

УДК 517.518

© А. В. Чернов

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСПОНЕНТ  
С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ  
ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ<sup>1</sup>**

Изучаются возможности аппроксимации произвольной кусочно-непрерывной функции на конечном отрезке линейной комбинацией  $\mu$  функций Гаусса с целью дальнейшего их использования для аппроксимации управлений в сосредоточенных задачах оптимального управления. Напомним, что функция Гаусса (квадратичная экспонента) — это функция вида  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ . В отличие от исследований, проводившихся ранее другими авторами, рассматривается случай, когда параметры функций Гаусса (так же как и коэффициенты линейной комбинации) являются варьируемыми и подбираются, в частности, путем минимизации отклонения аппроксимации от аппроксимируемой функции либо (в том случае, когда речь идет об аппроксимации задачи оптимального управления) путем минимизации целевого функционала. Этот подход позволяет аппроксимировать задачи оптимального управления сосредоточенными системами конечномерными задачами математического программирования сравнительно небольшой размерности (в отличие от кусочно-постоянной или кусочно-линейной аппроксимации на фиксированной сетке с малым шагом, как это обычно делается). Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность изучаемого подхода.

*Ключевые слова:* техника параметризации управления, сосредоточенная задача оптимального управления, аппроксимация квадратичными экспонентами, функция Гаусса.

DOI: [10.20537/vm170210](https://doi.org/10.20537/vm170210)**Введение**

При дискретизации задач оптимального управления традиционно используется кусочно-постоянная или кусочно-линейная аппроксимация управляющей функции (см., например, [1, гл. XV, § 2]). В частности, в рамках техники параметризации управления [2–7] за счет предположения об однозначной разрешимости управляемой системы для каждого допустимого управления функционалы задачи сводятся к функциям конечного числа переменных — параметров интерполяции управляющей функции. Для того, чтобы такой подход не приводил к значительному искажению искомого решения задачи оптимизации, сетка дробления области независимых переменных должна быть достаточно мелкой. В результате размерность конечномерной задачи математического программирования, аппроксимирующей исходную задачу оптимального управления, оказывается весьма высока, что существенно затрудняет ее численное решение. Некоторого снижения размерности аппроксимирующей задачи удается добиться путем использования подвижной (управляемой) сетки, когда параметры, характеризующие локализацию узлов сетки, тоже выступают в качестве параметров оптимизации (см., например, [2, 8–10]). Однако и здесь в случае редкой сетки аппроксимация оказывается достаточно грубой, а в случае мелкой сетки размерность аппроксимирующей задачи — все еще высокой. Поэтому возникает проблема выбора такого класса  $\mathcal{E}$  функций, аппроксимирующих (интерполирующих) неизвестное управление, который, с одной стороны, обеспечивал бы высококачественную аппроксимацию для управляющих функций из достаточно обширного множества, а с другой

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и гранта (соглашение от 27.08.13 № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

стороны, позволял бы обходиться сетками со сравнительно небольшим количеством узлов. Если же, в дополнение к этим двум требованиям, указанный класс позволил бы программировать те или иные полезные свойства управляющих функций (например, отсутствие быстрых осцилляций, разрушающих соответствующее техническое устройство, устойчивость приближенного решения оптимизационной задачи к искажению входных параметров — помехоустойчивость, выполнение ограничений на количество и/или расположение локальных экстремумов, точек переключения и т. п.), то с практической (прикладной) точки зрения это было бы еще одним очень полезным преимуществом такого подхода. Основная цель данной статьи — показать, что (в плане применения к аппроксимации сосредоточенных управляемых систем) всем перечисленным требованиям достаточно хорошо удовлетворяет класс линейных комбинаций так называемых квадратичных экспонент (известных из теории вероятностей как функции Гаусса).

Напомним, что функция Гаусса — это функция вида  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ . В теории вероятностей она возникает как функция нормального распределения с параметрами  $(m, \sigma)$ , где  $m \in \mathbb{R}$  — это математическое ожидание соответствующей случайной величины, а  $\sigma > 0$  — ее среднеквадратичное отклонение. Очевидно, что график функции Гаусса напоминает своего рода «сглаженный» импульс с основанием радиуса  $\sigma > 0$ , локализованный в окрестности точки  $x = m$ . Тем самым графиком линейной комбинации таких импульсов, локализованных на некоторой сетке, можно модулировать произвольный непрерывный сигнал конечной продолжительности (а характер сглаженности этого графика можно регулировать путем подбора среднеквадратичных отклонений). Далее это интуитивное предположение будет строго доказано. Кроме того, очевидно, что в случае, когда сетка является подвижной (то есть подвижны узлы интерполяции), а дисперсии (иначе говоря, среднеквадратичные отклонения) могут варьироваться независимо друг от друга, возможности интерполяции повышаются, вследствие чего количество слагаемых в упомянутой выше линейной комбинации можно существенно сокращать. Указанные обстоятельства позволяют надеяться на то, что при использовании описанного способа интерполяции в отношении неизвестной управляющей функции (в рамках техники параметризации управления) в задачах оптимального управления сосредоточенными системами можно аппроксимировать такие задачи конечномерными задачами математического программирования сравнительно небольшой размерности (в отличие от кусочно-постоянной или кусочно-линейной аппроксимации на фиксированной сетке с малым шагом, как это обычно делается). Важным преимуществом использования линейной комбинации функций Гаусса является то, что при естественных требованиях к входным параметрам задачи (и в случае однозначной разрешимости управляемой системы при каждом допустимом управлении, как это предполагается в рамках техники параметризации управления) функционалы аппроксимирующей задачи математического программирования оказываются гладкими. При использовании кусочно-постоянной аппроксимации с подвижными узлами для обеспечения такой гладкости приходится требовать линейности (аффинности) правой части управляемой системы по управляющим переменным (см. [9]).

Перейдем к более конкретным формулировкам. Класс аппроксимирующих функций, с которым мы будем работать — это

$$\mathcal{E} = \left\{ \Phi = \Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma] \in C^\infty[a; b] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}, \nu \in \mathbb{N} \right\},$$

где

$$\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma](x) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x), \quad \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp\left[-\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2}\right], \quad (0.1)$$

$\varepsilon > 0$  — некоторое достаточно малое число (нужное для того только, чтобы избежать нуля в знаменателе). В соответствии с заявленной целью прежде всего выясним, насколько хорошо можно аппроксимировать произвольную функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $[a; b]$ , функцией класса  $\mathcal{E}$  и как именно это можно сделать по возможности наилучшим образом. Стратегия исследований, которую мы собираемся использовать, будет состоять из следующих шагов.

1. Установление возможности дискретно точной интерполяции на заданной сетке. Имеется в виду возможность отыскания набора параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ , позволяющих по значениям функции  $f(x)$  в заданных точках  $x_i, i = \overline{1, n}$ , удовлетворить условию

$$\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma](x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (0.2)$$

Сначала будем рассматривать равномерную сетку, потом — неравномерную, сделав упор на случае выбора  $\beta_j = x_j, j = \overline{1, \nu}, \nu = n$ . Дискретно точная аппроксимация понимается нами не как самоцель, а лишь как первичная (начальная) аппроксимация.

2. Исследование возможности уточнения начальной аппроксимации без увеличения числа  $\nu$  по значениям функции  $f(x)$  на сколь угодно плотной сетке  $z_i, i = \overline{1, m}$ , с числом узлов  $m > n$ . При этом подразумевается, что уточнение производится в два этапа. На первом этапе при заданных параметрах  $\beta$  мы выявляем своего рода верхнюю границу таких значений параметров  $\gamma_j > 0, j = \overline{1, \nu}$ , для которых система (0.2) разрешима относительно параметров  $\alpha_j, j = \overline{1, \nu}$ . Эта верхняя граница важна в связи с тем, что чем больше значения параметров  $\gamma_j, j = \overline{1, \nu}$ , тем меньше амплитуда колебаний функции  $\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma]$  и тем более сплаженным является ее график. Это понятно уже из того, что  $\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) \rightarrow 1$  при  $\gamma_j \rightarrow +\infty$ , причем скорость этого стремления достаточно высока. Если же  $\gamma_j \rightarrow +0$ , то поведение функции  $\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x)$  начинает все больше напоминать поведение гладкого аналога  $\delta$ -функции, сосредоточенной в точке  $\beta_j$ , что, в свою очередь, резко повышает амплитуду колебаний функции  $\Phi_\nu[\alpha, \beta, \gamma]$ . Разумеется, эти рассуждения имеют несколько интуитивный оттенок, но они подтверждаются результатами численных экспериментов. С другой стороны, при отсутствии дополнительной информации о поведении функции  $f(x)$  вне узлов сетки более вероятным будет предположить, что это поведение не является каким-то экстраординарным. Исходя из этого, наиболее естественно аппроксимировать график этой функции на участке между двумя узлами первичной сетки по возможности менее криволинейным участком (более близким к прямолинейному). Тем самым выбор в качестве значений параметров  $\gamma_j$  указанных верхних границ позволяет в большинстве случаев получать уже достаточно удовлетворительную аппроксимацию. Понятно, что аппроксимацию, полученную таким образом, можно, вообще говоря, существенно улучшить, минимизируя сумму квадратов отклонений

$$W[\alpha, \beta, \gamma] = \sum_{i=1}^m \left\{ \Phi[\alpha, \beta, \gamma](z_i) - f(z_i) \right\}^2$$

за счет варьирования параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  (в совокупности или по отдельности) при фиксированном выборе параметров  $\beta$  либо за счет варьирования всей тройки  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}$ . Это и будет второй этап.

3. Численные эксперименты по реализации алгоритма, описанного в пункте 2. В частности, решение задачи оптимизации

$$W[\alpha, \beta, \gamma] = \sum_{i=1}^m \left\{ \Phi[\alpha, \beta, \gamma](z_i) - f(z_i) \right\}^2 \rightarrow \min_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu}}. \quad (0.3)$$

Отметим, что (0.3) — частный случай так называемой *нелинейной задачи наименьших квадратов*. Наиболее эффективным подходом к ее численному решению является использование методов Левенберга–Марквардта и Гаусса–Ньютона. Именно ими мы и пользуемся.

Следует сказать несколько слов об использовании интерполяции с помощью квадратичных экспонент в теории обработки сигналов. До сих пор (другими авторами) исследовалась

проблема аппроксимации функции  $f(x)$  на всей числовой оси с помощью интерполяций вида

$$f(x) \approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x), \quad \beta_j = j, \quad \gamma_j = \sigma > 0, \quad \varepsilon = 0 \quad (0.4)$$

(см., например, [11–14]). Там же указывалось, что необходимость разложения функций по ортогональным системам, в том числе по системе квадратичных экспонент, возникает в различных разделах математики и ее приложений, в частности при изучении электрических или оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, при моделировании различных автоматических систем или оптимизации их отдельных частей. Доказывалось (см., например, [13, 14]), что произвольную функцию, заданную на всей числовой оси, можно сколь угодно точно (по контрольным целочисленным точкам) аппроксимировать конечной суммой указанного ряда.

### § 1. Случай равномерной первичной сетки

Рассмотрим случай, когда контрольные точки распределены равномерно по всему отрезку:  $x_i = x_{i-1} + h$ ,  $i = \overline{2, n}$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ . Примем

$$\beta_j = x_j, \quad \gamma_j^2 = \gamma^2 - \varepsilon, \quad j = \overline{1, n},$$

и будем рассматривать аппроксимацию вида

$$f(x) \approx \Phi[\alpha, \beta, \gamma](x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x). \quad (1.1)$$

Покажем, что задача выбора коэффициентов линейной комбинации  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , из условий

$$\Phi[\alpha, \beta, \gamma](x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

однозначно разрешима.

**Теорема 1.** Пусть числа  $\gamma > 0$ ,  $\varepsilon \in [0; \gamma^2)$  произвольно фиксированы;  $\gamma_j = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon}$ ,  $\beta_j = x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Тогда для функций

$$\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp \left[ -\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right] = \exp \left[ -\frac{(x - x_j)^2}{\gamma^2} \right], \quad j = \overline{1, n},$$

имеем  $\det [\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i)]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$ . Тем самым система (1.2) однозначно разрешима, то есть задача интерполяции функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  по данным контрольным точкам имеет дискретно точное решение.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** Для любых чисел  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$  справедлива формула

$$V(q_1, \dots, q_n) = \det (q_i^{j-1})_{i,j=\overline{1,m}} = \prod_{i>j} (q_i - q_j)$$

(это так называемый определитель Вандермонда).

Доказательство см., например, в [15, теорема 1.1.5.1].

**Лемма 2.** Пусть  $q_i = \sigma^{1-i}$ ,  $i = \overline{1, m+1}$ , где  $\sigma \neq 0$  — произвольное число. Тогда

$$V(q_1, \dots, q_{m+1}) = \sigma^{-\xi_m} (1 - \sigma)^m (1 - \sigma^2)^{m-1} \dots (1 - \sigma^m)^1,$$

$$\xi_m = 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

**Доказательство.** Прежде всего, вспомним следующие хорошо известные формулы [16, § 1.2, с. 23, (1.5); § 2.5, с. 61, (2.38)]:

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \quad (1.3)$$

Непосредственно по лемме 1 получаем

$$V = \prod_{i>j} (\sigma^{1-i} - \sigma^{1-j}) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=j+1}^{m+1} \sigma^{1-j} [\sigma^{j-i} - 1]. \quad (1.4)$$

Последовательно выпишем множители, участвующие во внешнем произведении (1.4):

$$\begin{aligned} j = 1: & \quad (\sigma^0)^m (\sigma^{-1} - 1) (\sigma^{-2} - 1) \dots (\sigma^{-m} - 1), \\ j = 2: & \quad (\sigma^{-1})^{m-1} (\sigma^{-1} - 1) (\sigma^{-2} - 1) \dots (\sigma^{-(m-1)} - 1), \\ & \quad \dots \\ j = m: & \quad (\sigma^{-(m-1)})^1 (\sigma^{-1} - 1). \end{aligned}$$

Отсюда понятно, что

$$\begin{aligned} V &= \sigma^{-\eta_{m-1}} (\sigma^{-1} - 1)^m (\sigma^{-2} - 1)^{m-1} \dots (\sigma^{-m} - 1)^1 = \\ &= \sigma^{-(\eta_{m-1} + \eta_m)} (1 - \sigma)^m (1 - \sigma^2)^{m-1} \dots (1 - \sigma^m)^1, \end{aligned}$$

где  $\eta_m = 1 \cdot m + 2 \cdot (m-1) + \dots + m \cdot 1$ . Перегруппируем слагаемые:

$$\eta_m = (m+1)(1 + \dots + m) - (1^2 + \dots + m^2).$$

Пользуясь формулами (1.3), получаем

$$\eta_m = \frac{m(m+1)^2}{2} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

Следовательно,

$$\eta_{m-1} + \eta_m = \frac{(m-1)m(m+1)}{6} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} = \xi_m.$$

□

**Лемма 3.** Для любых чисел  $q \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  справедлива формула<sup>2</sup>

$$\Delta_m(q) = \det (q^{(i-j)^2})_{i,j=\overline{1,m+1}} = (1 - \sigma)^m (1 - \sigma^2)^{m-1} \dots (1 - \sigma^m)^1,$$

где где  $\sigma = q^2$ , а выражение  $q^0$  понимается как 1 в том числе и при  $q = 0$ .

**Доказательство.** Для  $q = 0$  утверждение очевидно. Будем предполагать, что  $q \neq 0$ . Вынесем из каждой  $i$ -й строки общий множитель  $q^{(i-1)^2}$ , а из каждого  $j$ -го столбца — общий множитель  $q^{(j-1)^2}$ . Тогда получим

$$\Delta_m(q) = q^{2(1^2 + \dots + m^2)} \det (q^{(i-j)^2 - (i-1)^2 - (j-1)^2})_{i,j=\overline{1,m+1}}.$$

Рассмотрим

$$(i-j)^2 - (i-1)^2 - (j-1)^2 = -2ij + 2i + 2j - 2 = 2(j-1)(1-i).$$

<sup>2</sup>Для подстраховки мы также произвели численные расчеты в системе MatLab при различном выборе параметров  $q$  и  $m$ , которые подтвердили результат аналитических вычислений.

Обозначим  $\sigma = q^2 \neq 0$ . Тогда

$$\Delta_m(q) = \sigma^{\eta_m} \det (\sigma^{(1-i)(j-1)})_{i,j=\overline{1,m+1}} = \sigma^{\eta_m} V(q_1, \dots, q_{m+1}),$$

где  $q_i = \sigma^{1-i}$ ,  $\eta_m = 1^2 + \dots + m^2$ . После этого остается лишь сослаться на лемму 2.  $\square$

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что

$$\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i) = \exp \left[ -\frac{(x_1 + (i-1)h - x_1 - (j-1)h)^2}{\gamma^2} \right] = q^{(i-j)^2},$$

где принято обозначение  $q = \exp \left[ -\frac{h^2}{\gamma^2} \right]$ . Таким образом, систему уравнений (1.2) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j q^{(i-j)^2} = f(x_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

Выпишем определитель системы (1.5):  $\Delta = \det (q^{(i-j)^2})_{i,j=\overline{1,n}} = \Delta_m(q)$ ,  $m = n - 1$ . Пользуясь леммой 3, находим

$$\Delta = (1 - \sigma)^m (1 - \sigma^2)^{m-1} \dots (1 - \sigma^m)^1, \quad \sigma = q^2, \quad m = n - 1. \quad (1.6)$$

Поскольку  $q \in (0; 1)$ , то непосредственно из формулы (1.6) видно, что  $\Delta \neq 0$ . Отсюда сразу следует однозначная разрешимость системы (1.5).  $\square$

**Замечание 1.** Как видно из формулы (1.6), в случае когда число  $q = \exp \left[ -\frac{h^2}{\gamma^2} \right]$  близко к единице, определитель системы (1.2) будет близок к нулю, а стало быть, матрица системы будет плохо обусловлена. Поэтому при практическом применении теоремы 1, в случае когда шаг сетки  $h$  задан, параметр  $\gamma^2 = \max_{j=\overline{1,n}} [\gamma_j^2 + \varepsilon]$  не следует брать чрезмерно большим. Как показывают численные эксперименты, выбор  $\gamma = h$  оказывается достаточно удачным. С другой стороны, как будет показано в следующем параграфе, при достаточной малости параметра  $\gamma^2$  и выборе контрольных точек в качестве параметров  $\beta_j$  разрешимость системы относительно параметров  $\alpha_j$  можно обеспечить и на произвольной (не обязательно равномерной) сетке.

## § 2. Случай произвольной первичной сетки

Теперь будем предполагать, что контрольные точки

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

выбраны произвольно,  $\nu = n$ . Обозначим  $h = \min_{i,j=\overline{1,n}, i \neq j} |x_i - x_j|$ . Докажем, что справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть число  $\gamma > 0$  таково, что  $\exp \left[ -\frac{h^2}{\gamma^2} \right] < \frac{1}{n-1}$ , и, кроме того,  $\beta_j = x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Тогда для всех параметров  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\gamma_j > 0$ , удовлетворяющих условию  $\gamma_j^2 + \varepsilon \leq \gamma^2$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и для функций

$$\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp \left[ -\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right], \quad j = \overline{1, n},$$

имеем  $\det [\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i)]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$ . Тем самым система

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{1, n},$$

имеет единственное решение  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , то есть задача интерполяции функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  по данным контрольным точкам имеет дискретно точное решение.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма о диагональном преобладании [17, § 45.1]. (Отметим, что доказательство самой этой леммы достаточно прозрачное и короткое.)

**Определение 1.** Пусть  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$  — квадратная матрица. Тогда, если  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ,  $i = \overline{1,n}$ , говорят, что  $A$  — матрица с диагональным преобладанием по строкам. Если же  $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ ,  $j = \overline{1,n}$ , то  $A$  называется матрицей с диагональным преобладанием по столбцам.

**Лемма 4.** Любая матрица с диагональным преобладанием по строкам или по столбцам является невырожденной.

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$a_{ij} = \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i) = \exp \left[ -\frac{(x_i - x_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right], \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Ясно, что  $a_{ii} = 1$ ,  $i = \overline{1,n}$ . При этом для всех  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1,n}$ , имеем

$$0 < a_{ij} = \exp \left[ -\frac{(x_i - x_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right] \leq \exp \left[ -\frac{h^2}{\gamma_j^2} \right],$$

и согласно условиям теоремы  $a_{ij} < \frac{1}{n-1}$ . Таким образом,

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} 1 = \frac{n-1}{n-1} = 1 = a_{ii}, \quad i = \overline{1,n},$$

то есть  $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$  — матрица с диагональным преобладанием по строкам (понятно, что и по столбцам тоже). Тогда согласно лемме 4  $\det A \neq 0$ .  $\square$

**Замечание 2.** В утверждениях теорем 1 и 2 требования к выбору параметров  $\beta_j$  и  $\gamma_j$  достаточно жесткие. А самое главное неудобство состоит в том, что параметры  $\gamma_j$  в теореме 2 должны быть ограничены сверху некоторой величиной, которая может (при больших  $n$ ) оказаться малой. Как уже было отмечено во введении, это может привести к большому значению амплитуды колебаний аппроксимирующей функции. Следующее утверждение показывает, что на самом деле при  $\nu$ , равном количеству контрольных точек, возможен достаточно большой произвол в выборе указанных параметров.

**Теорема 3.** Пусть числа  $0 < \bar{\gamma}_j < \hat{\gamma}_j$ ,  $j = \overline{1,n}$ ,  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ , где  $\bar{\varepsilon} = \min_{j=\overline{1,n}} \frac{\hat{\gamma}_j^2 - \bar{\gamma}_j^2}{\hat{\gamma}_j^2 + \bar{\gamma}_j^2} \bar{\gamma}_j^2$ , произвольно фиксированы. Тогда для любых параметров  $\beta_j \neq \frac{x_i + x_k}{2} \forall i, j, k \in \overline{1,n}$ ,  $i \neq k$ , найдется набор параметров  $\gamma_j \in (\bar{\gamma}_j, \hat{\gamma}_j)$ ,  $j = \overline{1,n}$ , такой, что для функций

$$\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp \left[ -\frac{(x - \beta_j)^2}{\varepsilon + \gamma_j^2} \right], \quad j = \overline{1,n},$$

имеем  $\det [\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i)]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$ . Тем самым система

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{1,n},$$

имеет единственное решение  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , то есть задача интерполяции функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  по данным контрольным точкам имеет дискретно точное решение.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 5.** Пусть числа  $q_j > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $q_j \neq q_i$  для всех  $i \neq j$ , произвольно фиксированы. Тогда функции  $\psi_j(\gamma) = q_j^\gamma$ ,  $j = \overline{1, n}$ , линейно независимы на любом интервале  $(\overline{\gamma}, \widehat{\gamma})$  положительной полуоси.

**Доказательство.** Рассуждая от противного, предположим, что нашлись числа  $\sigma_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , не все равные нулю и такие, что  $\sigma_1 q_1^\gamma + \dots + \sigma_n q_n^\gamma \equiv 0$  на  $(\overline{\gamma}, \widehat{\gamma})$ . Для определенности будем считать, что  $\sigma_1 \neq 0$ . Деля данное тождество на  $q_n^\gamma$ , получаем

$$\sigma_1 \left( \frac{q_1}{q_n} \right)^\gamma + \dots + \sigma_{n-1} \left( \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)^\gamma + \sigma_n \equiv 0.$$

Дифференцируя по  $\gamma$ , получаем

$$\sigma_1 \ln \frac{q_1}{q_n} \left( \frac{q_1}{q_n} \right)^\gamma + \dots + \sigma_{n-1} \ln \frac{q_{n-1}}{q_n} \left( \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)^\gamma \equiv 0.$$

Поделив на  $\left( \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)^\gamma$ , приходим к следующему тождеству:

$$\sigma_1 \ln \frac{q_1}{q_n} \left( \frac{q_1}{q_{n-1}} \right)^\gamma + \dots + \sigma_{n-2} \ln \frac{q_{n-2}}{q_n} \left( \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right)^\gamma + \sigma_{n-1} \ln \frac{q_{n-1}}{q_n} \equiv 0.$$

Снова дифференцируя по  $\gamma$ , имеем

$$\sigma_1 \ln \frac{q_1}{q_n} \ln \frac{q_1}{q_{n-1}} \left( \frac{q_1}{q_{n-1}} \right)^\gamma + \dots + \sigma_{n-2} \ln \frac{q_{n-2}}{q_n} \ln \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \left( \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \right)^\gamma \equiv 0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, на последнем шаге приходим к тождеству

$$\sigma_1 \ln \frac{q_1}{q_n} \ln \frac{q_1}{q_{n-1}} \dots \ln \frac{q_1}{q_2} \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^\gamma \equiv 0.$$

Поскольку согласно условиям леммы ни одно из выражений под логарифмами не равно единице, заключаем, что  $\sigma_1 = 0$ , а это противоречит нашему исходному предположению.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть числа  $q_{ij} > 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , произвольно фиксированы и таковы, что  $q_{ij} \neq q_{kj}$  для всех  $i, j, k \in \overline{1, n}$ ,  $i \neq k$ . Тогда для любых интервалов  $(\overline{\gamma}_j, \widehat{\gamma}_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , положительной полуоси существует набор чисел  $\gamma_j \in (\overline{\gamma}_j, \widehat{\gamma}_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , таких, что

$$\begin{vmatrix} q_{11}^{\gamma_1} & \dots & q_{1n}^{\gamma_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}^{\gamma_1} & \dots & q_{nn}^{\gamma_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Доказательство** проведем индукцией по  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что для  $n = 1$  утверждение очевидно. Предположим, что для  $n = m$  утверждение уже доказано, и установим его справедливость для  $n = m + 1$ . Пользуясь предположением индукции, найдем числа  $\gamma_j \in (\overline{\gamma}_j, \widehat{\gamma}_j)$ ,  $j = \overline{2, n}$ , так, чтобы

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} q_{22}^{\gamma_2} & \dots & q_{2n}^{\gamma_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n2}^{\gamma_2} & \dots & q_{nn}^{\gamma_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для произвольного  $\gamma \in (\overline{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_1)$  рассмотрим определитель

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} q_{11}^\gamma & q_{12}^{\gamma_2} & \dots & q_{1n}^{\gamma_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1}^\gamma & q_{n2}^{\gamma_2} & \dots & q_{nn}^{\gamma_n} \end{vmatrix}.$$



Нам достаточно доказать, что существует  $\gamma = \gamma_1 \in (\overline{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_1)$  такое, что  $\Delta(\gamma_1) \neq 0$ . Рассуждая от противного, предположим, что  $\Delta(\gamma) \equiv 0$  для всех  $\gamma \in (\overline{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_1)$ . Раскладывая определитель  $\Delta(\gamma)$  по первому столбцу, получаем  $\Delta(\gamma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i q_{i1}^\gamma \equiv 0$  на  $(\overline{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_1)$ . Учитывая, что (как уже было сказано выше)  $\sigma_1 \neq 0$ , получаем противоречие с леммой 5.  $\square$

**Лемма 7.** Пусть числа  $0 < \overline{\gamma}_j < \widehat{\gamma}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , произвольно фиксированы. Для любых параметров  $\beta_j \neq \frac{x_i + x_k}{2} \forall i, j, k \in \overline{1, n}$ ,  $i \neq k$ , найдется набор чисел  $\gamma_j \in (\overline{\gamma}_j, \widehat{\gamma}_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , такой, что для функций

$$\psi_j[\beta_j, \gamma_j](x) = \exp[-\gamma_j(x - \beta_j)^2], \quad j = \overline{1, n},$$

имеем  $\det [\psi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i)]_{i,j=\overline{1, n}} \neq 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $\psi_j(x_i) = q_{ij}^{\gamma_j}$ , где  $q_{ij} = \exp[-(x_i - \beta_j)^2]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Ясно, что  $q_{ij} \in (0; 1]$ . Докажем, что

$$q_{ij} \neq q_{kj} \quad \forall i, j, k \in \overline{1, n}, \quad i \neq k. \tag{2.1}$$

Предположим от противного, что  $q_{ij} = q_{kj}$  при некоторых  $i, j, k \in \overline{1, n}$ ,  $i \neq k$ , то есть

$$(x_i - \beta_j)^2 = (x_k - \beta_j)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_j = \frac{x_i + x_k}{2},$$

что противоречит условиям леммы. Таким образом, наше предположение неверно, то есть соотношение (2.1) выполняется. Для завершения доказательства остается лишь сослаться на лемму 6.  $\square$

**Доказательство** теоремы 3. Обозначим  $\overline{\gamma}'_j = \frac{1}{\widehat{\gamma}_j^2}$ ,  $\widehat{\gamma}'_j = \frac{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2}{2\widehat{\gamma}_j^2 \overline{\gamma}_j^2}$ . Рассмотрим разность

$$\widehat{\gamma}'_j - \overline{\gamma}'_j = \frac{1}{\widehat{\gamma}_j^2} \left[ \frac{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2}{2\widehat{\gamma}_j^2} - 1 \right] = \frac{\widehat{\gamma}_j^2 - \overline{\gamma}_j^2}{2\widehat{\gamma}_j^2 \overline{\gamma}_j^2} > 0.$$

Тогда согласно лемме 7 найдутся числа  $\gamma'_j \in (\overline{\gamma}'_j, \widehat{\gamma}'_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , такие, что для функций

$$\psi_j[\beta_j, \gamma'_j](x) = \exp[-\gamma'_j(x - \beta_j)^2], \quad j = \overline{1, n},$$

имеем  $\det [\psi_j[\beta_j, \gamma'_j](x_i)]_{i,j=\overline{1, n}} \neq 0$ . Положим  $\overline{\varepsilon}_j = \frac{\widehat{\gamma}_j^2 - \overline{\gamma}_j^2}{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2} \overline{\gamma}_j^2$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Оценим снизу разность

$$\frac{1}{\gamma'_j} - \overline{\varepsilon}_j > \frac{1}{\widehat{\gamma}'_j} - \overline{\varepsilon}_j = \frac{2\widehat{\gamma}_j^2 \overline{\gamma}_j^2}{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2} - \frac{\widehat{\gamma}_j^2 - \overline{\gamma}_j^2}{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2} \overline{\gamma}_j^2 = \frac{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2}{\widehat{\gamma}_j^2 + \overline{\gamma}_j^2} \overline{\gamma}_j^2 = \overline{\gamma}_j^2 > 0.$$

В силу выбора  $0 \leq \varepsilon \leq \overline{\varepsilon} = \min_{j=\overline{1, n}} \overline{\varepsilon}_j$  получаем

$$\frac{1}{\gamma'_j} - \varepsilon > \overline{\gamma}_j^2, \quad \frac{1}{\gamma'_j} - \varepsilon < \frac{1}{\widehat{\gamma}'_j} = \widehat{\gamma}_j^2. \tag{2.2}$$

В силу (2.2)

$$\gamma_j = \sqrt{\frac{1}{\gamma'_j} - \varepsilon} \in (\overline{\gamma}_j, \widehat{\gamma}_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Остается заметить, что  $\gamma'_j = \frac{1}{\gamma_j^2 + \varepsilon}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и воспользоваться леммой 7.  $\square$

**Замечание 3.** Теорема 3 применима, в частности, и для равномерной сетки. В связи с этим интересно сравнить ее утверждение с утверждением теоремы 1. В теореме 1 в качестве параметров  $\beta_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , выбираются контрольные точки. В теореме 3 эти параметры выбираются иначе, поскольку выбирать их равными контрольным точкам не позволяет условие  $\beta_j \neq \frac{x_i + x_k}{2}$ ,  $i, j, k = \overline{1, n}$ ,  $i \neq k$ . Параметр  $\varepsilon$  в теореме 3, так же как и в теореме 1, можно взять нулевым. Параметры  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в теореме 1 выбираются фактически равными одной и той же константе  $\gamma > 0$ . В теореме 3 в качестве интервалов  $(\overline{\gamma}_j, \widehat{\gamma}_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , можно взять один и тот же произвольный интервал  $(\overline{\gamma}, \widehat{\gamma})$  сколь угодно малой длины на положительной полуоси. Соответственно, величины  $\gamma_j$  могут быть при этом сколь угодно большими. Вместе с тем ясно, что теорема 3 позволяет гораздо больший произвол в выборе параметров  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Замечание 4.** В связи с отмеченной выше степенью произвольности выбора параметров  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , в формулировке теоремы 3 естественно предположить, что на практике, для того чтобы обеспечить хорошее приближение по значениям в контрольных точках при определенных обстоятельствах, вполне может оказаться достаточно существенно меньшего количества  $\nu$  (аналогов) «базисных» функций  $\varphi_j$ . При аппроксимации многочленов в качестве контрольных точек с практической точки зрения достаточно, видимо, взять концевые точки отрезка, точки локального экстремума и середины между ними. Для многочлена степени  $m$  таких точек будет не более чем  $(2m + 1)$ . В соответствии с этим и теоремой 3 достаточно, вероятно, взять  $\nu = 2m + 1$ . Полученная оценка носит, разумеется, эвристический характер, но она подтверждается результатами численных экспериментов.

**Замечание 5.** Вопрос об аппроксимации многочленов важен и сам по себе. Для функций достаточной степени гладкости это понятно в связи с возможностью их представления формулами или рядами Тейлора. Что касается измеримых, суммируемых функций, можно заметить следующее. Предположим, например, что качество приближения требуется оценивать по норме Лебега пространства  $L_p[a; b]$ ,  $p \in [1; \infty)$ . Как известно (см., например, [18, гл. 4, § 6]), всякую функцию из  $L_p[a; b]$  можно в такой норме сколь угодно точно аппроксимировать непрерывной функцией, суммируемой со степенью  $p$ . В свою очередь, согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса (см., например, [19, гл. IV, § 1, теорема 1.3, с. 150]) всякую непрерывную функцию (в норме пространства  $C[a; b]$ , а следовательно, и в норме  $L_p[a; b]$ ) можно сколь угодно точно приблизить многочленом.

Далее приведем результаты численных экспериментов по аппроксимации линейными комбинациями квадратичных экспонент многочленов, а также некоторых элементарных и ступенчатых функций. Рассмотрим два подхода к аппроксимации.

#### Подход I

Для случая  $m = 1000$ ,  $\nu = 11$  и равномерной сетки с узлами в контрольных точках  $x_i \in [a; b] = [0; \pi]$ ,  $i = \overline{1, m}$ , выбор параметров интерполяции (0.1), то есть чисел  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , производился путем решения оптимизационной задачи (0.3) методом Левенберга–Марквардта или Гаусса–Ньютона с помощью программ, написанных автором на языке MATLAB.

**Тест № 1.** Многочлен пятой степени:

$$f(x) = 3(x - 0.2)(x - 0.25)(x - 1)(x - 2)(x - 2.5).$$

Решая задачу (0.3) методом Левенберга–Марквардта, получаем следующие значения параметров:

$$\alpha = (-33.1501, -26.2964, 0.3950, -53.5945, -11.0355, 85.1866, \dots$$

$$\dots 19.1558, 75.1114, -2.5626, 15.8698, 16.3425);$$

$$\beta = (2.9087, 0.6468, -52.4629, -1.0397, -0.6302, 3.8881, 3.7601, 3.9259, -13.1474, 24.7388, 90.4741);$$

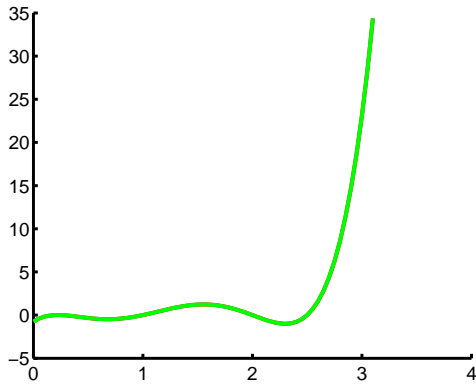


Рис. 1. Тест № 1, функции Гаусса, I

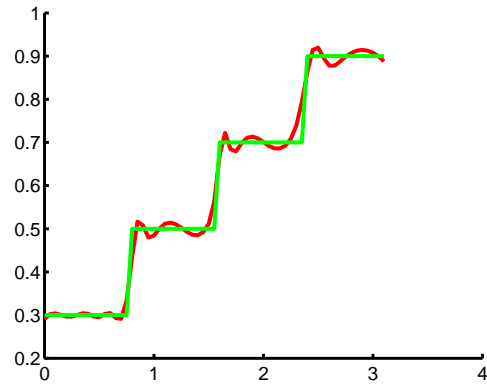


Рис. 2. Тест № 2, функции Гаусса, I

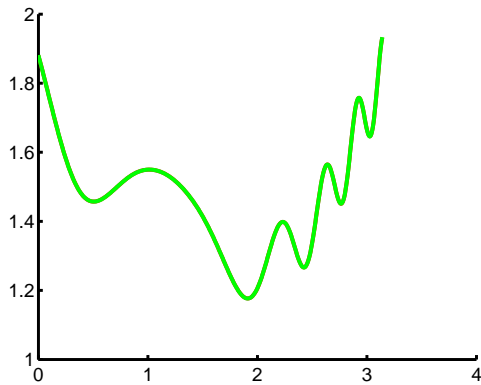


Рис. 3. Тест № 3, функции Гаусса, I

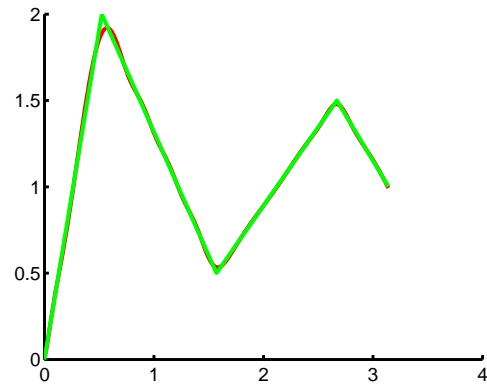


Рис. 4. Тест № 4, функции Гаусса, I

$$\gamma = (1.0906, 1.6508, 6.9818, 0.4989, 0.5881, 0.7022, 1.2948, 0.4625, 14.8442, 43.5958, 449.1235).$$

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (0.1) (красный цвет) см. на рис. 1. Отметим, что красный цвет почти не виден, поскольку произошло практически полное наложение графиков. Максимальное отклонение по контрольным точкам составило  $\Delta = 0.0015$ .

**Тест № 2.** Ступенчатая функция:

$$f(x) = \begin{cases} 0.3, & \text{если } x \in [0; \pi/4), \\ 0.5, & \text{если } x \in [\pi/4; \pi/2), \\ 0.7, & \text{если } x \in [\pi/2; 3\pi/4), \\ 0.9, & \text{если } x \in [3\pi/4; \pi]. \end{cases}$$

Решая задачу (0.3) методом Гаусса–Ньютона, получаем следующие значения параметров:

$$\alpha = (0.2940, 0.1479, 0.0671, 0.1388, 0.4293, 0.1016, 0.1260, 0.2970, 0.1255, -0.0007, 0.9142);$$

$$\beta = (0.0529, 0.4159, 0.5956, 0.8475, 1.0725, 1.5067, 1.6305, 1.7959, 2.4554, 2.6962, 2.9027);$$

$$\gamma = (0.3340, 0.1897, 0.1009, 0.0799, 0.4499, 0.0001, 0.0651, 0.3165, 0.1116, 0.0001, 1.1590).$$

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 2. Максимальное отклонение по контрольным точкам составило  $\Delta = 0.0937$ .

**Тест № 3.** Элементарная функция:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} + \arctg(\cos x) + 0.1 \sin(x^3 + x^2 - 7x - 5).$$

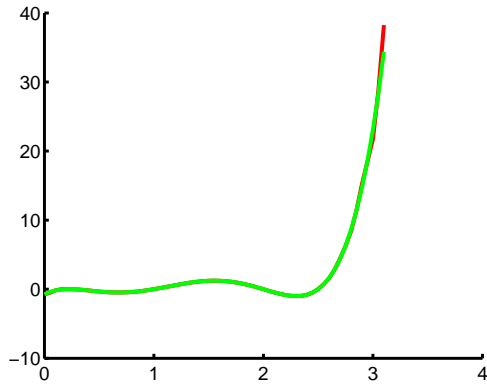


Рис. 5. Тест № 1, функции Гаусса, II

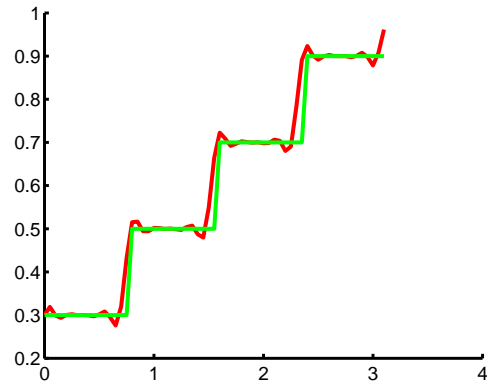


Рис. 6. Тест № 2, функции Гаусса, II

Решая задачу (0.3) методом Левенберга–Марквардта, получаем следующие значения параметров:

$$\alpha = (1.7742, 0.0230, 0.9489, 0.0039, 1.0565, 0.0208, 0.8187, 0.6465, 1.4217, 1.1402, 1.7762);$$

$$\beta = (-0.2296, 0.2361, 0.5318, 0.8812, 1.2040, 1.5641, 1.9743, 2.2847, 2.9328, 2.6581, 3.1718);$$

$$\gamma = (0.5018, 0.2074, 0.5818, 0.1607, 0.6156, 0.2341, 0.6714, 0.2561, 0.1489, 0.1881, 0.1389).$$

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 3. Отметим, что красный цвет почти не виден, поскольку произошло практически полное наложение графиков. Максимальное отклонение по контрольным точкам составило  $\Delta = 0.0013$ .

**Тест № 4.** Ломаная с массивами первых и вторых координат вершин:

$$(0, \pi/6, \pi/2, 0.85\pi, \pi), \quad (0, 2, 0.5, 1.5, 1).$$

Решая задачу (0.3) методом Левенберга–Марквардта, получаем следующие значения параметров:

$$\alpha = (-0.1967, 0.0128, 1.9158, 0.2806, 0.8251, 0.2829, 0.5357, -0.0089, 0.9003, 0.1217, 0.8343);$$

$$\beta = (-0.0165, 0.2998, 0.5684, 0.8994, 1.1300, 1.3862, 1.8213, 2.1064, 2.4763, 2.6733, 3.0532);$$

$$\gamma = (0.0810, 0.0001, 0.3775, 0.1436, 0.2253, 0.1503, 0.4785, 0.0004, 0.5196, 0.1301, 0.5938);$$

Графики функции (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 4. Максимальное отклонение по контрольным точкам составило  $\Delta = 0.1060$ .

### Подход II

Будем брать параметры  $\beta_j$ ,  $\gamma_j = \gamma_0$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , фиксированными. Учитывая, что в рамках подхода I на каждое значение индекса  $j = \overline{1, \nu}$  приходится по три параметра интерполяции, а здесь только один параметр, для корректности сравнения данных двух подходов возьмем  $\nu = 33$ . Выберем равномерную сетку на  $[a; b]$  с тем же количеством узлов (контрольных точек) и в качестве параметров  $\beta_j$  назначим контрольные точки  $x_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ . По значениям  $f_j = f(x_j)$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , найдем значения параметров  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , как решение системы линейных уравнений

$$\Phi\alpha = f,$$

где  $\Phi = \{\varphi_j[\beta_j, \gamma_j](x_i)\}_{i,j=\overline{1,\nu}}$ . Как было установлено при доказательстве теоремы 1,  $d = \det \Phi \neq 0$ . Поэтому данная система уравнений имеет единственное решение, которое и даст нам искомую аппроксимацию вида (0.1). В численных экспериментах мы брали  $\gamma_0 = 0.1$ . При этом

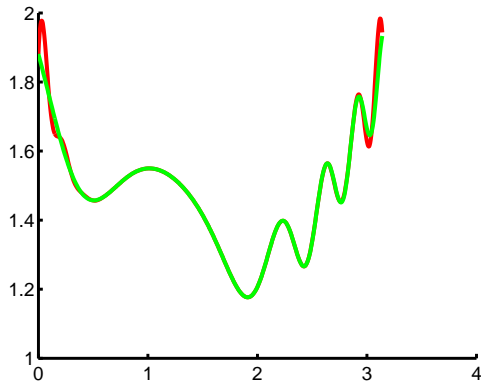


Рис. 7. Тест № 3, функции Гаусса, II

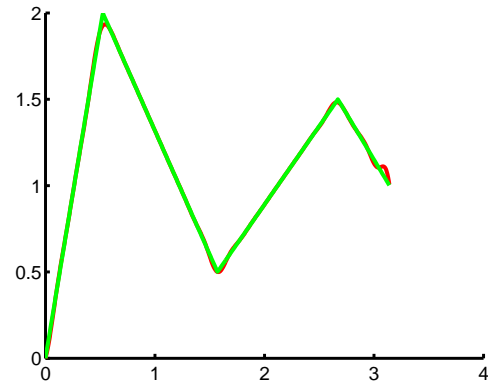


Рис. 8. Тест № 4, функции Гаусса, II

оказывалось, что  $d = 0.003$ . Отметим, что при выборе  $\gamma_0 = 0.3$  качество аппроксимации оказывается существенно лучше. Однако не стоит придавать этому факту слишком большого значения, поскольку параметры  $\alpha_j$  находятся из условий совпадения лишь по данным  $\nu = 33$  контрольным точкам, и это условие в обоих случаях выполняется. Вне данных контрольных точек аппроксимация, вообще говоря, может вести себя как угодно. Кроме того, в случае  $\gamma_0 = 0.3$  значение  $d$  оказывается весьма близким к нулю ( $d = 4.4847 \cdot 10^{-83}$ ), и, соответственно, матрица  $\Phi$  оказывается плохо обусловленной. Это происходит из-за того, что число  $q = \exp\left\{-\frac{h^2}{\gamma_0^2}\right\}$  оказывается близко к единице. Для того чтобы избежать этого, достаточно выбирать параметр  $\gamma_0$  той же степени малости, что и шаг разбиения  $h$ .

**Тест № 1.** Полученное решение:

$$\alpha = (-0.7981, 0.1283, -0.0403, 0.0222, -0.1023, -0.1824, -0.2560, -0.2767, -0.2465, \dots \\ -0.1625, -0.0346, 0.1236, 0.2939, 0.4563, 0.5906, 0.6780, 0.7034, 0.6567, 0.5350, \dots \\ 0.3440, 0.1008, -0.1666, -0.4121, -0.5829, -0.5836, -0.3638, \dots \\ 0.3185, 1.2829, 3.5433, 5.0754, 11.9185, 9.1092, 36.2989).$$

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 5. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 (это намного меньше, чем  $h$ ) составило  $\Delta = 3.8754$ . Но, как видно из рисунка, расхождение наблюдается лишь в окрестности правого конца отрезка (собственно сам правый конец мы отбросили, чтобы было видно расхождение).

**Тест № 2.** Полученное решение:

$$\alpha = (0.2447, 0.1351, 0.1787, 0.1596, 0.1732, 0.1516, 0.2027, 0.0733, 0.3698, \dots \\ \dots 0.2404, 0.2916, 0.2696, 0.2842, 0.2623, 0.3135, 0.1840, 0.4806, 0.3511, 0.4023, \dots \\ \dots 0.3804, 0.3950, 0.3730, 0.4242, 0.2948, 0.5914, 0.4619, \dots \\ \dots 0.5131, 0.4912, 0.5056, 0.4842, 0.5341, 0.4061, 0.7337).$$

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 6. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 0.1911$ .

**Тест № 3.** Полученное решение:

$$\alpha = (1.5669, 0.7692, 0.9832, 0.8178, 0.8250, 0.7984, 0.8113, 0.8247, 0.8422, \dots \\ \dots 0.8541, 0.8599, 0.8585, 0.8508, 0.8374, 0.8183, 0.7932, 0.7612, 0.7224, 0.6805, \dots)$$

... 0.6477, 0.6452, 0.6913, 0.7675, 0.7970, 0.7207, 0.6570, ...  
 ... 0.8082, 0.9427, 0.7321, 0.8436, 1.1692, 0.5422, 1.7042).

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 7. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 0.1377$ .

**Тест № 4.** Полученное решение:

$\alpha = (-0.1040, 0.2505, 0.3944, 0.6430, 0.7921, 1.1312, 1.0676, 0.9728, 0.9020, ...$   
 ... 0.8215, 0.7443, 0.6669, 0.5868, 0.5150, 0.4212, 0.3849, 0.2004, 0.3565, 0.3643, ...  
 ... 0.4297, 0.4730, 0.5250, 0.5730, 0.6242, 0.6699, 0.7287, ...  
 ... 0.7538, 0.8654, 0.7823, 0.7163, 0.7031, 0.5207, 0.7864).

Графики функции  $f(x)$  (зеленый цвет) и ее аппроксимации (красный цвет) см. на рис. 8. Максимальное отклонение на равномерной сетке с шагом 0.005 составило  $\Delta = 0.0710$ .

Кроме того, проводились численные эксперименты и с неравномерной сеткой. И тоже были получены хорошие результаты. При этом подтвердилось предположение о том, что для гладких функций в качестве узлов интерполяции достаточно брать концы отрезка, точки локальных экстремумов и по одной из промежуточных точек (или чуть больше, если на соответствующем участке наблюдается быстрый рост функции). Для ступенчатой функции узлы выбирались путем небольшого отступа слева и справа от точки разрыва; кроме того, приходилось добавлять еще несколько (по две-три) близких точек. Для ломаной — аналогично, если вместо точек разрыва понимать вершины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.
2. Волин Ю.М., Островский Г.М. О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. № 7. С. 1197–1204.
3. Тео К.Л., Гох С.Д., Вонг К.Н. A unified computational approach to optimal control problems. Harlow, New York: Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., 1991. ix+329 p.
4. Чернов А.В. О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043. DOI: [10.7868/S0044466913120053](https://doi.org/10.7868/S0044466913120053)
5. Чернов А.В. О применимости техники параметризации управления к решению распределенных задач оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 102–117. DOI: [10.20537/vm140109](https://doi.org/10.20537/vm140109)
6. Чернов А.В. Численное решение распределенных задач оптимизации методом параметризации управления. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 71 с.
7. Чернов А.В. О кусочно-постоянной аппроксимации в распределенных задачах оптимизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 264–279.
8. Golubev Yu.F., Seregin I.A., Khayrullin R.Z. The floating nodes method // Sov. J. Comput. Syst. Sci. 1992. Vol. 30. No. 2. P. 71–76.
9. Чернов А.В. О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 6 (1). С. 107–114.
10. Чернов А.В. О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу на варьируемой области // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305–321.
11. Lanzara F., Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations from scattered data // Approx. Theory. 2007. Vol. 145. Issue 2. P. 141–170. DOI: [10.1016/j.jat.2006.08.003](https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.003)
12. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007. xiv+349 p. DOI: [10.1090/surv/141](https://doi.org/10.1090/surv/141)
13. Журавлев М.В., Минин Л.А., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2009. № 13 (68). Вып. 17/2. С. 89–99.

14. Ситник С.М., Тимашов А.С. Приложения экспоненциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2013. № 2 (56). С. 90–94.
15. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996. 536 с.
16. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
17. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 480 с.
18. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005. 352 с.
19. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

Поступила в редакцию 05.03.2017

Чернов Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;  
 Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.  
 E-mail: [chavnn@mail.ru](mailto:chavnn@mail.ru)

**A. V. Chernov**

**On using Gaussian functions with varied parameters for approximation of functions of one variable on a finite segment**

**Citation:** *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 267–282 (in Russian).

**Keywords:** control parametrization technique, lumped problem of optimal control, approximation by quadratic exponents, Gaussian function.

MSC2010: 41A30

DOI: [10.20537/vm170210](https://doi.org/10.20537/vm170210)

We study the opportunities of approximation of a piecewise continuous function on a finite segment by a linear combination of  $\mu$  Gaussian functions, with the object of their usage for control approximation in lumped problems of optimal control. Recall that a Gaussian function (quadratic exponent) is one defined as follows  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$ . Unlike investigations carried out by another authors, we consider the case where the parameters of a Gaussian function (with the coefficients of a linear combination) are varied and selected, in particular, by minimization of the difference between a function being approximated and its approximation, or (in the case of an optimal control problem) by minimization of the cost functional. Such an approach gives the opportunity to approximate optimal control problems with lumped parameters by finite dimensional problems of mathematical programming of comparatively small dimension (as opposed to piecewise constant or piecewise linear approximation on a fixed mesh with small width which is usually used). We present also some results of numerical experiments which substantiate efficiency of the approach under study.

## REFERENCES

1. Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* (Mathematical theory of control systems construction), Moscow: Vysshaya shkola, 2003, 614 p.
2. Volin Yu.M., Ostrovski G.M. On the method of successive approximation of optimum behaviour design of certain distributed parameter systems, *Autom. Remote Control*, 1965, vol. 26, pp. 1188–1194.
3. Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. *A unified computational approach to optimal control problems*, Harlow, New York: Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., 1991, ix+329 p.

4. Chernov A.V. Smooth finite-dimensional approximations of distributed optimization problems via control discretization, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, issue 12, pp. 1839–1852.  
DOI: [10.1134/S096554251312004X](https://doi.org/10.1134/S096554251312004X)
5. Chernov A.V. On applicability of control parametrization technique to solving distributed optimization problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 1, pp. 102–117 (in Russian).  
DOI: [10.20537/vm140109](https://doi.org/10.20537/vm140109)
6. Chernov A.V. *Chislennoe reshenie raspredelennykh zadach optimizatsii metodom parametrizatsii upravleniya* (Numerical solving of distributed optimization problems by control parametrization method), Nizhny Novgorod: N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 2014, 71 p.
7. Chernov A.V. On piecewise constant approximation in distributed optimization problems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 264–279 (in Russian).
8. Golubev Yu.F., Seregin I.A., Khayrullin R.Z. The floating nodes method, *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1992, vol. 30, no. 2, pp. 71–76.
9. Chernov A.V. On approximate solution of free time optimal control problems, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta imeni N. I. Lobachevskogo*, 2012, no. 6 (1), pp. 107–114 (in Russian).
10. Chernov A.V. On the smoothness of an approximated optimization problem for a Goursat–Darboux system on a varied domain, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 305–321 (in Russian).
11. Lanzara F., Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations from scattered data, *Approx. Theory*, 2007, vol. 145, issue 2, pp. 141–170. DOI: [10.1016/j.jat.2006.08.003](https://doi.org/10.1016/j.jat.2006.08.003)
12. Maz'ya V., Schmidt G. *Approximate approximations*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2007, xiv+349 p. DOI: [10.1090/surv/141](https://doi.org/10.1090/surv/141)
13. Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M. On numerical aspects of interpolating by shift of gaussian functions, *Nauchnye Vedomosti Belgorodskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Fizika*, 2009, no. 13 (68), issue 17/2, pp. 89–99 (in Russian).
14. Sitnik S.M., Timashov A.S. Applications of exponential approximation by integer shifts of Gaussian functions, *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta Inzhenerykh Tekhnologii*, 2013, no. 2 (56), pp. 90–94 (in Russian).
15. Prasolov V.V. *Zadachi i teoremy lineinoi algebrы* (Problems and theorems of linear algebra), Moscow: Nauka, 1996, 536 p.
16. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1994, xiv+657 p. Translated under the title *Konkret-naya matematika. Osnovanie informatiki*, Moscow: Mir, 1998, 703 p.
17. Tyrtysnikov E.E. *Matrichnyi analiz i lineinaya algebra* (Matrix analysis and linear algebra), Moscow: Fizmatlit, 2007, 480 p.
18. Fedorov V.M. *Kurs funktsional'nogo analiza* (The course in functional analysis), Saint Petersburg: Lan', 2005, 352 p.
19. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Berlin: Akademie-Verlag, 1974, vi+281 p. Translated under the title *Nelineinye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya*, Moscow: Mir, 1978, 336 p.

Received 05.03.2017

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia;  
Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.  
E-mail: [chavnn@mail.ru](mailto:chavnn@mail.ru)