МЕХАНИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

УДК 532.582.92, 532.5.013.12, 551.57

© *Л. Х. Ингель*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ОСЕДАНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

При движении тяжелой частицы в вязкой среде сила сопротивления, вообще говоря, зависит от числа Рейнольдса, следовательно, от модуля вектора скорости частицы относительно среды. Это приводит к нелинейному взаимодействию разных составляющих движения. Если оседающая в поле силы тяжести частица имеет и горизонтальную составляющую скорости, то эти две компоненты движения, влияя на число Рейнольдса, вносят вклад в коэффициент гидродинамического сопротивления и тем самым воздействуют друг на друга. Это может иметь значение, например, в приводном слое атмосферы при сильных ветрах, когда, вследствие упомянутого взаимодействия, время пребывания брызг в воздухе зависит, вообще говоря, и от их горизонтального движения. Для конкретного закона сопротивления исследована нелинейная модель взаимодействия двух составляющих движения. Расчеты показывают, что, хотя порядок величины скорости оседания частицы при учете этого взаимодействия не меняется, поправки к скорости могут быть заметными.

Ключевые слова: оседание тяжелой частицы, вязкая среда, сопротивление, взаимодействие с горизонтальным движением, нелинейная аналитическая модель.

DOI: 10.20537/vm170212

Хорошо известна задача об оседании тяжелой частицы в вязкой среде (см., например, [1,2]). Это движение в поле силы тяжести описывается уравнением

$$\frac{dw}{dt} = -g - cw.$$

Здесь t — время, w — вертикальная скорость (вертикальная ось z направлена вверх), g — ускорение свободного падения, c — коэффициент сопротивления. Последний, вообще говоря, может существенно зависеть от числа Рейнольдса. Например, формула Клячко–Мазина

$$c = c_S \left(1 + \frac{1}{6}\,\mathrm{Re}^{2/3}\right) \tag{1}$$

в интервале $3 < \mathrm{Re} < 400$ приводит к силе сопротивления, отличающейся от экспериментальных данных не более, чем на 2 % [1,2]. Для интервала $10^3 < \mathrm{Re} < 3 \cdot 10^5$ рекомендуется формула [1]

$$c = \frac{1}{60}\,\mathrm{Re} \cdot c_S = \frac{3}{20}\frac{\rho}{\rho_p}\frac{|\mathbf{v}|}{R} = \frac{|\mathbf{v}|}{l}. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathrm{Re} = \frac{2R\rho|\mathbf{v}|}{\eta} = \frac{2R|\mathbf{v}|}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Здесь ρ — плотность среды, η, ν — коэффициенты ее динамической и кинематической вязкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы относительно среды, R — радиус частицы (рассматриваются частицы сферической формы)[1], ρ_p — ее плотность; индекс S относится к «стоксовым» частицам

[1]Вместо диаметра частицы $2R$ в выражении для числа Рейнольдса можно, разумеется, использовать радиус. Поэтому, например, в [1,2] значения чисел Рейнольдса при прочих равных условиях различаются в два раза.

(частицам малой массы, для которых значения числа Рейнольдса малы и справедлив линейный закон сопротивления $c_S = 9\eta/2R^2\rho_p$; масштаб длины —

$$l = \frac{20}{3}\frac{\rho_p}{\rho}R.$$

Например, в воздухе для капель воды радиусом 0,5 мм $l \approx 3$ м.

Зависимость коэффициента сопротивления от скорости частицы делает задачу нелинейной, но одномерная задача хорошо исследована. Потребности в нетривиальных обобщениях возникают в случаях, когда скорость частицы имеет и горизонтальную составляющую, например при оседании частицы в сдвиговом потоке [3, 4]. Еще сложнее ситуация, когда частица движется в интенсивном вихре, так что необходим учет центробежных сил [5].

При наличии горизонтальной составляющей движения частицы на фоне покоящейся среды система уравнений имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = -g - c(|\mathbf{v}|)w, \tag{3}$$

$$\frac{du}{dt} = -c(|\mathbf{v}|)u, \quad |\mathbf{v}| = \left(u^2 + w^2\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где u — горизонтальная составляющая скорости частицы. Вследствие зависимости коэффициента сопротивления от модуля скорости (то есть от обеих составляющих скорости) эти составляющие оказываются связанными между собой. Например, с увеличением скорости движения частицы по горизонтали увеличивается значение коэффициента сопротивления и, следовательно, уменьшается скорость оседания. Это может иметь значение в некоторых геофизических приложениях. Например, в приводном слое воздуха над морем при ураганных ветрах горизонтальная скорость среды и ее сдвиги у поверхности воды велики. В таких ситуациях генерируется много брызг, которые вносят важный вклад в обмен теплом, влагой и количеством движения у поверхности. При этом важна продолжительность пребывания брызг в воздухе, то есть существенна скорость их оседания, а она, как видно из системы (3), (4), зависит и от их горизонтального движения относительно среды.

Ниже для определенности ограничиваемся начальными условиями $u_0 \geqslant 0$, $w_0 \leqslant 0$. Наиболее прост для анализа предельный случай $u_0 \ll |w_0|$. С течением времени неравенство $u \ll |w|$ лишь усиливается, поскольку оседание может лишь ускоряться, а горизонтальное движение — замедляться. Поэтому $|\mathbf{v}| \approx |w|$, и уравнение (3) можно исследовать независимо от (4). Легко находится решение в квадратурах:

$$t = -\int_{w_0}^{w} \frac{dw'}{g + c(|w'|)w'}, \quad u = u_0 \exp\left[-\int_0^t c(|w(t')|dt')\right]. \tag{5}$$

В случае конкретного закона сопротивления (2) систему (3), (4) удобно рассматривать в безразмерном виде, вводя масштабы скорости и времени $V_* = (gl)^{1/2}$, $t_* = (l/g)^{1/2}$:

$$u = UV_*, \quad w = WV_*, \quad t = \tau t_*;$$
$$\frac{dW}{d\tau} = -1 - W\sqrt{U^2 + W^2},$$
$$\frac{dU}{d\tau} = -U\sqrt{U^2 + W^2}.$$

Нетрудно видеть, что при любых начальных условиях $U = U_0$, $W = W_0$ решения стремятся к единственному стационарному решению $U = 0$, $W = -1$, которому отвечает оседание частицы со скоростью $w = -V_*$. Но представляет определенный интерес фактор времени — процесс выхода на стационарный режим, зависящий от нелинейного взаимодействия двух составляющих движения посредством их влияния на коэффициент сопротивления.

Вернемся к предельному случаю $u_0 \ll |w_0|$, $U_0 \ll |W_0|$ (предполагается $W_0 \leqslant 0$). Решение (5) в этом случае можно представить в явном виде:

$$w \approx -V_* \frac{1 - a\exp(-2\tau)}{1 + a\exp(-2\tau)}, \quad u = u_0(1+a)\frac{\exp(-\tau)}{1 + a\exp(-2\tau)},$$
$$c \approx \frac{|w|}{l} \approx t_*^{-1}\frac{1 - a\exp(-2\tau)}{1 + a\exp(-2\tau)}, \quad 0 \leqslant a \equiv \frac{1 + W_0}{1 - W_0} \leqslant 1.$$

Для приложений представляет интерес и горизонтальное перемещение частицы. В данном случае оно выражается соотношением

$$\Delta x = \int_0^t u dt = \frac{1+a}{\sqrt{a}} u_0 t_* \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a}(1 - \exp(-\tau))}{1 + a\exp(-\tau)}.$$

Вертикальная скорость выходит на стационарный режим за время порядка t_*; примерно за такое же время затухает горизонтальное движение; частица успевает переместиться по горизонтали на расстояние порядка $u_0 t_* \ll l$.

Остановимся теперь на противоположном предельном случае $u_0 \gg |w_0|$. Такое соотношение между двумя составляющими скорости будет сохраняться в течение некоторого времени, пока горизонтальное движение не затухнет до той степени, что станет сравнимым по амплитуде с вертикальным. В этом случае $|\mathbf{v}| \approx u$, и уравнение (4) практически не зависит от (3). Приближенное решение системы (3), (4) имеет вид

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{du'}{c(|u'|)u'},$$
$$w = \exp\left[-\int_0^t c(|u(t')|dt')\right]\left\{w_0 - g\int_0^t \exp\left[-\int_0^{t'} c(|w(t'')|dt'')\right]dt'\right\}.$$

Для конкретного закона сопротивления (2)

$$u = \frac{u_0}{1 + (u_0/l)t}, \quad w = \frac{w_0}{1 + (u_0/l)t} - gt\frac{1 + (u_0/2l)t}{1 + (u_0/l)t}.$$

Горизонтальное перемещение частицы выражается так:

$$\Delta x = l \ln\left(1 + \frac{u_0}{l}t\right).$$

Интересно отметить, что это перемещение слабо зависит от начальной скорости u_0, поскольку с ростом скорости увеличивается и коэффициент сопротивления. Это позволяет сделать довольно общий вывод: горизонтальное перемещение частицы практически при любых начальных скоростях не превышает по порядку величины l.

Условия применимости асимптотики $u \gg |w|$ зависят от соотношения u_0 и $V_* \equiv (gl)^{1/2}$. Видно, что даже при $u_0 \gg V_*$ неучтенный в этом пределе вклад w в коэффициент сопротивления становится существенным уже за время порядка $t_* = (l/g)^{1/2}$. Таким образом, при законе сопротивления (2) горизонтальное движение частицы вносит решающий вклад в коэффициент сопротивления лишь в течение интервалов времени не более t_*. Это совпадает по порядку величины со временем выхода вертикального движения на стационарный режим $w = -V_*$. Следовательно, наличие горизонтальной составляющей движения не может изменить порядок величины времени «разгона» оседания. Но в пределах времени порядка t_* горизонтальное движение может заметно влиять на скорость оседания. Это видно и из примеров численного решения, приведенных на рис. 1. Полное пространственное «запаздывание» вертикального движения частицы не может превышать по порядку величины $V_* t_* = l$.

При оседании частицы в потоке с вертикальным сдвигом выражение для модуля скорости частицы относительно среды усложняется:

$$|\mathbf{v}| = \left\{[u - \overline{u}(z(t))]^2 + w^2\right\}^{1/2}.$$

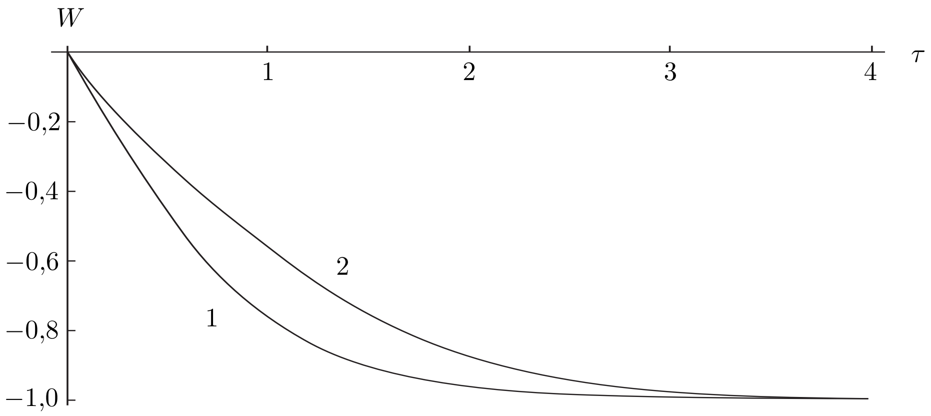

Рис. 1. Зависимость скорости оседания частицы от времени при $w_0 = 0$, $U_0 = 0$ (кривая 1), $U_0 = 3$ (кривая 2)

Здесь $\overline{u}$ — скорость фонового течения, z в данном контексте — это лагранжева вертикальная координата частицы. Последняя является неизвестной функцией времени, так что задача существенно усложняется. Тем не менее при постоянном сдвиге скорости течения удается найти точное решение для установившегося оседания частицы [4]. Для закона сопротивления (2) критерием значимости нелинейного взаимодействия двух составляющих движения оказываются большие (порядка единицы и больше) значения безразмерного параметра

$$\frac{20}{3}\frac{R}{g}\frac{\rho_p}{\rho}\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2.$$

Для закона сопротивления (1) соответствующий безразмерный критерий имеет вид

$$\frac{R^4}{g^2\nu}\left(\frac{\rho_p}{\rho}\right)^3(d\overline{u}/dz)^5.$$

Приведенный в [4] численный пример свидетельствует о возможности замедления скорости оседания на 20–30 %; это близко к результатам, представленным выше на рис. 1.

В литературе по физике атмосферы распространено мнение, что во всех реальных ситуациях можно не учитывать влияние горизонтальных движений на скорость оседания тяжелой частицы (см., например, [3, с. 198]). Приведенные выше результаты показывают, что при достаточно больших горизонтальных скоростях движения частицы относительно среды, возможных, например, в приповерхностном слое атмосферы, вообще говоря, не исключены заметные отклонения от установившегося режима оседания в покоящейся среде, хотя порядки скорости оседания действительно не меняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волощук В.М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 208 с.
2. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 751 с.
3. Khain A.P., Pinsky M.B. Drop inertia and its contribution to turbulent coalescence in convective clouds. Part I: drop fall in the flow with random horizontal velocity // Journal of the Atmospheric Sciences. 1995. Vol. 52. No. 2. P. 196–206. DOI: 10.1175/1520-0469(1995)052<0196:DIAICT>2.0.CO;2
4. Ингель Л.Х. Нелинейное взаимодействие двух составляющих движения при осаждении тяжелой частицы в сдвиговом течении // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. Вып. 11. С. 122–125.
5. Ингель Л.Х. О движении тяжелых частиц в смерче // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40. № 6. С. 865–868.

Поступила в редакцию 27.03.2017

Ингель Лев Ханаанович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Научно-производственное объединение «Тайфун», 249038, Россия, г. Обнинск, ул. Победы, 4;
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, 119017, Россия, Москва, Пыжевский пер., 3.
E-mail: lev.ingel@gmail.com

L. Kh. Ingel'

Interaction of two components of the movement under settling of the heavy particle in a viscous medium

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 292–296 (in Russian).

Keywords: sedimentation of heavy particles, viscous medium, resistance, interaction with a horizontal movement, nonlinear analytical model.

MSC2010: 34A05, 34A34

DOI: 10.20537/vm170212

When a heavy particle moves in a viscous medium, the resistance force depends on the Reynolds number, therefore, on the modulus of the particle velocity vector in relation to medium. This leads to nonlinear interaction of different components of movement. If a particle settling in gravity field has also a horizontal velocity component, these two components of the movement, affecting the Reynolds number, contribute into the coefficient of hydrodynamic resistance and, thereby, affect each other. This can be important, for example, in the surface layer of the atmosphere over water under strong winds, when, due to the mentioned interaction, the stay time of spray in the air depends on a horizontal movement. For the specific resistance law, a nonlinear model of interaction between the two components of movement is studied. Calculations show that although the order of magnitude of the particle settling velocity accounting this interaction does not change, the velocity corrections can be noticeable.

REFERENCES

1. Voloshchuk V.M. *Vvedenie v gidrodinamiku grubodispersnykh aerozolei* (Introduction to the hydrodynamics of coarse aerosols), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1971, 208 p.
2. Matveev L.T. *Kurs obshchei meteorologii. Fizika atmosphery* (The course of general meteorology. Physics of atmosphere), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1984, 751 p.
3. Khain A.P., Pinsky M.B. Drop inertia and its contribution to turbulent coalescence in convective clouds. Part I: drop fall in the flow with random horizontal velocity, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1995, vol. 52, no. 2, pp. 196–206. DOI: 10.1175/1520-0469(1995)052<0196:DIAICT>2.0.CO;2
4. Ingel' L.Kh. Nonlinear interaction between two components of motion upon precipitation of a heavy particle in a shear flow, *Technical Physics*, 2012, vol. 57, issue 11, pp. 1585–1588. DOI: 10.1134/S1063784212110126
5. Ingel' L.Kh. On the motion of heavy particles in a tornado, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2004, vol. 40, issue 6, pp. 765–768.

Received 27.03.2017

Ingel' Lev Khanaanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Research and Production Association "Typhoon", ul. Pobedy, 4, Obninsk, 249038, Russia;
Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per., 3, Moscow, 119017, Russia.
E-mail: lev.ingel@gmail.com