

УДК 519.21

© *И. А. Башкирцева***О ВЛИЯНИИ ЦВЕТНОГО ШУМА НА РАВНОВЕСНЫЕ РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹**

В работе изучается влияние цветного шума на равновесные режимы нелинейных динамических систем. Для исследования реакции системы на малые возмущения используется асимптотический подход, развивающий технику функций стохастической чувствительности. Стохастическая чувствительность равновесия в общей многомерной динамической системе задается некоторой матрицей. Для этой матрицы стохастической чувствительности в работе получено матричное алгебраическое уравнение. Точное решение этого уравнения дается для важного класса нелинейных осцилляторов с возмущениями в форме цветных шумов. Эта теория применяется к параметрическому исследованию отклика электронного генератора с жестким возбуждением на цветные шумы с различным временем корреляции. В работе исследована зависимость дисперсии случайных состояний от характерного времени корреляции. Показано, что эта зависимость может быть немонотонной и иметь максимумы, соответствующие резонансам. В работе обсуждается вероятностный механизм стохастической генерации колебаний больших амплитуд, вызванной цветным шумом.

Ключевые слова: цветной шум, время корреляции, стохастическая чувствительность, электронный генератор, стохастическая возбудимость.

DOI: [10.20537/vm180201](https://doi.org/10.20537/vm180201)

В исследованиях динамики реальных систем необходимо учитывать неизбежно присутствующие случайные возмущения. Среди возможных типов стохастических возмущений часто рассматривают так называемые цветные шумы, имеющие те или иные характерные корреляционные временные свойства [1, 2]. Важная роль цветных шумов была обнаружена во многих системах самой разной природы, например в лазерах [3], сейсмологии [4], биохимии [5], динамике популяций [6], кинетике роста микроорганизмов [7], динамике роста опухолей [8]. Воздействие цветных шумов может приводить к таким явлениям, как индуцированные случайными возмущениями переходы [9–12], стохастический резонанс [13], вызывать стохастические бифуркации [14] и трансформации «порядок–хаос» [15].

Стохастическая динамика систем с гауссовскими цветными шумами может быть формально описана уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова. Однако аналитическое исследование решений таких уравнений уже для двумерных динамических систем сталкивается с серьезными техническими трудностями. В этих обстоятельствах результативный анализ возможен с использованием асимптотик и аппроксимаций [16]. Для систем с белыми шумами был предложен и разработан конструктивный подход, основанный на технике анализа стохастической чувствительности [17, 18]. Этот метод был применен к исследованию различных стохастических явлений [19–21]. Целью данной работы является распространение аппарата стохастической чувствительности на широкий класс нелинейных динамических систем со случайными возмущениями в форме цветных шумов.

В § 1 проведено исследование стохастической чувствительности равновесия для общей многомерной динамической системы с экспоненциально коррелированным по времени гауссовским нормированным шумом. Стохастическая чувствительность равновесия характеризуется соответствующей матрицей. Для матрицы стохастической чувствительности выведена система матричных уравнений.

В § 2 эти теоретические результаты применяются к изучению воздействия цветного шума на электронный генератор с жестким возбуждением. На основе техники функций стохастической

¹Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 16–08–00388).

чувствительности исследована зависимость дисперсии случайных состояний от характерного времени корреляции. Обсуждается вероятностный механизм вызванной цветным шумом стохастической возбудимости.

§ 1. Стохастическая чувствительность равновесия в нелинейной системе с цветным шумом

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = f(x, r), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор, $f(x, r)$ — достаточно гладкая вектор-функция, $r(t)$ — случайное возмущение, задаваемое некоторым скалярным стохастическим процессом. Предполагается, что невозмущенная система ($r = 0$) имеет экспоненциально устойчивое равновесие \bar{x} : $f(\bar{x}, 0) = 0$.

Цель данной работы — исследовать поведение системы (1) вблизи этого равновесия под воздействием малого цветного шума. Случайные возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$, имеющие интенсивность ε , моделируются следующим стохастическим уравнением:

$$ds = -as dt + \sqrt{2a} dw(t), \quad a > 0. \quad (2)$$

Здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс с параметрами $E(w(t) - w(t')) = 0$, $E(w(t) - w(t'))^2 = |t - t'|$. Система (2) формирует коррелированный цветной шум с параметрами

$$Es(t) = 0, \quad Es(t)s(t') = \exp(-a|t - t'|), \quad \tau = \frac{1}{a}.$$

При этом параметр a задает время корреляции τ этого цветного шума. Тогда дисперсия $E r^2(t) = \varepsilon^2$ случайного возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$ в системе (1) не зависит от параметра a .

Обозначим через $x^\varepsilon(t)$ решение стохастической системы

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon s), \quad (3)$$

возмущенной цветным шумом (2). Для изучения дисперсии решений $x^\varepsilon(t)$ около равновесия \bar{x} при малом цветном шуме будем использовать следующую асимптотику:

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}.$$

Динамика пары $y(t), s(t)$ задается следующей стохастической линейной системой:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Fy + gs, \\ \dot{s} &= -as + \sqrt{2a} \dot{w}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \quad g = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0).$$

Для расширенного $(n + 1)$ -мерного вектора $z = \begin{bmatrix} y \\ s \end{bmatrix}$ справедлива система

$$\dot{z} = \Phi z + c \dot{w}(t), \quad (5)$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} F & g \\ O & -a \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} O \\ \sqrt{2a} \end{bmatrix}$$

и O — нулевой вектор.

Обозначим через $Z = \mathbb{E} z z^\top$ матрицу вторых моментов решений z системы (5). Эта матрица удовлетворяет следующему уравнению Ляпунова:

$$\dot{Z} = \Phi Z + Z \Phi^\top + c c^\top. \quad (6)$$

Отметим, что спектр $\sigma(\Phi)$ матрицы Φ связан со спектром $\sigma(F)$ матрицы F соотношением $\sigma(\Phi) = \sigma(F) \cup \{-a\}$. Благодаря экспоненциальной устойчивости равновесия \bar{x} и положительности параметра a система (6) имеет единственное экспоненциально устойчивое стационарное решение Z , удовлетворяющее матричному уравнению

$$\Phi Z + Z \Phi^\top + c c^\top = 0. \quad (7)$$

Матрица Z имеет следующую структуру:

$$Z = \begin{bmatrix} W & m \\ m & b \end{bmatrix}, \quad W = \mathbb{E} y y^\top, \quad m = \mathbb{E} y s, \quad b = \mathbb{E} s^2,$$

где $z = \begin{bmatrix} y \\ s \end{bmatrix}$ — стационарно распределенное решение системы (5). Отметим, что

$$c c^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}. \quad (8)$$

С учетом (7) и (8) для блоков W , m и b матрицы Z справедлива система

$$\begin{aligned} F W + W F^\top + g m^\top + m g^\top &= 0, \\ F m + b g - a m &= 0, \\ -2ab + 2a &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что

$$b = 1, \quad m = -(F - aI)^{-1} g.$$

Таким образом, матрица W удовлетворяет уравнению

$$F W + W F^\top - g g^\top (F^\top - aI)^{-1} - (F - aI)^{-1} g g^\top = 0. \quad (9)$$

Отметим, что матрица W определяет стохастическую чувствительность равновесия \bar{x} и может быть использована для оценки ковариации стационарно распределенных состояний $x^\varepsilon(t)$ системы (3), (4): $\text{cov}(x^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) \approx \varepsilon^2 W$. Система (9) связывает эту матрицу W с параметрами $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0)$ и $g = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0)$ детерминированной системы и параметром a , характеризующим время корреляции действующего на систему цветного шума.

§ 2. Стохастическая чувствительность нелинейных осцилляторов

Рассмотрим нелинейный осциллятор

$$\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, r), \quad (10)$$

возмущенный скалярным цветным шумом $r(t) = \varepsilon s(t)$. Это уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi(x_1, x_2, \varepsilon s), \\ \dot{s} &= -as + \sqrt{2a}\dot{w}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $a > 0$, а $w(t)$ — стандартный винеровский процесс с параметрами $\mathbb{E}(w(t) - w(t')) = 0$, $\mathbb{E}(w(t) - w(t'))^2 = |t - t'|$.

Пусть \bar{x} — экспоненциально устойчивое равновесие соответствующего детерминированного осциллятора (10) с $\varepsilon = 0$. Для этого равновесия элементы матрицы Якоби

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{x}, 0, 0) & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\bar{x}, 0, 0) \end{bmatrix}$$

должны удовлетворять неравенствам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{x}, 0, 0) < 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\bar{x}, 0, 0) < 0.$$

В детерминированном случае для малых отклонений $y = x - \bar{x}$ можно записать аппроксимацию в форме линейного осциллятора

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\bar{x}, 0, 0), \quad \omega = \sqrt{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\bar{x}, 0, 0)}.$$

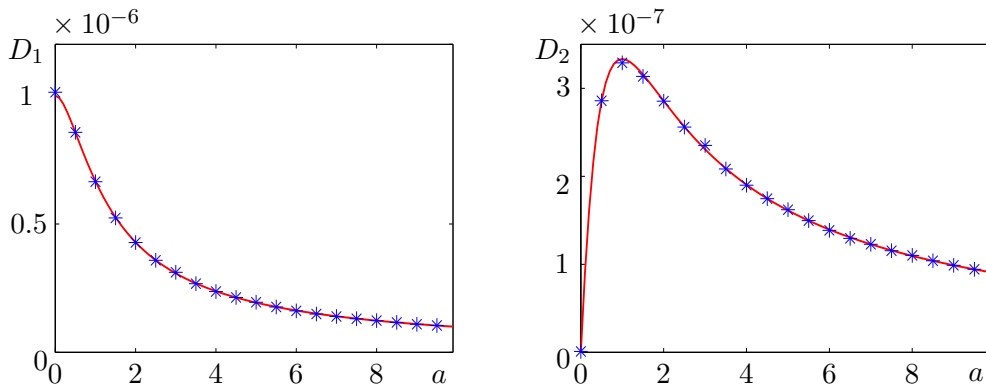


Рис. 1. Дисперсии D_1 и D_2 случайных состояний (звездочки) и их теоретические оценки \bar{D}_1 и \bar{D}_2 (сплошные линии) для $k = 1$, $\varepsilon = 0.001$

Матрица W стохастической чувствительности равновесия \bar{x} нелинейного осциллятора (11) со случайными возмущениями удовлетворяет уравнению (9), где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -k \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}, \quad gg^\top = p^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F - aI = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -\omega^2 & -k - a \end{bmatrix},$$

$$(F - aI)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -k - a & -1 \\ \omega^2 & -a \end{bmatrix}, \quad \Delta = a(a + k) + \omega^2, \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\bar{x}, 0, 0).$$

Для элементов матрицы стохастической чувствительности $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$, с учетом равенства $w_{12} = w_{21}$, можно переписать матричное уравнение (9) в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} 2w_{12} &= 0, \\ -\omega^2 w_{11} - kw_{12} + w_{22} &= -\frac{p^2}{\Delta}, \\ -2\omega^2 w_{12} - 2kw_{22} &= -\frac{2ap^2}{\Delta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Система (12) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{(a+k)p^2}{\omega^2 k(a^2 + ak + \omega^2)}, \\ w_{12} &= w_{21} = 0, \\ w_{22} &= \frac{ap^2}{k(a^2 + ak + \omega^2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, для нелинейного осциллятора (11) матрица стохастической чувствительности равновесия \bar{x} является диагональной. Рассмотрим, как меняются диагональные элементы w_{11} , w_{22} матрицы стохастической чувствительности W при изменении параметра a на интервале $0 < a < \infty$. Когда a стремится к бесконечности, оба элемента стремятся к нулю. Если $\omega \leq k$, то функция $w_{11}(a)$ монотонно убывает и имеет максимум $w_{11}(0) = \frac{p^2}{\omega^4}$. При $\omega > k$, функция $w_{11}(a)$ имеет единственный максимум в точке $a = \omega - k > 0$. Функция $w_{22}(0) = 0$ и имеет единственный максимум в точке $a = \omega$. Эти экстремумы локализуют значения параметра a цветного шума, соответствующие резонансам.

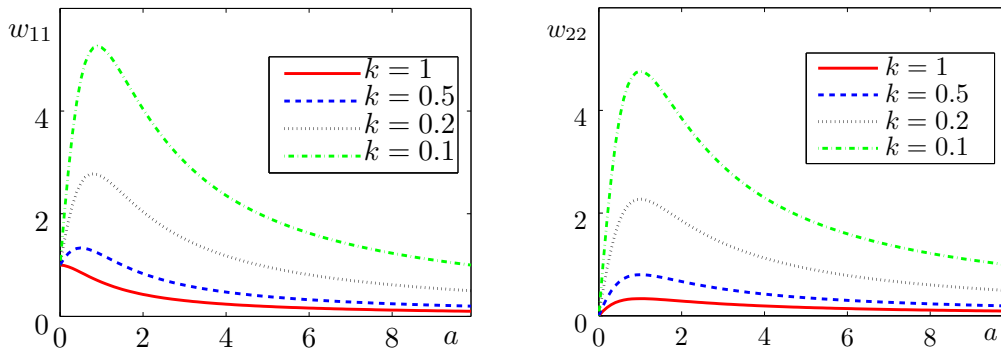


Рис. 2. Стохастическая чувствительность равновесия

§ 3. Стохастический электронный генератор с жестким возбуждением

Рассмотрим систему, моделирующую работу электронного генератора с жестким возбуждением [22] в присутствии цветного шума:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (k - x_1^2 + x_1^4)x_2 + \varepsilon s, \\ \dot{s} &= -as + \sqrt{2a}\xi(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Для $k > 0$ детерминированная система (14) с $\varepsilon = 0$ имеет устойчивое тривиальное равновесие $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. При $k > 0.125$ это равновесие является единственным аттрактором. При $0 < k < 0.125$ система бистабильна и имеет два аттрактора: устойчивое равновесие и устойчивый цикл, разделенные неустойчивым циклом. Значение $k = 0.125$ соответствует седло-узловой бифуркации жесткого рождения цикла.

Диагональная матрица стохастической чувствительности (13) равновесия $(0, 0)$ системы (14) имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{a+k}{k(a^2 + ak + 1)}, \\ w_{22} &= \frac{a}{k(a^2 + ak + 1)}. \end{aligned}$$

Используя эти явные функции, мы можем аппроксимировать дисперсии $D_i = \text{E}x_i^2 \approx \bar{D}_i$, где $\bar{D}_i = \varepsilon^2 w_{ii}$ ($i = 1, 2$). На рис. 1 для $k = 1$, $\varepsilon = 0.001$ сплошными линиями показаны функции $\bar{D}_1(a)$ и $\bar{D}_2(a)$. Значения дисперсий D_1 и D_2 , найденные прямым численным моделированием решений системы (14), изображены звездочками. Как видим, наши теоретические оценки, полученные с помощью техники функции стохастической чувствительности, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Рассмотрим теперь, как стохастическая чувствительность зависит от параметров a и k . На рис. 2 функции $w_{11}(a)$, $w_{22}(a)$ изображены для различных значений параметра k .

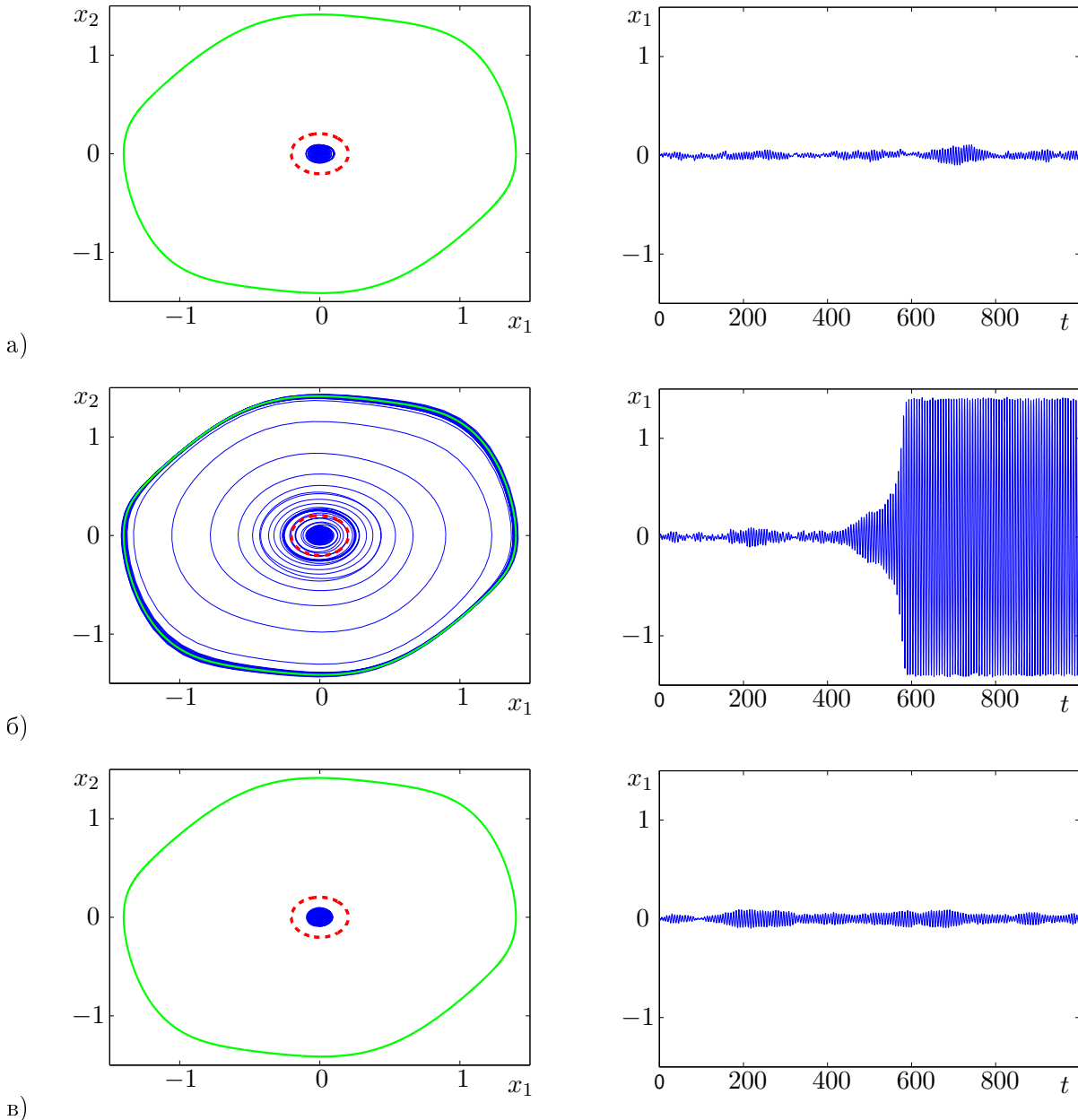


Рис. 3. Стохастические траектории и временные ряды системы (14) при $k = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$: а) для $a = 0.1$; б) для $a = 1$; в) для $a = 10$. Детерминированные устойчивый и неустойчивый циклы изображены сплошной зеленой и пунктирной красной линиями.

Как видно, важной чертой этих графиков является наличие пиков. Функция $w_{11}(a)$ имеет максимум в точке $a_1 = 1 - k$, а функция $w_{22}(a)$ — в точке $a_2 = 1$. Значения a_1 , a_2 определяют параметры цветного шума, для которого координаты системы (14) наиболее чувствительны

к действующим случайным возмущениям. Максимальные значения этих функций равны

$$\max_a w_{11}(a) = \frac{1}{k(2-k)}, \quad \max_a w_{22}(a) = \frac{1}{k(2+k)}.$$

Как видим, при стремлении k к нулю эти максимумы стремятся к бесконечности, что означает неограниченный рост стохастической чувствительности.

Рассмотрим теперь, как цветной шум может резко изменить стохастическую динамику системы вблизи значения $a = 1$, где система наиболее чувствительна. Зафиксируем $k = 0.01$ и сравним отклик системы (14) на цветной шум с тремя разными значениями параметра: $a = 0.1$, $a = 1$ и $a = 10$ для одинаковой интенсивности $\varepsilon = 0.01$. При $k = 0.01$ детерминированная система бистабильна и имеет (см. рис. 3) устойчивое равновесие $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл. Бассейны притяжения этих аттракторов разделены неустойчивым циклом.

При $a = 0.1$ случайные траектории, стартующие из равновесия, располагаются в его бассейне притяжения (см. рис. 3, а). В этом случае решения демонстрируют малоамплитудные стохастические осцилляции. Аналогичное поведение наблюдается и при $a = 10$ (см. рис. 3, в). При $a = 1$, вследствие высокой стохастической чувствительности, случайные траектории выходят из бассейна притяжения равновесия, пересекают сепаратрису и в дальнейшем осциллируют уже в окрестности устойчивого предельного цикла (см. рис. 3, б). Таким образом, при $a = 1$ цветной шум переводит систему из режима малоамплитудных осцилляций в режим стохастических колебаний с большими амплитудами.

Интересно сопоставить эти результаты численного моделирования со значениями стохастической чувствительности. Действительно, при $a = 0.1$ мы имеем $w_{11} = 10.9$, $w_{22} = 9.9$, при $a = 1$ мы имеем $w_{11} = 50.2$, $w_{22} = 49.8$, а при $a = 10$ выполняется $w_{11} = 9.9$, $w_{22} = 9.9$. Как видно, при значении параметра $a = 1$ система (14) имеет высокую стохастическую чувствительность, приводящую к увеличению дисперсии с переходами через сепаратрису. Это в конечном счете вызывает качественные изменения стохастической динамики модели.

Как видим, реакция системы на цветные шумы одной и той же интенсивности существенно зависит от времени корреляции цветного шума. Изменение времени корреляции, приводящее к росту стохастической чувствительности, может не только увеличить дисперсию, но и вызвать качественные изменения режима стохастической динамики. Представленная в работе техника стохастической чувствительности позволяет вести конструктивный параметрический анализ явлений такого рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hänggi P., Jung P. Colored noise in dynamical systems // *Advances in Chemical Physics*. Vol. 89 / I. Prigogine, S.A. Rice. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. DOI: [10.1002/9780470141489.ch4](https://doi.org/10.1002/9780470141489.ch4)
2. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 535 с.
3. Short R., Mandel L., Roy R. Correlation functions of a dye laser: Comparison between theory and experiment // *Physical Review Letters*. 1982. Vol. 49. Issue 9. P. 647–650. DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.647](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.647)
4. Marano S., Edwards B., Ferrari G., Faeh D. Fitting earthquake spectra: colored noise and incomplete data // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2017. Vol. 107. No. 1. P. 276–291. DOI: [10.1785/0120160030](https://doi.org/10.1785/0120160030)
5. Sarkar P. The linear response of a glycolytic oscillator, driven by a multiplicative colored noise // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2016. Vol. 2016. Issue 12. P. 123202. DOI: [10.1088/1742-5468/2016/12/123202](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2016/12/123202)
6. Spanio T., Hidalgo J., Muñoz M.A. Impact of environmental colored noise in single-species population dynamics // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. Issue 4. 042301. DOI: [10.1103/PhysRevE.96.042301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042301)

7. Dong H., He L., Lu H., Li J. A microbial growth kinetics model driven by hybrid stochastic colored noises in the water environment // *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. 2016. Vol. 31. No. 8. P. 2047–2056. DOI: [10.1007/s00477-016-1282-y](https://doi.org/10.1007/s00477-016-1282-y)
8. Guo Q., Sun Z., Xu W. The properties of the anti-tumor model with coupling non-Gaussian noise and Gaussian colored noise // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2016. Vol. 449. P. 43–52. DOI: [10.1016/j.physa.2015.12.102](https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.102)
9. H'walisz L., Jung P., Hänggi P., Talkner P., Schimansky-Geier L. Colored noise driven systems with inertia // *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*. 1989. Vol. 77. Issue 3. P. 471–483. DOI: [10.1007/BF01453798](https://doi.org/10.1007/BF01453798)
10. Анищенко В.С., Нейман А.Б. Динамический хаос и «цветной шум» // Письма в журнал технической физики. 1990. Т. 16. Вып. 7. С. 21–25.
11. Jung P., Neiman A., Afghan M.K.N., Nadkarni S., Ullah G. Thermal activation by power-limited coloured noise // *New Journal of Physics*. 2005. Vol. 7. P. 17. DOI: [10.1088/1367-2630/7/1/017](https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/017)
12. Захарова А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Влияние шума на автогенератор спирального хаоса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14. № 5. С. 44–61.
13. Hänggi P., Jung P., Zerbe C., Moss F. Can colored noise improve stochastic resonance? // *Journal of Statistical Physics*. 1993. Vol. 70. Issue 1–2. P. 25–47. DOI: [10.1007/BF01053952](https://doi.org/10.1007/BF01053952)
14. Xu Y., Gu R., Zhang H., Xu W., Duan J. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing–Van der Pol oscillator with colored noise // *Physical Review E*. 2011. Vol. 83. Issue 5. 056215. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.056215](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.056215)
15. Lei Y., Hua M., Du L. Onset of colored-noise-induced chaos in the generalized Duffing system // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 89. Issue 2. P. 1371–1383. DOI: [10.1007/s11071-017-3522-1](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3522-1)
16. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
17. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh–Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique // *Physical Review E*. 2011. Vol. 83. Issue 6. 061109. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.061109](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.061109)
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise // *Physics Letters A*. 2017. Vol. 381. Issue 37. P. 3203–3210. DOI: [10.1016/j.physleta.2017.08.017](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.017)
19. Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced torus bursting in the stochastic Hindmarsh-Rose neuron model // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. Issue 3. 032212. DOI: [10.1103/PhysRevE.96.032212](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.032212)
20. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity and variability of glycolytic oscillations in the randomly forced Sel'kov model // *The European Physical Journal B*. 2017. Vol. 90. Issue 1. DOI: [10.1140/epjb/e2016-70674-4](https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70674-4)
21. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced shifts in the population model with a weak Allee effect // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. Vol. 491. P. 28–36. DOI: [10.1016/j.physa.2017.08.157](https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.157)
22. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

Поступила в редакцию 02.03.2018

Башкирцева Ирина Адольфовна, доцент, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.
E-mail: irina.bashkirtseva@urfu.ru

I. A. Bashkirtseva

The impact of colored noise on the equilibria of nonlinear dynamic systems

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 133–142 (in Russian).

Keywords: colored noise, correlation time, stochastic sensitivity, electronic generator, stochastic excitability.

MSC2010: 93E03

DOI: [10.20537/vm180201](https://doi.org/10.20537/vm180201)

The influence of colored noise on the equilibrium regimes of nonlinear dynamical systems is investigated. To study the response of the system to small perturbations, we use an asymptotic approach that develops the stochastic sensitivity function technique. The stochastic sensitivity of equilibrium in a general multidimensional dynamical system is defined by some matrix. For this stochastic sensitivity matrix, we obtain a matrix algebraic equation. An exact solution of this equation is given for an important class of nonlinear oscillators with perturbations in the form of colored noises. This theory is applied to the parametric study of the response of the electronic generator with hard excitation to colored noises with various correlation times. The dependence of the dispersion of random states on the characteristic correlation time is investigated. It is shown that this dependence can be nonmonotonic and have maxima corresponding to the resonances. The paper discusses the probabilistic mechanism of the stochastic generation of large-amplitude oscillations caused by color noise.

REFERENCES

1. Hänggi P., Jung P. Colored noise in dynamical systems, *Advances in Chemical Physics*, vol. 89, Eds.: I. Prigogine, S.A. Rice. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.
DOI: [10.1002/9780470141489.ch4](https://doi.org/10.1002/9780470141489.ch4)
2. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Neiman A.B., Strelkova G.I., Shimanskiy–Geier L. *Nelineinye efekty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh* (Nonlinear effects in chaotic and stochastic systems), Izhevsk: Institute of Computer Sciences, 2003, 535 p.
3. Short R., Mandel L., Roy R. Correlation functions of a dye laser: Comparison between theory and experiment, *Physical Review Letters*, 1982, vol. 49, issue 9, pp. 647–650.
DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.647](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.647)
4. Marano S., Edwards B., Ferrari G., Faeh D. Fitting earthquake spectra: colored noise and incomplete data, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2017, vol. 107, no. 1, pp. 276–291.
DOI: [10.1785/0120160030](https://doi.org/10.1785/0120160030)
5. Sarkar P. The linear response of a glycolytic oscillator, driven by a multiplicative colored noise, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2016, vol. 2016, issue 12, pp. 123202.
DOI: [10.1088/1742-5468/2016/12/123202](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2016/12/123202)
6. Spanio T., Hidalgo J., Muñoz M.A. Impact of environmental colored noise in single-species population dynamics, *Physical Review E*, 2017, vol. 96, issue 4, 042301.
DOI: [10.1103/PhysRevE.96.042301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042301)
7. Dong H., He L., Lu H., Li J. A microbial growth kinetics model driven by hybrid stochastic colored noises in the water environment, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2016, vol. 31, no. 8, pp. 2047–2056. DOI: [10.1007/s00477-016-1282-y](https://doi.org/10.1007/s00477-016-1282-y)
8. Guo Q., Sun Z., Xu W. The properties of the anti-tumor model with coupling non-Gaussian noise and Gaussian colored noise, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, vol. 449, pp. 43–52.
DOI: [10.1016/j.physa.2015.12.102](https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.102)
9. H'walisz L., Jung P., Hänggi P., Talkner P., Schimansky–Geier L. Colored noise driven systems with inertia, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 1989, vol. 77, issue 3, pp. 471–483.
DOI: [10.1007/BF01453798](https://doi.org/10.1007/BF01453798)
10. Anishchenko V.S., Neiman A.B. Dynamic chaos and colored noise, *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 1990, vol. 16, issue 7, pp. 21–25 (in Russian).
11. Jung P., Neiman A., Afghan M.K.N., Nadkarni S., Ullah G. Thermal activation by power-limited coloured noise, *New Journal of Physics*, 2005, vol. 7, p. 17. DOI: [10.1088/1367-2630/7/1/017](https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/017)
12. Zakharova A.S., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Influence of noise on chaotic self-sustained oscillations in the regime of spiral attractor, *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika*, 2006, vol. 14, no. 5, pp. 44–61 (in Russian).
13. Hänggi P., Jung P., Zerbe C., Moss F. Can colored noise improve stochastic resonance? *Journal of Statistical Physics*, 1993, vol. 70, issue 1–2, pp. 25–47. DOI: [10.1007/BF01053952](https://doi.org/10.1007/BF01053952)
14. Xu Y., Gu R., Zhang H., Xu W., Duan J. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing–Van der Pol oscillator with colored noise, *Physical Review E*, 2011, vol. 83, issue 5, 056215.
DOI: [10.1103/PhysRevE.83.056215](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.056215)
15. Lei Y., Hua M., Du L. Onset of colored-noise-induced chaos in the generalized Duffing system, *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, issue 2, pp. 1371–1383. DOI: [10.1007/s11071-017-3522-1](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3522-1)
16. Venttsel' A.D., Freidlin M.I. *Fluktuatsii v dinamicheskikh sistemakh pod deistviem malyykh sluchainyykh vozmushchenii* (Fluctuations in dynamic systems under the influence of small random disturbances), Moscow: Nauka, 1979, 424 p.

17. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh–Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique, *Physical Review E*, 2011, vol. 83, issue 6, 061109.
DOI: [10.1103/PhysRevE.83.061109](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.061109)
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise, *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, issue 37, pp. 3203–3210.
DOI: [10.1016/j.physleta.2017.08.017](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.017)
19. Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced torus bursting in the stochastic Hindmarsh-Rose neuron model, *Physical Review E*, 2017, vol. 96, issue 3, 032212. DOI: [10.1103/PhysRevE.96.032212](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.032212)
20. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity and variability of glycolytic oscillations in the randomly forced Sel'kov model, *The European Physical Journal B*, 2017, vol. 90, issue 1.
DOI: [10.1140/epjb/e2016-70674-4](https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70674-4)
21. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced shifts in the population model with a weak Allee effect, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, vol. 491, pp. 28–36.
DOI: [10.1016/j.physa.2017.08.157](https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.08.157)
22. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. *Teoriya kolebaniy* (Theory of oscillations), Moscow: Nauka, 1981, 568 p.

Received 02.03.2018

Bashkirtseva Irina Adol'fovna, Associate Professor, Institute of Natural Science and Mathematics, Ural Federal University, ul. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.
E-mail: irina.bashkirtseva@urfu.ru