ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

УДК 517.962.24

© *Л. И. Родина, А. Х. Хаммади*

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ И ХАОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Рассматривается вероятностная модель, заданная разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [a, b], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$; μ — продолжение меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Исследуются инвариантные множества и аттракторы уравнения со случайными параметрами (1). Получены условия, при которых заданное множество является максимальным аттрактором. Показано, что внутри инвариантного множества $A \subseteq [a, b]$ могут существовать решения, хаотические с вероятностью единица. Это происходит в случае, когда существуют $m_i \in \mathbb{N}$ и множества $\Omega_i \subset \Omega$ такие, что $\mu(\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$, и $\operatorname{cl} f^{m_1}(\Omega_1, A) \cap \operatorname{cl} f^{m_2}(\Omega_2, A) = \varnothing$. Решения, хаотические с вероятностью единица, также наблюдаются в случае, когда уравнение (1) либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Результаты работы проиллюстрированы на примере непрерывно-дискретной вероятностной модели динамики изолированной популяции; для данной модели исследованы различные динамические режимы развития, которые имеют определенные отличия от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных физических системах.

Ключевые слова: разностные уравнения со случайными параметрами, притягивающий и отталкивающий циклы, хаотические решения.

DOI: 10.20537/vm170207

Введение

Известно, что многие системы различной природы обладают дискретным по времени режимом работы. Например, развитие многих биологических популяций с неперекрывающимися поколениями определяется уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{0.1}$$

где x_{n+1} — размер популяции в момент времени $n+1$ выражается через размер популяции x_n в предыдущий момент времени. Свойства решений таких уравнений описаны, в частности, в работах [1–5]. К одному из наиболее известных результатов можно отнести утверждение американских математиков Т. Ли и Дж. Йорка [1] о связи между наличием цикла периода три и существованием несчетного множества хаотических решений.

Рассмотрим обобщение модели (0.1) в предположении, что в каждый момент времени n функция f зависит также от случайного параметра ω_n, принимающего значения в множестве Ω. Получим вероятностную модель, заданную разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{0.2}$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$, $I = [a, b]$. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \mapsto f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Будем полагать, что вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$ является пространством Лебега. Это означает, что если $\Omega \subset \mathbb{R}$, то Ω изоморфно «стандартному образцу», состоящему из некоторого отрезка Δ и не более чем счетного множества точек v_i (этот «образец» может состоять только из отрезка Δ или только из точек v_i). Пространство снабжено следующей мерой: на Δ мера пропорциональна мере Лебега, а каждой из точек v_i приписывается мера $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, при этом мера предполагается нормированной, то есть $\widetilde{\mu}(\Omega) = \widetilde{\mu}(\Delta) + \sum \mu_i = 1$.

Введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma \colon \omega_0 \in \Omega_0, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где} \quad \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ j = 0, \ldots, n,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_n) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_n)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (например, [6, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Исследование асимптотического поведения решений уравнения (0.2) начато в [7, 8]. В этих работах получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geqslant 1$, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, а также условия, при которых решения хаотические с вероятностью единица. Показано, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение (0.2) либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. При этом предполагается, что $\Omega = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $r \geqslant 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i = 1$ и каждая из функций $f(v_i, x)$, $i = 1, \ldots, r$, имеет конечное число неподвижных точек на отрезке I. В данной работе подобное утверждение доказано без дополнительных ограничений на множество Ω. Таким образом, в отличие от результатов Т. Ли и Дж. Йорка для детерминированного уравнения (0.1), наличие хаотических решений уравнения (0.2) не связано с длиной цикла, а зависит от наличия цикла и его асимптотических свойств.

Здесь также исследуются инвариантные множества и аттракторы уравнения со случайными параметрами (0.2); получены условия, при которых решения, выходящие из любой точки инвариантного множества, являются хаотическими с вероятностью единица. Результаты работы проиллюстрированы на примере непрерывно-дискретной вероятностной модели динамики изолированной популяции; для данной модели исследованы различные динамические режимы развития, которые имеют определенные отличия от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных физических системах.

§ 1. Основные определения

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma_n \doteq (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}), \qquad f^n(\sigma_n, x) \doteq f\big(\omega_{n-1}, \ldots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))\big).$$

Будем также пользоваться обозначениями $x_n(\sigma, x) = f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma_n, x)$, подразумевая, что значения функции $f^n(\sigma, x)$ зависят только от первых n членов последовательности σ, $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$.

Условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geqslant 1$, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, получены в работе [8]. Приведем основные определения и некоторые результаты данной работы.

Определение 1. Точки $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ образуют *цикл B периода $k \geqslant 1$* для уравнения (0.2), если для всех $\sigma_k \in \Omega^k$ выполнены равенства

$$f^k(\sigma_k, \beta_0) = \beta_0, \quad f^m(\sigma_m, \beta_0) = \beta_m \quad \text{для всех} \quad m = 1, \ldots, k-1$$

и цикл B не содержит цикла меньшего периода.

Положением равновесия (неподвижной точкой) уравнения (0.2) называется точка $x^* \in I$ такая, что $f(\omega, x^*) = x^*$ для всех $\omega \in \Omega$. Положение равновесия является циклом длины один.

Определение 2. Цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ называется *притягивающим циклом* для уравнения (0.2), если существует окрестность U этого цикла такая, что $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Цикл B называется *притягивающим с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность $U = U(\sigma)$ цикла B такая, что $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$.

Определение 3. Цикл B называется *отталкивающим циклом* уравнения (0.2), если существует его окрестность U, которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время, то есть для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$. Цикл B называется *отталкивающим с вероятностью единица,* если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. *Если уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ и существует окрестность U этого цикла такая, что*

$$M\Big(\ln \sup_{x\in U} \big|\big(f^k(\sigma, x)\big)'_x\big|\Big) < 0,$$

то цикл B является притягивающим с вероятностью единица.

Если существует окрестность U цикла B такая, что $M\Big(\ln \inf\limits_{x\in U} \big|\big(f^k(\sigma, x)\big)'_x\big|\Big) > 0$, то цикл B — отталкивающий с вероятностью единица.

§ 2. Инвариантные множества и аттракторы уравнения со случайными параметрами

Образ множества A при преобразовании $f(\omega, x)$, $x \in A$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ будем обозначать $f(\omega, A)$, тогда $f(\Omega, A) \doteq \bigcup\limits_{\omega\in\Omega} f(\omega, A)$. Множество A является *инвариантным* множеством уравнения со случайными параметрами (0.2), если $f(\Omega, A) \subseteq A$.

Инвариантным множеством уравнения (0.2) является весь отрезок $I = [a, b]$. Отрезок $A = [\widehat{a}, \widehat{b}] \neq I$ — инвариантное множество, если неравенства $\min\limits_{x\in A} f(\omega, x) \geqslant \widehat{a}$ и $\max\limits_{x\in A} f_2(\omega, x) \leqslant \widehat{b}$ выполнены для всех $\omega \in \Omega$. Если уравнение (0.2) имеет цикл периода $k \geqslant 1$, то этот цикл также являются инвариантным множеством данного уравнения.

Пусть $f^n(\Omega^n, A) \doteq f\big(\Omega, f^{n-1}(\Omega^{n-1}, A)\big)$, $n = 2, 3, \ldots$.

Определение 4. Множество $A(f, \Omega)$ назовем *максимальным аттрактором* уравнения (0.2), если существует окрестность U множества $A(f, \Omega)$ такая, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f^n(\Omega^n, U) = A(f, \Omega)$.

Лемма 1. *Пусть $A = [\widehat{a}, \widehat{b}]$, $a < \widehat{a} \leqslant \widehat{b} < b$, инвариантное множество уравнения (0.2) и существуют постоянные $K \in [0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $\omega \in \Omega$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} \widehat{a} + K(x - \widehat{a}) \leqslant f(\omega, x) \leqslant \widehat{b} - K(x - \widehat{a}), \ \ \text{если } x \in (\widehat{a} - \varepsilon, \widehat{a}), \\ \widehat{a} - K(x - \widehat{b}) \leqslant f(\omega, x) \leqslant \widehat{b} + K(x - \widehat{b}), \ \ \text{если } x \in (\widehat{b}, \widehat{b} + \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда имеет место включение $A(f, \Omega) \subseteq A$.

Если, кроме того, $f(\Omega, A) = A$, то A является максимальным аттрактором (0.2).

Доказательство. Пусть $U = (\widehat{a} - \varepsilon, \widehat{b} + \varepsilon)$. Так как множество A инвариантное, то из (2.1) следует, что для всех $\omega \in \Omega$ и всех $x \in U$ выполнены неравенства

$$\widehat{a} - \varepsilon K \leqslant f(\omega, x) \leqslant \widehat{b} + \varepsilon K.$$

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

Следовательно, $f(\Omega,U)\subseteq(\widehat{a}-\varepsilon K,\widehat{b}+\varepsilon K)\doteq U_1$. Далее, из (2.1) получаем

$$f^2(\Omega^2,U)\doteq f\big(\Omega,f(\Omega,U)\big)\subseteq f(\Omega,U_1)\subseteq\big(\widehat{a}-\varepsilon K^2,\widehat{b}+\varepsilon K^2\big).$$

Аналогично для любого $n\in\mathbb{N}$ имеет место включение

$$f^n(\Omega^n,U)\subseteq\big(\widehat{a}-\varepsilon K^n,\widehat{b}+\varepsilon K^n\big).$$

Таким образом, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^n(\Omega^n,U)\subseteq A=[\widehat{a},\widehat{b}]$, то есть $A(f,\Omega)\subseteq A$.

Если $f(\Omega,A)=A$, то $A\subseteq f(\Omega,U)$, следовательно, $A\subseteq f^n(\Omega^n,U)$ для любого $n\in\mathbb{N}$; поэтому $A\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^n(\Omega^n,U)$. С учетом доказанного выше $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^n(\Omega^n,U)=A(f,\Omega)$. □

Теорема 2. *Пусть $A=[\widehat{a},\widehat{b}]$, $a<\widehat{a}\leqslant\widehat{b}<b$, инвариантное множество уравнения (0.2) и существуют постоянные $\varepsilon>0$ и $K_i\geqslant 0$, $i=1,2,3,4$, такие, что $K_1<1$, $K_4<1$ и для всех $\omega\in\Omega$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned}\widehat{a}+K_1(x-\widehat{a})\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}-K_2(x-\widehat{a}),\quad &\textit{если}\ x\in(\widehat{a}-\varepsilon,\widehat{a}),\\ \widehat{a}-K_3(x-\widehat{b})\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}+K_4(x-\widehat{b}),\quad &\textit{если}\ x\in(\widehat{b},\widehat{b}+\varepsilon).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Если, кроме того, выполнено хотя бы одно из условий:

1) $K_2<1$ *и* $K_3\cdot\max(K_1,K_2,K_4)<1$,

2) $K_3<1$ *и* $K_2\cdot\max(K_1,K_3,K_4)<1$,

то для максимального аттрактора уравнения (0.2) имеет место включение $A(f,\Omega)\subseteq A$.

Если, кроме перечисленных выше условий, выполнено равенство $f(\Omega,A)=A$, то A является максимальным аттрактором уравнения (0.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда выполнено первое условие, то есть $K_2<1$ и $K_3\cdot\max(K_1,K_2,K_4)<1$. Обозначим $K=\max(K_1,K_2,K_4)<1$, $L=K_3$, тогда $KL<1$. Если $K_3<1$, то утверждение теоремы является следствием леммы 1, поэтому будем предполагать, что $L=K_3\geqslant 1$. Пусть $U=\big(\widehat{a}-\varepsilon_0,\widehat{b}+\varepsilon_0\big)$, где $\varepsilon_0=\varepsilon/L$. Из (2.2) следует, что для всех $\omega\in\Omega$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\widehat{a}-\varepsilon_0K_1\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}+\varepsilon_0K_2,\quad &x\in(\widehat{a}-\varepsilon_0,\widehat{a}),\\ \widehat{a}-\varepsilon_0L\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}+\varepsilon_0K_4,\quad &x\in(\widehat{b},\widehat{b}+\varepsilon_0).\end{aligned}$$

Так как множество A инвариантное, то

$$\widehat{a}-\varepsilon_0\max(K_1,L)\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}+\varepsilon_0\max(K_2,K_4)$$

для всех $\omega\in\Omega$ и всех $x\in U$. Тогда $f(\Omega,U)\subseteq(\widehat{a}-\varepsilon_0L,\widehat{b}+\varepsilon_0K)\subset\big(\widehat{a}-\varepsilon,\widehat{b}+\varepsilon\big)$.

Далее, из (2.2) получаем, что для всех $\omega\in\Omega$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\widehat{a}-\varepsilon_0K_1L\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}+\varepsilon_0K_2L,\quad &x\in(\widehat{a}-\varepsilon_0L,\widehat{a}),\\ \widehat{a}-\varepsilon_0KL\leqslant f(\omega,x)\leqslant\widehat{b}+\varepsilon_0K_4K,\quad &x\in(\widehat{b},\widehat{b}+\varepsilon_0K).\end{aligned}$$

Следовательно, $f^2(\Omega^2,U)\subseteq\big(\widehat{a}-\varepsilon_0KL,\widehat{b}+\varepsilon_0KL\big)$. Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}f^{2m-1}(\Omega^{2m-1},U)\subseteq\big(\widehat{a}-\varepsilon_0K^{m-1}L^m,\widehat{b}+\varepsilon_0K^mL^{m-1}\big),\quad &m\in\mathbb{N},\\ f^{2m}(\Omega^{2m},U)\subseteq\big(\widehat{a}-\varepsilon_0K^mL^m,\widehat{b}+\varepsilon_0K^mL^m\big),\quad &m\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

поэтому $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^n(\Omega^n,U)\subseteq A=[\widehat{a},\widehat{b}]$, то есть $A(f,\Omega)\subseteq A$.

Пусть $K_3 < 1$ и $K_2 \cdot \max(K_1, K_3, K_4) < 1$, здесь обозначим $K = \max(K_1, K_3, K_4) < 1$, $L = K_2$, тогда $KL < 1$. Можно предполагать, что $L \geqslant 1$, тогда, аналогично первому случаю, для $U = \bigl(\widehat{a} - \varepsilon_0, \widehat{b} + \varepsilon_0\bigr)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon/L$ имеют место включения

$$f^{2m-1}(\Omega^{2m-1}, U) \subseteq \bigl(\widehat{a} - \varepsilon_0 K^m L^{m-1}, \widehat{b} + \varepsilon_0 K^{m-1} L^m\bigr), \quad m \in \mathbb{N},$$
$$f^{2m}(\Omega^{2m}, U) \subseteq \bigl(\widehat{a} - \varepsilon_0 K^m L^m, \widehat{b} + \varepsilon_0 K^m L^m\bigr), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $A(f, \Omega) \subseteq A$.

Последнее утверждение доказывается так же, как в лемме 1. □

Пример 1. Найдем инвариантные множества и максимальные аттракторы уравнения

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [0,1], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.3}$$

где $\Omega \subset (0,2]$, $f(\omega, x) = \begin{cases} \omega x, & x \in [0, 1/2], \\ \omega(1-x), & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$

Пусть $\inf\limits_{\omega \in \Omega} = v_1$, $\sup\limits_{\omega \in \Omega} = v_2$, $0 < v_1 \leqslant v_2 \leqslant 2$. Рассмотрим следующие случаи:

1) если $v_1 \leqslant v_2 \leqslant 1$, то инвариантным множеством уравнения (2.3) является любое множество $A = [0, b_1]$, где $b_1 \in [0, 1]$, максимальный аттрактор — $A = \{0\}$;

2) если $1 < v_1 \leqslant v_2 \leqslant 2$, то инвариантным множеством является любой отрезок $[a_1, b_1]$, где $0 \leqslant a_1 \leqslant v_1\Bigl(1 - \dfrac{v_2}{2}\Bigr)$, $\dfrac{v_2}{2} \leqslant b_1 \leqslant 1 - \dfrac{a_1}{v_1}$. Максимальным аттрактором уравнения (2.3) является множество $A = \Bigl[v_1\Bigl(1 - \dfrac{v_2}{2}\Bigr), \dfrac{v_2}{2}\Bigr]$; это следует из теоремы 2, если положить $\varepsilon = (v_1 - 1)\Bigl(1 - \dfrac{v_2}{2}\Bigr)$, $K_1 = K_2 = K_4 = 0$, $K_3 = v_1$;

3) Если $v_1 < 1 < v_2 \leqslant 2$, то инвариантным множеством является любой отрезок $[0, b_1]$, где $\dfrac{v_2}{2} \leqslant b_1 \leqslant 1$, максимальный аттрактор — $A = \Bigl[0, \dfrac{v_2}{2}\Bigr]$.

§ 3. Поведение решений внутри инвариантного множества. Решения, хаотические с вероятностью единица

Для детерминированного уравнения (0.1), кроме периодических решений и решений, приближающихся к периодическим, существует еще один тип поведения решения. Это так называемые хаотические решения, которые не являются периодическими и даже не стремятся ни к какому положению равновесия или циклу. Решение $x_n(x_0)$ уравнения (0.1) называется хаотическим [9, с. 35], если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(x_0)$ не существует.

Так же как и в детерминированном случае, решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (0.2) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует.

Определение 5. Точку $x_0 \in I$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (0.2), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические. Таким образом, множество хаотических решений $x_n(\sigma, x_0)$, порожденных апериодической с вероятностью единица точкой x_0, имеет меру единица.

Обозначим через $\operatorname{cl} A$ замыкание множества A, то есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

Теорема 3. *Пусть множество $A \subseteq I$ инвариантное. Если существуют $m_i \in \mathbb{N}$ и множества $\Omega_i \subset \Omega$ такие, что $\mu(\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$, и*

$$\operatorname{cl} f^{m_1}(\Omega_1, A) \cap \operatorname{cl} f^{m_2}(\Omega_2, A) = \varnothing, \tag{3.1}$$

то любая точка $x_0 \in A$ апериодическая с вероятностью единица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mu(\Omega_1) > 0$, $\mu(\Omega_2) > 0$, то в последовательности $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$ с вероятностью единица появятся хотя бы одна серия событий Ω_1 длиной m_1 и хотя бы одна серия событий Ω_2 длиной m_2 (следовательно, появится бесконечно много таких серий), см. [10, с. 338]. Пусть первая серия событий Ω_1 длиной m_1 появится в моменты времени $k_1+1, \ldots, k_1+m_1$, $k_1 \geqslant 0$. В силу инвариантности множества A для любого $x_0 \in A$ выполнено включение $x_{k_1}(\sigma, x_0) \in A$, тогда $x_{k_1+m_1}(\sigma, x_0) \in f^{m_1}(\Omega_1, A)$. После появления второй серии событий Ω_2 длиной m_2 в моменты времени $k_2+1, \ldots, k_2+m_2$, $k_2 \geqslant k_1+m_1$, имеет место включение $x_{k_2+m_2}(\sigma, x_0) \in f^{m_2}(\Omega_2, A)$. Поскольку с вероятностью единица появится бесконечно много серий событий Ω_1 и Ω_2, то найдется бесконечно много моментов времени $s \in \mathbb{N}$ таких, что $x_s(\sigma, x_0) \in f^{m_1}(\Omega_1, A)$, и бесконечно много моментов времени $\ell \in \mathbb{N}$ таких, что $x_\ell(\sigma, x_0) \in f^{m_2}(\Omega_2, A)$. Таким образом, из условия (3.1) следует, что с вероятностью единица предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\sigma, x_0)$ не существует.

Покажем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует для любого $k \in \mathbb{N}$. Так как множество A инвариантно, то $f^{m_i}(\Omega_i, A) \subseteq A$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$f^{2m_i}(\Omega_i, A) \subseteq f^{m_i}(\Omega_i, A) \subseteq A$$

и $f^{km_i}(\Omega_i, A) \subseteq f^{m_i}(\Omega_i, A)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Рассмотрим подпоследовательность $(\omega_k, \omega_{2k}, \omega_{3k}, \ldots)$ последовательности $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$; в этой подпоследовательности с вероятностью единица появится бесконечно много серий событий Ω_1 длиной km_1 и бесконечно много серий событий Ω_2 длиной km_2. Пусть первая серия событий Ω_1 длиной km_1 появилась в моменты времени $k\ell_1+1, \ldots, k(\ell_1+m_1)$, тогда для любого $x_0 \in A$ выполнено включение

$$x_{k(\ell_1+m_1)}(\sigma, x_0) \in f^{km_1}\big(\Omega_1, x_{k\ell_1}(\sigma, x_0)\big) \subseteq f^{km_1}(\Omega_1, A) \subseteq f^{m_1}(\Omega_1, A).$$

Аналогично получаем, что если серия событий Ω_2 длиной km_2 появилась в моменты времени $k\ell_2+1, \ldots, k(\ell_2+m_2)$, где $\ell_2 \geqslant \ell_1+m_1$, то $x_{k(\ell_2+m_2)}(\sigma, x_0) \in f^{m_2}(\Omega_2, A)$. Поскольку таких серий событий с вероятностью единица появится бесконечно много, то мы получим бесконечно много точек последовательности $x_{nk}(\sigma, x_0)$, содержащихся в множествах $f^{m_1}(\Omega_1, A)$ и $f^{m_2}(\Omega_2, A)$. Это и означает, что предел $x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует. □

Аналогично определению работы [1] точку y назовем *со временем периодической* (*предпериодической*) точкой уравнения (0.2), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $\sigma_m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma_m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geqslant 1$.

Например, для логистического уравнения

$$x_{n+1} = \omega_n x_n (1 - x_n/K), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [0, K], \quad n = 0, 1, \ldots$$

точка $x = 0$ является точкой положения равновесия (точкой периода $k = 1$), а точка $x = K$ — со временем периодическая.

Теорема 4. *Предположим, что уравнение* (0.2) *либо не имеет ни одного цикла* (*периода* $k \geqslant 1$), *либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Пусть* Y — *множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка* $x_0 \in I \setminus Y$ *апериодическая с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что если уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ периода $k \geqslant 1$, то этот цикл отталкивающий с вероятностью единица, то есть если

$$\lim_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = \beta_i, \quad i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \tag{3.2}$$

для некоторого $\sigma \in \Sigma_0$, $\Sigma_0 \subset \Sigma$, то $\mu(\Sigma_0) = 0$. Если уравнение (0.2) не имеет циклов, то для некоторого $k \in \mathbb{N}$ могут существовать точки $\beta_0 \in I, \ldots, \beta_{k-1} \in I$, которые образуют цикл длины k только для определенного семейства функций $f(\omega, x)$, $\omega \in \Omega_*$, где $\mu(\Omega_*) < 1$. Если этот цикл устойчивый для данного семейства функций, то равенство (3.2) выполнено для всех $\sigma \in \Omega_*^\infty$; так как $\mu(\Omega_*^\infty) = 0$, то (3.2) выполнено с вероятностью нуль. Это тем более верно, если цикл B не является устойчивым. Таким образом, для любой начальной точки $x_0 \in I$ и любого цикла B (относительно семейства функций $f(\omega, x)$, $\omega \in \Omega$ или $f(\omega, x)$, $\omega \in \Omega_*$) равенство (3.2) имеет место с нулевой вероятностью, то есть предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ существует с вероятностью нуль. Следовательно, с вероятностью единица данный предел не существует. $\square$

§ 4. О поведении решений непрерывно-дискретной вероятностной модели динамики изолированной популяции

В детерминированном случае данная модель описана в работах [11, 12]. Приведем вероятностный аналог модели. Пусть $x(t)$ характеризует численность некоторой изолированной популяции в момент времени t. Процесс смертности особей предполагаем непрерывным, а размножение происходит в случайные моменты времени τ_n, $n = 1, 2, \ldots$, причем появление особей новых генераций в популяции происходит синхронно. Предполагаем, что процесс гибели особей описывается уравнением $\dot{x} = -xR(x)$, где $R(x)$ — интенсивность гибели особей удовлетворяет условиям

$$R(0) > 0, \quad R'(x) > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} R(x) = +\infty.$$

Изменение численности популяции в момент времени τ_n описывается соотношением

$$x_n = x(\tau_n) = \psi_{n-1} x(\tau_n - 0), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где ψ_n — коэффициент рождаемости данной популяции (случайная величина, зависящая от погодных условий и других факторов внешней среды), $x(\tau_n - 0)$ — количество особей, доживших до момента τ_n и способных давать потомство.

Пусть $\tau_0 = 0$, обозначим $\theta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$, $n = 0, 1, \ldots$ — длины интервалов между моментами появления новых генераций. Предполагаем, что случайные величины $\theta_0, \theta_1, \ldots$ и $\psi_0, \psi_1, \ldots$ являются независимыми, длины интервалов $\theta_0, \theta_1, \ldots$ принимают значения в множестве $[\alpha_1, \alpha_2] \subset (0, \infty)$, коэффициенты рождаемости $\psi_0, \psi_1, \ldots$ содержатся в $[\beta_1, \beta_2] \subset (0, \infty)$. Далее, пусть $\Omega = [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$, $\omega_n = (\theta_n, \psi_n) \in \Omega$, $n = 0, 1, \ldots$, вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ определим так же, как во введении.

Пусть $R(x) = cx + d$, где $c > 0$, $d > 0$. Если начальный размер популяции равен $x_0 \in [0, b]$, а длина промежутка до следующего момента появления новых особей равна θ_0, то, решая уравнение $\dot{x} = -x(cx + d)$, находим, что перед этим моментом размер популяции составит

$$x(\tau_1 - 0) = \frac{dx_0}{(cx_0 + d)e^{d\theta_0} - cx_0}.$$

Следовательно,

$$x_1 = x(\tau_1) = \psi_0 x(\tau_1 - 0) = \frac{d\psi_0 x_0}{(cx_0 + d)e^{d\theta_0} - cx_0}.$$

Аналогично получаем, что

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1}$$

где $f(\omega, x) = f(\theta, \psi, x) = \dfrac{d\psi x}{(cx + d)e^{d\theta} - cx}$, $\Omega = [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$, $I = [0, b]$.

Уравнение со случайными параметрами (4.1) имеет неподвижную точку $x^* = 0$. Если в этом уравнении зафиксируем $\omega = (\theta, \psi) \in \Omega$, то полученное детерминированное уравнение, кроме точки $x^* = 0$, может иметь неподвижную точку $x^*(\theta, \psi) = \dfrac{d(\psi - e^{d\theta})}{c(e^{d\theta} - 1)}$ (в том случае, если $\psi > e^{d\theta}$). Обозначим

$$x_1^* = x^*(\alpha_2, \beta_1) = \frac{d(\beta_1 - e^{\alpha_2 d})}{c(e^{\alpha_2 d} - 1)}, \quad x_2^* = x^*(\alpha_1, \beta_2) = \frac{d(\beta_2 - e^{\alpha_1 d})}{c(e^{\alpha_1 d} - 1)}.$$

Тогда $x_1^*>0$, если $\beta_1>e^{\alpha_2 d}$; $x_2^*>0$, если $\beta_2>e^{\alpha_1 d}$; $x_1^*<x_2^*$, если $\alpha_1\neq\alpha_2$ или $\beta_1\neq\beta_2$.

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $\beta_2\leqslant e^{\alpha_1 d}$, *то инвариантным множеством уравнения* (4.1) *является любой отрезок* $[0,b_1]$, *где* $b_1\leqslant b$; *максимальный аттрактор —* $A=\{0\}$*;*

2) *если* $\beta_1\leqslant e^{\alpha_2 d}$, $\beta_2>e^{\alpha_1 d}$, *то инвариантным множеством является любой отрезок* $[0,b_1]$, *где* $b_1\in[x_2^*,b]$; *максимальный аттрактор —* $A=[0,x_2^*]$*;*

3) *Если* $\beta_1>e^{\alpha_2 d}$, *то инвариантными множествами являются множества* $\{0\}$ *и* $[a_1,b_1]$, *где* $0\leqslant a_1\leqslant x_1^*<x_2^*\leqslant b_1$; *максимальный аттрактор —* $A=[x_1^*,x_2^*]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\beta_2\leqslant e^{\alpha_1 d}$, то для каждого $\omega\in\Omega$ уравнение (4.1) имеет только неподвижную точку $x^*=0$, и неравенство $f(\omega,x)<x$ выполнено для всех $x\in(0,b]$. Поэтому $f\big(\Omega,[0,b_1]\big)\subseteq[0,b_1]$, то есть любой отрезок $[0,b_1]$, $b_1\leqslant b$, является инвариантным множеством уравнения (4.1). Пусть $U=[0,\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^n\big(\Omega^n,U\big)=\{0\}$, следовательно, множество $A=\{0\}$ — максимальный аттрактор.

Если $\beta_1\leqslant e^{\alpha_2 d}$, $\beta_2>e^{\alpha_1 d}$, то $f(\omega,x)<x$ для всех $x\in(x_2^*,b]$ и всех $\omega\in\Omega$. Кроме того, функция $x\mapsto f(\alpha_1,\beta_2,x)$ возрастает и имеет неподвижную точку x_2^*; поэтому инвариантным множеством является любой отрезок $[0,b_1]$, где $b_1\in[x_2^*,b]$. Далее,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}f^n\big(\Omega^n,[0,x_2^*+\varepsilon)\big)=[0,x_2^*]$$

для любого $\varepsilon>0$, следовательно, $A=[0,x_2^*]$ — максимальный аттрактор уравнения (4.1).

Последнее утверждение доказывается аналогично, с учетом того, что x_1^* и x_2^* являются неподвижными точками функций $f(\alpha_2,\beta_1,x)$ и $f(\alpha_1,\beta_2,x)$ соответственно, и

$$f(\alpha_2,\beta_1,x)\leqslant f(\omega,x)\leqslant f(\alpha_1,\beta_2,x)$$

для всех $x\in I$, $\omega\in\Omega$. □

Предложение 2. *Если* $M\ln\psi>dM\theta$, *то каждая точка* $x_0\in(0,b]$ *апериодическая с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4.1) имеет цикл $B=\{0\}$ длины один. Покажем, что если $M\ln\psi>dM\theta$, то цикл B отталкивающий с вероятностью единица. В силу теоремы 1 для этого нужно показать, что существует окрестность $U=[0,\varepsilon)$ цикла B такая, что

$$M\Big(\ln\inf_{x\in U}\big|f'_x(\omega,x)\big|\Big)>0. \tag{4.2}$$

Сначала найдем $\inf\limits_{x\in U}\big|f'_x(\omega,x)\big|=\inf\limits_{x\in[0,\varepsilon)}\big|f'_x(\theta,\psi,x)\big|=\psi e^{-d\theta}\Big(\dfrac{de^{d\theta}}{\varepsilon c(e^{d\theta}-1)+de^{d\theta}}\Big)^2$. Далее,

$$M\Big(\ln\inf_{x\in U}\big|f'_x(\omega,x)\big|\Big)=M\ln\psi-dM\theta+2M\ln\frac{de^{d\theta}}{\varepsilon c(e^{d\theta}-1)+de^{d\theta}}. \tag{4.3}$$

При $\varepsilon\to 0$ последнее слагаемое в (4.3) стремится к нулю, поэтому из неравенства $M\ln\psi>dM\theta$ следует справедливость (4.2) в некоторой окрестности $U=[0,\varepsilon)$. Так как цикл B отталкивающий с вероятностью единица, то в силу теоремы 4 любая точка $x_0\in(0,b]$ апериодическая с вероятностью единица. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li T.-Y., Yorke J.A. Period three implies chaos // The American Mathematical Monthly. 1975. Vol. 82. No. 10. P. 985–992. DOI: 10.2307/2318254
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
4. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 360 с.
5. Шарковский А.Н. Аттракторы траекторий и их бассейны. Киев: Наукова думка, 2013. 320 с.
6. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
7. Родина Л.И., Тютеев И.И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 79–86. DOI: 10.20537/vm160107
8. Родина Л.И. Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 227–235. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-227-235
9. Братусь А.С., Новожилов А.С., Родина Е.В. Дискретные динамические системы и математические модели в экологии. М.: МИИТ, 2005. 139 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.
11. Недорезов Л.В., Назаров И.Н. Непрерывно-дискретные модели динамики изолированной популяции и двух конкурирующих видов // Математические структуры и моделирование. 1998. Вып. 2. С. 77–91.
12. Недорезов Л.В., Недорезова Б.Н. Модификация моделей Морана–Риккера динамики численности изолированной популяции // Журнал общей биологии. 1994. Т. 55. № 4–5. С. 514–521.

Поступила в редакцию 12.04.2017

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Хаммади Алаа Хуссейн, к. ф.-м. н., кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
преподаватель, Университет Аль-Кадисия, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com

L. I. Rodina, A. H. Hammady

On the invariant sets and chaotic solutions of difference equations with random parameters

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 238–247 (in Russian).

Keywords: difference equations with random parameters, stable and unstable cycles, chaotic solutions.

MSC2010: 37H10, 34F05, 60H25, 93E03

DOI: 10.20537/vm170207

We consider the probability model defined by the difference equation

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [a, b], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

where Ω is a given set with sigma-algebra of subsets $\widetilde{\mathfrak{A}}$, on which a probability measure $\widetilde{\mu}$ is defined. Let μ be a continuation of the measure $\widetilde{\mu}$ on the sigma-algebra generated by cylindrical sets. We study invariant sets and attractors of the equation with random parameters (1). We receive conditions under which a given set is the maximal attractor. It is shown that, in invariant set $A \subseteq [a,b]$, there can be solutions, which are chaotic with probability one. It is observed in the case when exist an $m_i \in \mathbb{N}$ and sets $\Omega_i \subset \Omega$ such that $\mu(\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$, and $\operatorname{cl} f^{m_1}(\Omega_1, A) \cap \operatorname{cl} f^{m_2}(\Omega_2, A) = \varnothing$. It is shown, that solutions, chaotic with probability one, exist also in the case when the equation (1) either has no any cycle, or all cycles are unstable with probability one. The results of the paper are illustrated by the example of a continuous-discrete probabilistic model of the dynamics of an isolated population; for this model we investigate different modes of dynamic development, which have certain differences from the modes of determined models and describe the processes in real physical systems more exhaustively.

REFERENCES

1. Li T.-Y., Yorke J.A. Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly*, 1975, vol. 82, no. 10, pp. 985–992. DOI: 10.2307/2318254
2. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv* (Stability of biological communities), Moscow: Nauka, 1978, 352 p.
3. Sharkovskii A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V. *Dinamika odnomernykh otobrazhenii* (Dynamics of one-dimensional mappings), Kiev: Naukova dumka, 1989, 216 p.
4. Bobrovski D. *Vvedenie v teoriyu dinamicheskikh sistem s diskretnym vremenem* (Introduction to the theory of discrete-time dynamical systems), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2006, 360 p.
5. Sharkovskii A.N. *Attraktory traektorii i ikh basseiny* (Attractors of trajectories and their basins), Kiev: Naukova dumka, 2013, 320 p.
6. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 580 p.
7. Rodina L.I., Tyuteev I.I. About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 79–86 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160107
8. Rodina L.I. On repelling cycles and chaotic solutions of difference equations with random parameters, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 227–235 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-227-235
9. Bratus' A.S., Novozhilov A.S., Rodina E.V. *Diskretnye dinamicheskie sistemy i matematicheskie modeli v ekologii* (Discrete dynamic systems and mathematical models in ecology), Moscow: Moscow State University of Railway Engineering, 2005, 139 p.
10. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1*, Wiley, 1971. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya, vol. 1*, Moscow: Mir, 1984, 528 p.
11. Nedorezov L.V., Nazarov I.N. Continuous-discrete models of dynamics of an isolated population and two competing species, *Mat. Strukt. Model.*, 1998, issue 2, pp. 77–91 (in Russian).
12. Nedorezov L.V., Nedorezova B.N. Modification of Moran–Ricker models for dynamics of number of the isolated population, *Zhurnal Obshchei Biologii*, 1994, vol. 55, no. 4–5, pp. 514–521 (in Russian).

Received 12.04.2017

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: LRodina67@mail.ru

Hammady Alaa Hussein, Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com