ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

УДК 514.14

© *А. В. Селиверстов*

О КАСАТЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ К АФФИННЫМ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМ[1]

В статье рассмотрены методы для обнаружения особых точек на аффинной гиперповерхности или подтверждения гладкости этой гиперповерхности. Наш подход основан на построении касательных прямых к данной гиперповерхности. Существование хотя бы одной особой точки накладывает ограничение на алгебраическое уравнение, определяющее совокупность касательных прямых, проходящих через выделенную точку в пространстве. Это уравнение основано на формуле для дискриминанта многочлена от одной переменной. Для произвольно фиксированной степени гиперповерхности нами предложен детерминированный алгоритм полиномиального времени для вычисления базиса в подпространстве соответствующих многочленов. Если линейная комбинация таких многочленов не обращается в нуль на гиперповерхности, то гиперповерхность гладкая. Мы формулируем достаточное условие гладкости, проверяемое за полиномиальное время. Для некоторых гладких аффинных гиперповерхностей это условие выполнено. Этот набор включает графики кубических многочленов от нескольких переменных, а также другие примеры кубических гиперповерхностей. С другой стороны, это условие не выполняется для некоторых кубических гиперповерхностей высокой размерности. Это не мешает применению метода в низких размерностях. Также поиск особых точек важен для решения некоторых задач машинного зрения, в том числе для обнаружения угла у препятствия по последовательности кадров с одной камеры на движущемся транспортном средстве.

Ключевые слова: гиперповерхность, особая точка, касательная прямая, многочлен, дискриминант.

DOI: 10.20537/vm170208

Введение

В статье рассмотрены легко проверяемые условия гладкости аффинной гиперповерхности над полем комплексных чисел, основанные на исследовании касательных прямых. Полученные результаты о кривых и поверхностях связаны с задачами машинного зрения. Но многие результаты справедливы и в высоких размерностях. Напомним, что гиперповерхностью называется многообразие, у которого размерность каждой компоненты на единицу меньше размерности объемлющего пространства. В частности, кривая на плоскости и поверхность в трехмерном пространстве — это гиперповерхности.

Поиск особой точки сводится к решению системы алгебраических уравнений. В малых размерностях применимы алгоритмы, основанные на вычислении базиса Грёбнера [1] и реализованные во многих пакетах программ для символьных вычислений [2]. Также можно использовать облачный сервис MathPartner, доступный по адресу http://mathpar.cloud.unihub.ru. Для системы n алгебраических уравнений от n неизвестных решение можно получить в виде ряда гипергеометрического типа от коэффициентов [3]. Разработаны вероятностные методы [4]. Иногда вычисления упрощаются, если уравнение приведено к специальному виду. Известен итерационный алгоритм для приведения кубической формы к виду без мономов от двух переменных [5]. Однако все эти методы обладают высокой вычислительной сложностью, а получаемый результат может существенно меняться при небольших изменениях в исходных данных.

Автор благодарен Марку Спиваковскому (Mark Spivakovsky) за обсуждение постановки задачи во время конференции Polynomial Computer Algebra'2016.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14–50–00150).

§ 1. Предварительные сведения

Дискриминант многочлена степени d от одной переменной над полем комплексных чисел равен нулю, если некоторый корень кратный. Дискриминант сам является однородным многочленом с целыми коэффициентами от всех коэффициентов исходного многочлена. Например, для многочлена $at^2 + bt + c$ дискриминант равен $b^2 - 4ac$; для многочлена $at^3 + bt^2 + pt + q$ дискриминант равен $b^2p^2 - 4ap^3 - 4b^3q - 27a^2q^2 + 18abpq$.

При подстановке коэффициентов многочлена степени $d - k$ без кратных корней в формулу дискриминанта для многочленов степени d (при старших коэффициентах, равных нулю) результат отличен от нуля при $k = 1$ и равен нулю при $k \geqslant 2$.

Многочлен называется *свободным от квадратов*, если он не делится на квадрат другого многочлена положительной степени.

Для многочленов от нескольких переменных дискриминант — это многочлен Δ от коэффициентов многочлена f, который обращается в нуль, если многочлен f не свободен от квадратов или проективное замыкание гиперповерхности $f = 0$ особое [6]. Его степень равна $\deg \Delta = (n + 1)(d - 1)^n$. Для неоднородного многочлена f второй степени этот дискриминант пропорционален определителю матрицы квадратичной формы, получаемой при гомогенизации многочлена f. При $d \geqslant 3$ степень дискриминанта быстро растет при увеличении n.

Для многочлена $\sum p_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ обозначим через I множество целых точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в n-мерном вещественном пространстве, для которых коэффициент p_α отличен от нуля. Выпуклая оболочка множества I называется *многогранником Ньютона* этого многочлена. Многогранник зависит от выбора системы координат; он может иметь неполную размерность. Например, для однородного многочлена множество I лежит в одной гиперплоскости.

Проективное пространство отождествляется с объединением аффинного пространства и *бесконечно удаленной* проективной гиперплоскости. Таким образом,

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{CP}^{n-1} = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \cup \{\infty\}.$$

§ 2. Результаты

Пусть аффинная гиперповерхность задана уравнением $f = 0$, где f — свободный от квадратов многочлен степени d. Аффинная прямая, проходящая через точку U с координатами $(u_1, \ldots, u_n)$, может быть задана параметрически как множество точек с координатами $((x_1 - u_1)t + u_1, \ldots, (x_n - u_n)t + u_n)$, где t — это координата на прямой. Ограничение на эту прямую многочлена f — это многочлен $r(t)$ от одной переменной степени не выше d. Обозначим через $D[f, U]$ дискриминант многочлена $r(t)$. Если степень многочлена $r(t)$ меньше d, то $D[f, U]$ вычисляется по формуле для дискриминанта многочленов степени d; формально многочлен $r(t)$ можно считать многочленом степени d с нулевыми коэффициентами при старших мономах. В общем случае степень многочлена $D[f, U](x_1, \ldots, x_n)$ равна $d^2 - d$. Если многочлен f определяет гладкую плоскую кривую, то степень многочлена $D[f, U]$ равна степени двойственной кривой, вычисляемой по формуле Плюккера. Если прямая касается проективного замыкания гиперповерхности или проходит через ее особую точку, то дискриминант многочлена $r(t)$ равен нулю. Если $n = 1$, то $D[f, U]$ — это константа. Пусть $n \geqslant 2$. Если U не является особой точкой гиперповерхности, то уравнение $D[f, U](x_1, \ldots, x_n) = 0$ задает конус с вершиной в точке U. Если точка U особая, то многочлен $D[f, U]$ тождественно равен нулю. Если точка U принадлежит гиперповерхности и не является особой, то конус приводимый и содержит касательную гиперплоскость; тогда многочлен $D[f, U]$ делится на квадрат линейной функции, определяющей касательную гиперплоскость. Если в точке V проективное замыкание гиперповерхности касается бесконечно удаленной гиперплоскости, то при $U \to V$ предел многочленов $D[f, U]$ имеет степень не выше $d^2 - d - 1$. Совокупность многочленов $D[f, U]$ для всех точек U порождает линейное подпространство W_f в пространстве многочленов от n переменных степени не выше $d^2 - d$ над полем комплексных чисел.

Эта конструкция допускает упрощение в случае, когда вершина конуса принадлежит гиперповерхности. Пусть U — гладкая точка гиперповерхности $f=0$. Тогда многочлен $r(t)$ не имеет свободного члена, следовательно, он делится на t. Обозначим через $B[f,U]$ дискриминант многочлена $r(t)/t$, вычисляемый по формуле для многочленов степени $d-1$. Многочлен $B[f,U](x_1,\dots,x_n)$ равен нулю в каждой особой точке гиперповерхности, но его степень на два меньше степени многочлена $D[f,U]$.

Теорема 1. *Дан свободный от квадратов многочлен $f(x_1,\dots,x_n)$ степени d. Если пространству W_f принадлежит ненулевая константа или многочлен вида $1+fg$ для некоторого многочлена g степени $\deg g \leqslant d^2-2d$, то аффинная гиперповерхность $f=0$ гладкая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Независимо от выбора точки U, в каждой особой точке $(x_1,\dots,x_n)$ гиперповерхности многочлен $D[f,U]$ равен нулю. Следовательно, все многочлены из W_f одновременно равны нулю в каждой особой точке. □

Пример 1. Пусть $f=x^2+y$. Точке U с координатами $(0,v)$ соответствует многочлен $D[f,U]=(2\sqrt{v}x+y-v)(-2\sqrt{v}x+y-v)=-4vx^2+y^2-2vy+v^2$ из W_f. Полусумма двух таких многочленов для точек $(0,v)$ и $(0,-v)$ равна y^2+v^2. Вычитая из нее многочлен y^2, соответствующий точке $(0,0)$, получаем константу v^2, принадлежащую W_f.

Пример 2. Обозначим через O начало координат. Если $f=f_2+1$, где $f_2(x_1,\dots,x_n)$ — квадратичная форма, то $D[f,O]=-4f_2=4-4f$. Следовательно, $1-f\in W_f$. Достаточное условие гладкости квадрики $f=0$ выполнено. Аналогично: если многочлен $f=f_3+1$, где $f_3(x_1,\dots,x_n)$ — кубическая форма, то $D[f,O]=-27f_3^2=-27-27f(f-2)$. Следовательно, $1+f(f-2)\in W_f$. Достаточное условие гладкости кубической гиперповерхности выполнено.

Теорема 2. *Дан многочлен $g(x_1,\dots,x_n)$ третьей степени. Для многочлена $f=g+y$ от $n+1$ переменной подпространство W_f содержит ненулевые константы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через g_3 однородную компоненту третьей степени в разложении многочлена g. Рассмотрим точки U с координатами $(u\tau_1,\dots,u\tau_n,v)$, из которых последняя соответствует переменной y.

$$f((x_1-u\tau_1)t+u\tau_1,\dots,(x_n-u\tau_n)t+u\tau_n,(y-v)t+v)=at^3+bt^2+pt+q,$$

где коэффициенты a и b не зависят от v, а коэффициенты p и q — линейные функции от v. Его дискриминант $D[f,U]=b^2p^2-4ap^3-4b^3q-27a^2q^2+18abpq$ является многочленом от u и v, коэффициенты которого — многочлены от x_1,..., x_n и y. При любых значениях u и v получается многочлен из W_f. Выделим члены в $D[f,U]$, имеющие максимальную степень по переменной v, а среди них — максимальную степень по переменной u. (Эти члены получаются из слагаемого $-4ap^3$.) Получаем $D[f,U]=-4v^3g_3(u\tau_1,\dots,u\tau_n)+\dots$. При каждом выборе значений $\tau_1,\dots,\tau_n$, u и v получается многочлен из W_f. Обозначим через h предел отношения

$$h(x_1,\dots,x_n,y)=\lim_{|v|\to\infty}\frac{D[f,U]}{v^3}=-4g_3(u\tau_1,\dots,u\tau_n)+\dots.$$

В силу замкнутости линейного подпространства многочлен h принадлежит W_f. Аналогично: предел отношения

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{h}{u^3}=-4g_3(\tau_1,\dots,\tau_n)$$

принадлежит W_f. Поскольку степень многочлена f равна трем, найдутся такие числа $\tau_1,\dots,\tau_n$, что значение $g_3(\tau_1,\dots,\tau_n)$ отлично от нуля. Следовательно, ненулевая константа принадлежит пространству W_f. □

Замечание 1. Аффинная гиперповерхность $g(x_1, \ldots, x_n) + y = 0$ гладкая, поскольку она является графиком многочлена. Однако при $\deg g \geqslant 3$ ее проективное замыкание особое. Следовательно, условие $1 \in W_f$ не противоречит существованию особой точки у проективного замыкания аффинной гиперповерхности.

Теорема 3. *Дан свободный от квадратов многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$. В разложении многочлена $D[f,(u_1, \ldots, u_n)]$ по степеням координат $u_1, \ldots, u_n$ каждый коэффициент принадлежит пространству W_f. Эти многочлены от переменных $x_1, \ldots, x_n$ порождают все линейное пространство W_f.*

Доказательство. Свободный член разложения равен многочлену $D[f,O](x_1, \ldots, x_n)$ при нулевых значениях $u_1 = \cdots = u_n = 0$. Этот многочлен принадлежит пространству W_f.

Шаг индукции по числу целых точек многогранника Ньютона для многочлена от переменных $u_1, \ldots, u_n$. Рассмотрим многогранник Ньютона многочлена $D[f,(u_1, \ldots, u_n)]$. Пусть целая точка α служит вершиной этого многогранника Ньютона, в которой достигает максимума некоторый линейный функционал h с неотрицательными коэффициентами h_k. При этом функционал h достигает максимума в единственной вершине многогранника. Рассмотрим однопараметрическое семейство точек с координатами $u_k = \tau^{h_k}$, где параметр τ — положительное вещественное число. При $\tau \to \infty$ многочлен $D[f,(u_1, \ldots, u_n)]$ асимптотически стремится к функции вида $D_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\tau^{h(\alpha)}$, где D_α — коэффициент разложения многочлена $D[f,(u_1, \ldots, u_n)]$. При каждом значении τ этот многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ принадлежит пространству W_f. Предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{D[f,(\tau^{h_1}, \ldots, \tau^{h_n})](x_1, \ldots, x_n)}{\tau^{h(\alpha)}} = D_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$$

тоже принадлежит пространству W_f.

Теперь рассмотрим разность $D[f,(u_1, \ldots, u_n)] - D_\alpha(x_1, \ldots, x_n)u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — это координаты точки α. Соответствующий многогранник Ньютона не содержит вершину α. Следовательно, число целых точек в многограннике уменьшается. Выбирая новую вершину β и повторяя те же рассуждения для нового многочлена, получим $D_\beta \in W_f$.

По предположению индукции, теорема верна, когда многогранник Ньютона содержит не более N целых точек. Имея многогранник, содержащий $N+1$ целую точку, мы тем же способом выделим некоторую вершину и перейдем к многограннику с меньшим числом целых точек. При этом каждая целая точка, соответствующая моному в многочлене $D[f,(u_1, \ldots, u_n)]$, рано или поздно окажется вершиной многогранника Ньютона на некотором шаге.

При любых значениях $u_1, \ldots, u_n$ многочлен $D[f,(u_1, \ldots, u_n)]$ равен линейной комбинации рассматриваемых многочленов от $x_1, \ldots, x_n$. Поэтому эти многочлены порождают все линейное пространство W_f. □

Пример 3. Рассмотрим гиперболу $f = 0$, где $f = xy+1$. Обозначим через (u,v) координаты точки U. Разложение многочлена $D[f,U]$ по степеням координат u и v равно

$$D[f,U] = y^2u^2 - (2xy+4)uv + 4yu + x^2v^2 + 4xv - 4xy.$$

Линейная комбинация коэффициента $-2xy - 4$ при мономе uv и свободного члена $-4xy$ равна ненулевой константе, которая принадлежит пространству W_f. Достаточное условие гладкости выполнено. Более того, пространство W_f совпадает с пространством всех многочленов степени не выше второй от двух переменных x и y. Его размерность $\dim W_f = 6$.

Пример 4. Рассмотрим гладкую кривую $f = 0$, где $f = x^3 + y^3 + 1$. Обозначим через (u,v) координаты точки U, через D_{ij} — коэффициент при мономе u^iv^j в разложении многочлена

$D[f,U]$ по степеням координат u и v. Тогда некоторые коэффициенты равны

$$\begin{aligned}
D_{60} &= -27y^6 - 54y^3 - 27,\\
D_{06} &= -27x^6 - 54x^3 - 27,\\
D_{33} &= 540x^3y^3 + 54x^3 + 54y^3 - 54,\\
D_{30} &= 54x^3y^3 - 54y^6 + 540x^3 + 54y^3,\\
D_{03} &= -54x^6 + 54x^3y^3 + 54x^3 + 540y^3,\\
D_{00} &= -27x^6 - 54x^3y^3 - 27y^6.
\end{aligned}$$

Эти шесть многочленов линейно независимые. Линейная комбинация этих многочленов

$$-106D_{60} - 106D_{06} + 15D_{33} - 11D_{30} - 11D_{03} + 128D_{00} = 4914$$

принадлежит пространству W_f. Достаточное условие гладкости выполнено.

Пример 5. Рассмотрим гладкую поверхность $f = 0$, где $f = xyz + 1$. Проективное замыкание этой поверхности особое. Обозначим через (u, v, w) координаты точки U, через $D_{ijk}(x, y, z)$ — коэффициент многочлена $D[f,U]$ при мономе $u^iv^jw^k$ в разложении по степеням координат u, v и w. Тождественно равны нулю коэффициенты D_{600}, D_{500}, D_{510} и другие, получающиеся из них перестановками индексов. Поэтому размерность пространства W_f мала. С другой стороны, три многочлена, D_{222}, D_{111} и D_{000}, линейно независимые.

$$\begin{aligned}
&D_{222} = -6x^2y^2z^2 + 24xyz - 27,\\
&D_{111} = -24x^2y^2z^2 + 216xyz,\\
&D_{000} = -27x^2y^2z^2.
\end{aligned}$$

Их линейная комбинация $-81D_{222} + 9D_{111} + 10D_{000} = 2187$ принадлежит пространству W_f. Достаточное условие гладкости аффинной поверхности выполнено.

Теорема 4. *Дан свободный от квадратов многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ степени d. Существует такая открытая окрестность этого многочлена в пространстве многочленов степени не выше d, что для любого свободного от квадратов многочлена g из этой окрестности выполнено неравенство* $\dim W_g \geqslant \dim W_f$.

Доказательство. Коэффициенты многочлена $D[g,U]$ непрерывно зависят от коэффициентов многочлена g. Поэтому в некоторой открытой окрестности многочлена f соответствующие коэффициенты многочленов $D[f,U]$ и $D[g,U]$ близки друг другу. Поскольку определитель матрицы тоже непрерывно зависит от матричных элементов, небольшое изменение переводит базис пространства W_f в базис пространства W_g. □

Замечание 2. Если гиперповерхность $f = 0$ является цилиндром, то размерность пространства W_f не превышает размерности пространства многочленов от $n-1$ переменной той же степени.

Частным случаем цилиндра служит набор параллельных гиперплоскостей. В некоторой системе координат он определяется многочленом f от одной переменной. Если f не имеет кратных корней, то $\dim W_f = 1$, иначе многочлен f не является свободным от квадратов.

Теорема 5. *Для свободного от квадратов многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ третьей степени от $n \geqslant 14$ переменных размерность пространства W_f строго меньше размерности пространства многочленов степени не выше шестой от n переменных.*

Доказательство. Пространство W_f порождается многочленами $D[f,U]$. Обозначим через $N = (n+6)!/(720n!)$ размерность пространства многочленов степени не выше шестой от n переменных. Произвольно фиксируем N точек $U^{(1)}, \ldots, U^{(N)}$. Рассмотрим матрицу $\|A_{ij}\|$

порядка N, состоящую из коэффициентов многочленов $D[f,U^{(1)}],\dots,D[f,U^{(N)}]$. Каждый элемент A_{ij} — это многочлен степени не выше шестой от коэффициентов многочлена f. Определитель этой матрицы — многочлен степени не выше $6N$ от коэффициентов многочлена f. Этот определитель заведомо равен нулю, если дискриминант Δ равен нулю. Следовательно, дискриминант Δ делит определитель $\det\|A_{ij}\|$. Поэтому если этот определитель отличен от нуля, то его степень не выше степени Δ, то есть выполнено неравенство $\deg\Delta = (n+1)2^n \leqslant 6N$. Это неравенство нарушается при $n \geqslant 14$. При $n = 14$ степень дискриминанта равна $\deg\Delta = 245760$, а правая часть неравенства равна $6N = 232560$. Итак, при $n \geqslant 14$ определитель равен нулю при любом выборе точек $U^{(1)},\dots,U^{(N)}$. Следовательно, размерность $\dim W_f < N$. □

Пример 6. Рассмотрим многочлен третьей степени вида $f = g_1(x_1)+\dots+g_n(x_n)$. Для любой точки U многочлен $D[f,U]$ равен дискриминанту многочлена at^3+bt^2+pt+q от одной переменной t. Его коэффициенты — это многочлены вида $a = a_1(x_1)+\dots+a_n(x_n)$, $b = b_1(x_1)+\dots+b_n(x_n)$, $p = p_0+p_1x_1+\dots+p_nx_n$, свободный член q не зависит от $x_1,\dots,x_n$; каждый моном — это степень некоторой переменной. Каждый моном многочлена $D[f,U](x_1,\dots,x_n)$ зависит самое большее от четырех переменных. Следовательно, $\dim W_f = O(n^4)$; при $n \geqslant 5$ размерность пространства W_f строго меньше размерности пространства многочленов степени не выше шестой от n переменных. Более того, для любой гладкой точки U гиперповерхности $f = 0$ каждый моном многочлена $B[f,U](x_1,\dots,x_n)$ зависит самое большее от двух переменных. Размерность порождаемого этими многочленами линейного пространства ограничена сверху функцией $O(n^2)$.

Теорема 6. *Дан свободный от квадратов многочлен $f(x_1,\dots,x_n)$ степени d. Аффинная гиперповерхность $f = 0$ гладкая тогда и только тогда, когда совокупность многочленов из пространства W_f не имеет общего нуля. В частности, если гиперповерхность гладкая, то у некоторого многочлена из пространства W_f свободный член отличен от нуля.*

Доказательство. В каждой особой точке гиперповерхности все многочлены из W_f одновременно равны нулю. Обратно, пусть гиперповерхность гладкая. Для любой точки V существует такая точка U, не принадлежащая гиперповерхности, что прямая UV не касается этой гиперповерхности. Поэтому точка V не принадлежит конусу рассматриваемого типа с вершиной в точке U, чьи образующие касаются этой гиперповерхности. Следовательно, в точке V не обращаются в нуль одновременно все многочлены из W_f. Поскольку точка V выбрана произвольно, то общих нулей нет. Очевидно, если у всех многочленов из W_f свободный член равен нулю, то общий нуль существует. □

Замечание 3. Если заранее известно много линейно независимых уравнений низкой степени, то вычисление базиса Грёбнера соответствующего идеала выполняется быстрее, чем для системы, где число уравнений близко к числу неизвестных. В этом случае возможна элиминация многих мономов, после чего могут быть эффективными другие методы решения систем алгебраических уравнений [4]. Иногда вычисления упрощаются, если использовать многочлены, равные нулю в каждой особой точке (если такая точка существует), но не обязательно принадлежащие пространству W_f. Если некоторая степень многочлена g^k равна нулю в каждой особой точке, то таков и многочлен g. Однако неизвестно, всегда ли условие $g^k \in W_f$ для некоторого $k \geqslant 2$ влечет принадлежность $g \in W_f$.

Пример 7. Пусть $f = x^3+px+q-y^2$. Координаты (x,y) точки U обозначим через (u,v). В разложении многочлена $D[f,U]$ по степеням координат u и v коэффициент при мономе u^6 равен $-27y^4+54qy^2-4p^3-27q^2$; коэффициент при мономе v^6 равен $4(x^3+px+q)$. Оба они принадлежат пространству W_f. Поскольку $4(x^3+px+q) \in W_f$, ордината особой точки кривой $f = 0$ равна нулю. При $y = 0$ многочлен $-27y^4+54qy^2-4p^3-27q^2 \in W_f$ равен константе. Следовательно, если кривая $f = 0$ особая, то выполнено равенство $-4p^3-27q^2 = 0$. В этом случае многочлен x^3+px+q имеет кратный корень, равный абсциссе особой точки этой кривой.

Пример 8. Пусть $f = x^2y + z^3$. Координаты (x, y, z) точки U обозначим через (u, v, w). В разложении многочлена $D[f, U]$ по степеням координат u, v и w коэффициент при мономе v^3w^3 равен $-4x^6$. Поскольку $-4x^6 \in W_f$, абсцисса особой точки поверхности $f = 0$ равна нулю. Действительно, эта поверхность имеет особые точки на прямой $x = z = 0$.

Пример 9. Пусть $f(x, y)$ — неприводимый многочлен второй степени, U — произвольная гладкая точка плоской кривой $f = 0$. Многочлен $B[f, U](x, y)$ не обращается в нуль, поскольку для каждой прямой, проходящей через точку U, соответствующий многочлен $r(t)/t$ — это либо линейная функция, либо ненулевая константа. Следовательно, $B[f, U]$ равен ненулевой константе, что свидетельствует о гладкости кривой.

§ 3. Обсуждение

Если коэффициенты свободного от квадратов многочлена f — целые числа, то базис пространства W_f можно вычислить детерминированным алгоритмом полиномиального времени, как описано в теореме 3. При этом вычислительная сложность быстро возрастает с ростом размерности. Пусть для многочлена f третьей степени от n переменных известен базис пространства W_f. Тогда проверка того, что некоторая линейная комбинация многочленов из W_f равна ненулевой константе или многочлену вида $1 + fg$, требует $O(n^{18})$ арифметических операций, если использовать алгоритм Гаусса для исключения переменных. Эта оценка может быть улучшена при использовании асимптотически более эффективных алгоритмов линейной алгебры [7].

С другой стороны, базис пространства W_f можно выбрать из порождающего множества $D[f, U]$ для случайно выбранных точек U. Проверка гладкости может быть выполнена быстрее, если при подходящем выборе точек U получаются многочлены с малым числом мономов [4].

Использование многочленов $B[f, U]$ предполагает наличие эффективного способа выбирать точки U с рациональными координатами, принадлежащие гиперповерхности $f = 0$. Такие точки существуют не всегда. Однако их легко найти, если известна рациональная параметризация гиперповерхности над полем рациональных чисел. Примеры такой параметризации кубических поверхностей описаны в работе [8]. С другой стороны, гладкие плоские кубические кривые нельзя параметризовать рациональными функциями.

Пример 2 и теорема 2 показывают, что в сколь угодно больших размерностях существуют гладкие кубические гиперповерхности, для которых сформулированное в теореме 1 условие выполняется. Но в общем случае вычислительная сложность проверки гладкости кубической гиперповерхности, вероятно, очень быстро возрастает при увеличении размерности, поскольку к ней сводятся некоторые комбинаторные задачи, для которых не известны разрешающие алгоритмы полиномиального времени [9]. Причину возникающих трудностей объясняют теоремы 4 и 5. Это не мешает применению найденных условий гладкости в малых размерностях для решения прикладных задач. В частности, при использовании необходимого и достаточного условия из теоремы 6. Для вещественной двумерной поверхности $f = 0$ конус $D[f, U]$ определяет видимый контур при наблюдении из точки U. Поскольку видимый контур гладкой поверхности может иметь точки возврата, для проверки гладкости необходимо сопоставлять видимые контуры с разных ракурсов. Если поверхность непрозрачная, то существенно требование обозримости [10]. Всякое компактное выпуклое тело обозримое, то есть каждая точка вне этого тела принадлежит некоторой прямой, которая не пересекается с ним. Другие обобщения класса выпуклых тел рассмотрены в работах [11, 12].

Осматривая цилиндр, можно проверить гладкость боковой поверхности или определить положение угла, если он существует. Если поверхность гладкая, то при последовательных наблюдениях из разных точек никакие три касательные плоскости не пересекаются по одной и той же прямой. Напротив, в особой точке (на углу) пересекается бесконечно много таких плоскостей, соответствующих удачно выбранным ракурсам. При этом достаточно получить последовательность кадров, сделанных одной перемещающейся камерой.

Рассмотренный метод применим к исследованию прозрачных пленок или границ, на которых скачком меняется оптическая плотность среды, например дефектов внутри прозрачных материалов. При этом касательные прямые не вычисляются, а определяются непосредственно по результатам наблюдения. Если исследуемая поверхность может быть аппроксимирована алгебраической поверхностью малой степени, то многочлен $D[f, U]$ вычисляется по конечному числу касательных прямых, проходящих через точку U. Напротив, многочлен $B[f, U]$ трудно определить непосредственно по результатам наблюдений, если наблюдатель располагается вдали от исследуемой поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eder C., Faugère J.-C. A survey on signature-based algorithms for computing Gröbner bases // Journal of Symbolic Computation. 2017. Vol. 80. Part 3. P. 719–784. DOI: 10.1016/j.jsc.2016.07.031
2. Малашонок Г.И. Новое поколение систем символьных вычислений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2026–2041. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2026-2041
3. Куликов В.Р., Степаненко В.А. О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 5. С. 200–214.
4. Herrero M.I., Jeronimo G., Sabia J. Affine solution sets of sparse polynomial systems // Journal of Symbolic Computation. 2013. Vol. 51. P. 34–54. DOI: 10.1016/j.jsc.2012.03.006
5. Селиверстов А.В. Кубические формы без мономов от двух переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 71–77. DOI: 10.20537/vm150108
6. Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. Вып. 3. С. 1–62.
7. Cenk M., Hasan M.A. On the arithmetic complexity of Strassen-like matrix multiplications // Journal of Symbolic Computation. 2017. Vol. 80. P. 484–501. DOI: 10.1016/j.jsc.2016.07.004
8. Polo-Blanco I., Top J. A remark on parameterizing nonsingular cubic surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26. Issue 8. P. 842–849. DOI: 10.1016/j.cagd.2009.06.001
9. Seliverstov A.V. On cubic hypersurfaces with involutions // International Conference Polynomial Computer Algebra'2016. Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, Euler International Mathematical Institute. Санкт-Петербург: Издательство ВВМ, 2016. С. 74–77. `http://elibrary.ru/item.asp?id=26437524`
10. Голубятников В.П. Об однозначной восстановимости выпуклых и обозримых компактов по их проекциям // Математический сборник. 1991. Т. 182. № 5. С. 611–621.
11. Ушаков В.Н., Успенский А.А. α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 95–120. DOI: 10.20537/vm160109
12. Голубятников В.П., Ровенский В.Ю. Некоторые обобщения класса k-выпуклых тел // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50. № 5. С. 1037–1049.

Поступила в редакцию 30.01.2017

Селиверстов Александр Владиславович, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, 127051, Россия, г. Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1.
E-mail: slvstv@iitp.ru

A. V. Seliverstov

On tangent lines to affine hypersurfaces

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 248–256 (in Russian).

Keywords: hypersurface, singular point, tangent line, polynomial, discriminant.

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

MSC2010: 14J70, 14Q10

DOI: 10.20537/vm170208

The article focuses on methods to look for singular points of an affine hypersurface or to confirm the smoothness of the hypersurface. Our approach is based on the description of tangent lines to the hypersurface. The existence of at least one singular point imposes a restriction on the algebraic equation that determines the set of tangent lines passing through the selected point of the space. This equation is based on the formula for the discriminant of a univariate polynomial. For an arbitrary fixed hypersurface degree, we have proposed a deterministic polynomial time algorithm for computing a basis for the subspace of the corresponding polynomials. If a linear combination of these polynomials does not vanish on the hypersurface, then the hypersurface is smooth. We state a sufficient smoothness condition, which is verifiable in polynomial time. There are smooth affine hypersurfaces for which the condition is satisfied. The set includes the graphs of cubic polynomials in many variables as well as other examples of cubic hypersurfaces. On the other hand, the condition is violated for some high-dimensional cubic hypersurfaces. This does not prevent the application of the method in low dimensions. Searching for singular points is also important for solving some problems of machine vision, including detection of a corner by means of the frame sequence with one camera on a moving vehicle.

REFERENCES

1. Eder C., Faugère J.-C. A survey on signature-based algorithms for computing Gröbner bases, *J. Symbolic Comput.*, 2017, vol. 80, part 3, pp. 719–784. DOI: 10.1016/j.jsc.2016.07.031
2. Malaschonok G.I. New generation of symbolic computation systems, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2016, vol. 21, issue 6, pp. 2026–2041 (in Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2026-2041
3. Kulikov V.R., Stepanenko V.A. On solutions and Waring's formulae for the system of n algebraic equations for n unknowns, *St. Petersburg Math. J.*, 2015, vol. 26, pp. 839–848. DOI: 10.1090/spmj/1361
4. Herrero M.I., Jeronimo G., Sabia J. Affine solution sets of sparse polynomial systems, *J. Symbolic Comput.*, 2013, vol. 51, pp. 34–54. DOI: 10.1016/j.jsc.2012.03.006
5. Seliverstov A.V. Cubic forms without monomials in two variables, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 71–77 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150108
6. Gel'fand I.M., Zelevinskii A.V., Kapranov M.M. Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polyhedra, *Leningrad Math. J.*, 1991, vol. 2, issue 3, pp. 499–505.
7. Cenk M., Hasan M.A. On the arithmetic complexity of Strassen-like matrix multiplications, *J. Symbolic Comput.*, 2017, vol. 80, pp. 484–501. DOI: 10.1016/j.jsc.2016.07.004
8. Polo-Blanco I., Top J. A remark on parameterizing nonsingular cubic surfaces, *Comput. Aided Geom. Design*, 2009, vol. 26, issue 8, pp. 842–849. DOI: 10.1016/j.cagd.2009.06.001
9. Seliverstov A.V. On cubic hypersurfaces with involutions, *International Conference Polynomial Computer Algebra'2016*, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, 2016, pp. 74–77. `http://elibrary.ru/item.asp?id=26437524`
10. Golubyatnikov V.P. On unique recoverability of convex and visible compacta from their projections, *Math. USSR-Sb.*, 1992, vol. 73, issue 1, pp. 1–10. DOI: 10.1070/SM1992v073n01ABEH002531
11. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. α-sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 95–120 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160109
12. Golubyatnikov V.P., Rovenski V.Yu. Some extensions of the class of k-convex bodies, *Sib. Math. J.*, 2009, vol. 50, issue 5, pp. 820–829. DOI: 10.1007/s11202-009-0092-6

Received 30.01.2017

Seliverstov Alexandr Vladislavovich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Bol'shoi Karetnyi per. 19, build. 1, Moscow, 127051, Russia.
E-mail: slvstv@iitp.ru