355.
20. Газизов Р.К., Лукащук В.О. Классификация неподобных приближенных алгебр Ли с двумя существенными симметриями на плоскости // Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием (29–31 мая 2008 г.). Часть 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Математическое моделирование и краевые задачи. СамГТУ. Самара, 2008. С. 62–64. http://mi.mathnet.ru/mmkz1111
21. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Л.–М.: ОНТИ, 1934. 359 с.

Поступила в редакцию 14.04.2018

Гайнетдинова Алия Айдаровна, старший преподаватель, кафедра высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, м. н. с., научно-исследовательская лаборатория «Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий», Уфимский государственный авиационный технический университет, 450008, Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.
E-mail: gainetdinova.alia@gmail.com

A. A. Gainetdinova

Integration of systems of ordinary differential equations with a small parameter which admit approximate Lie algebras

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 143–160 (in Russian).

Keywords: systems of ODEs with a small parameter, approximate Lie algebras, invariant representation, operator of invariant differentiation.

MSC2010: 34A25, 22E05

DOI: 10.20537/vm180202

The algorithm for the order reduction of ordinary differential equations (ODEs) by using the operator of invariant differentiation (OID) of admitted Lie algebra is modified for systems of ODEs with a small parameter that admit approximate Lie algebras of operators. Invariant representations of second-order ODEs and systems of two second-order ODEs are presented. The OID of approximate Lie algebra is introduced. It is shown that it is possible to construct a special type of OID, which is used for obtaining the first integral of the system considered. Examples of using the algorithm for cases of complete and incomplete inheritance of a Lie algebra are given.

REFERENCES

1. Lie S., Scheffers G. *Simmetrii differentsial'nykh uravnenii. Tom 1. Lektsii o differentsial'nykh uravneniyakh s izvestnymi infinitezimal'nymi preobrazovaniyami* (Symmetries of differential equations. Vol. 1. Lectures on differential equations with known infinitesimal transformations), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2011, 704 p.
2. Ovsiannikov L.V. *Group analysis of differential equations*, Academic Press, 1982, 432 p. DOI: 10.1016/C2013-0-07470-1
Original Russian text published in Ovsyannikov L.V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Nauka, 1978, 399 p.
3. Olver P.J. *Applications of Lie groups to differential equations*, New York: Springer, 1986, 513 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-0274-2
Translated under the title *Prilozheniya grupp Li k differentsial'nym uravneniyam*, Moscow: Mir, 1989, 639 p.
4. Stephani H. *Differential equations. Their solution using symmetries*, Cambridge: Cambridge University Press, 1989, XII, 260 p.
5. Bluman G.W., Kumei S. *Symmetries and differential equations*, Springer, New York, 1989, 412 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-4307-4
6. Ibragimov N.Kh. Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie), *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4, pp. 89–156. DOI: 10.1070/RM1992v047n04ABEH000916
7. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2001, vol. 34, no. 13, pp. 2883–2911. DOI: 10.1088/0305-4470/34/13/316
8. Ayub M., Khan M., Mahomed F.M. Second-order systems of ODEs admitting three-dimensional Lie algebras and integrability, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 2013, article ID 147921, 15 p. DOI: 10.1155/2013/147921
9. Wafo Soh C., Mahomed F.M. Reduction of order for systems of ordinary differential equations, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2004, vol. 11, issue 1, pp. 13–20. DOI: 10.2991/jnmp.2004.11.1.3
10. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K. Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2017, vol. 473, issue 2197, 20160461. DOI: 10.1098/rspa.2016.0461
11. Gazizov R.K., Gainetdinova A.A. Invariant differentiation operator and its application for integrating systems of ordinary differential equations, *Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 12–21. DOI: 10.13108/2017-9-4-12
12. Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Approximate groups of transformations, *Differential Equations*, 1993, vol. 29, issue 10, pp. 1487–1504.
13. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On approximate symmetry and approximate solutions of the nonlinear wave equation with a small parameter, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1989, vol. 22, no. 18, pp. L887–L890. DOI: 10.1088/0305-4470/22/18/007
14. Bagderina Yu.Yu. Solution of ordinary differential equation with a large Lie symmetry group, *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 30, issue 3, pp. 287–294. DOI: 10.1023/A:1020568028406
15. Gazizov R.K., Ibragimov N.H., Lukashchuk V.O. Integration of ordinary differential equation with a small parameter via approximate symmetries: Reduction of approximate symmetry algebra to a canonical form, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2010, vol. 31, no. 2, pp. 141–151. DOI: 10.1134/S1995080210020058
16. Gazizov R.K. Representation of general invariants for approximate transformation groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997, vol. 213, issue 1, pp. 202–228. DOI: 10.1006/jmaa.1997.5525
17. Bagderina Yu. Invariants of multi-parameter approximate transformation groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 281, issue 2, pp. 539–551. DOI: 10.1016/S0022-247X(03)00142-2
18. Bagderina Yu.Yu., Gazizov R.K. Invariant representation and symmetry reduction for differential equations with a small parameter, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, vol. 9, issue 1, pp. 3–11. DOI: 10.1016/S1007-5704(03)00010-8
19. Bagderina Yu.Yu., Gazizov R.K. Approximately invariant solutions of differential equations with a small parameter, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 3, pp. 364–372. DOI: 10.1007/s10625-005-0168-4

20. Gazizov R.K., Lukashchuk V.O. Classification of nonsimilar approximate Lie algebras with two essential symmetries on the plane, *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation (29–31 May 2008). Part 3*, Matem. Mod. Kraev. Zadachi, Samara State Technical Univ., Samara, 2008, pp. 62–64 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/mmkz1111
21. Gyunter N.M. *Integrirovanie uravnenii pervogo poryadka v chastnykh proizvodnykh* (Integration of first-order partial differential equations), Leningrad–Moscow: ONTI, 1934, 359 p.

Received 14.04.2018

Gainetdinova Aliya Aidarovna, Senior Lecturer, Junior Researcher, Ufa State Aviation Technical University, ul. K. Marksa, 12, Ufa, 450008, Russia.
E-mail: gainetdinova.alia@gmail.com