ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

УДК 517.952, 517.977

© *А. Р. Плаксин*

ОБ УРАВНЕНИИ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–АЙЗЕКСА–БЕЛЛМАНА ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

Для конфликтно-управляемой динамической системы, описываемой функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла, рассматривается дифференциальная игра с показателем качества, который оценивает историю движения, реализующуюся к терминальному моменту времени, а также включает интегральную оценку реализаций управлений игроков. Игра формализуется в классе чистых позиционных стратегий. На основе понятия коинвариантных производных для функционала цены этой игры выписывается функциональное уравнение Гамильтона–Якоби. Доказывается, во-первых, что решение этого уравнения, удовлетворяющее определенным условиям гладкости, является ценой исходной дифференциальной игры, а во-вторых, что цена в точках дифференцируемости удовлетворяет выписанному уравнению Гамильтона–Якоби. Таким образом, это уравнение можно трактовать как уравнение Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана для систем нейтрального типа.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, дифференциальные игры, уравнение Гамильтона–Якоби.

DOI: 10.20537/vm170206

Введение

Статья посвящена развитию теории дифференциальных игр [1–6] и функциональных уравнений Гамильтона–Якоби [7–14] для функционально-дифференциальных систем нейтрального типа. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра на конечном промежутке времени, в которой движение динамической системы описывается функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла [15]. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления состоит из двух слагаемых. Первое оценивает историю движения системы, сложившуюся к терминальному моменту времени, второе содержит интегральную оценку реализаций управлений игроков. Игра формализуется в классе чистых позиционных стратегий в рамках подхода [2–4]. На основе понятия коинвариантных производных [16] для функционала цены игры выписывается функциональное уравнение Гамильтона–Якоби. Основное отличие этого уравнения от его частного случая — уравнения Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными для систем с запаздыванием [10, 12, 13] — заключается в появлении нового слагаемого, которое вносит существенные сложности при анализе таких уравнений и приводит к необходимости их дополнительного изучения. Доказывается, что функционал, удовлетворяющий такому функциональному уравнению и дополнительным условиям гладкости, является ценой исходной дифференциальной игры, а стратегии игроков, строящиеся на основе метода экстремального сдвига в направлении коинвариантного градиента этого функционала, являются оптимальными. При использовании конструкций характеристических комплексов [7, 10] показывается, что цена дифференциальной игры в точках гладкости удовлетворяет выписанному уравнению Гамильтона–Якоби. Таким образом, по аналогии с [4, 12, 13] это уравнение можно трактовать как уравнение Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана для систем нейтрального типа.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК–3047.2017.1.

§ 1. Дифференциальная игра

Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла [15]:

$$\frac{d}{dt}\Big(x[t]-g\big(t,x_t[\cdot]\big)\Big)=f\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big),\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad x[t]\in\mathbb{R}^n,\quad u[t]\in\mathbb{U},\quad v[t]\in\mathbb{V}.\qquad(1.1)$$

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент времени t; t_0 и ϑ— фиксированные начальный и терминальный моменты; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке времени $[t-h,t]$, то есть $x_t[\xi]=x[t+\xi]$, $\xi\in[-h,0]$, где $h=\mathrm{const}>0$; $u[t]$ и $v[t]$ — текущие управляющие воздействия; $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^{n_2}$ — компакты.

Всюду ниже угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\|\cdot\|$ — для евклидовой нормы. Через $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначаем соответственно пространства непрерывных и липшицевых функций, действующих из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$. Считаем, что пространство $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ наделено равномерной нормой. Для краткости примем обозначения $C=C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{Lip}=\mathrm{Lip}([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Равномерную норму в пространстве C будем обозначать через $\|\cdot\|_C$.

Полагаем, что для отображения $g\colon[t_0,\vartheta]\times C\mapsto\mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:

$(g.1)$ существуют такие числа $\lambda_g>0$ и $h_0\in(0,h)$, что имеет место оценка

$$\big\|g\big(t,w[\cdot]\big)-g\big(t,r[\cdot]\big)\big\|\leqslant\lambda_g\max_{\xi\in[-h,-h_0]}\big\|w[\xi]-r[\xi]\big\|,\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad w[\cdot],r[\cdot]\in C;$$

$(g.2)$ найдется такое число $\alpha_g>0$, что справедливо неравенство

$$\big\|g\big(t,w[\cdot]\big)-g\big(\tau,w[\cdot]\big)\big\|\leqslant\alpha_g\Big(1+\big\|w[\cdot]\big\|_C\Big)\big|t-\tau\big|,\quad t,\tau\in[t_0,\vartheta],\quad w[\cdot]\in C.$$

Условие $(g.1)$ говорит, в частности, о том, что значения отображения g не зависят от значений функции $w[\cdot]$ на отрезке $[-h_0,0]$. Такое предположение является часто используемым при исследовании уравнений нейтрального типа вида (1.1).

Полагаем также, что отображение $f\colon[t_0,\vartheta]\times C\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

$(f.1)$ отображение f непрерывно;

$(f.2)$ для любого компакта $D\subset C$ существует такое число $\lambda_f=\lambda_f(D)>0$, что

$$\big\|f\big(t,w[\cdot],u,v\big)-f\big(t,r[\cdot],u,v\big)\big\|\leqslant\lambda_f\big\|w[\cdot]-r[\cdot]\big\|_C,\ \ t\in[t_0,\vartheta],\ \ w[\cdot],r[\cdot]\in D,\ \ u\in\mathbb{U},\ \ v\in\mathbb{V};$$

$(f.3)$ существует такая константа $\alpha_f>0$, что имеет место оценка

$$\big\|f\big(t,w[\cdot],u,v\big)\big\|\leqslant\alpha_f\Big(1+\big\|w[\cdot]\big\|_C\Big),\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad w[\cdot]\in C,\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.$$

Позицией системы (1.1) назовем пару $(t,w[\cdot])\in[t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$. Множество допустимых позиций обозначим через $\mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$. Пусть $(t_*,x_*[\cdot])\in\mathbb{G}$, $t_*<\vartheta$ и $t^*\in(t_*,\vartheta]$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u[t]$ и $v[t]$ на промежутке $[t_*,t^*)$ считаем измеримые функции $u[\cdot]\colon[t_*,t^*)\mapsto\mathbb{U}$ и $v[\cdot]\colon[t_*,t^*)\mapsto\mathbb{V}$. Действуя, например, по схеме из [17, с. 7] (см., также [13,15]), можно показать, что при условиях $(g.1)$, $(g.2)$ и $(f.1)$–$(f.3)$ допустимые реализации $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$ единственным образом порождают из позиции $(t_*,x_*[\cdot])$ движение $x[\cdot]$ системы (1.1) на отрезке $[t_*-h,t^*]$ — функцию из пространства $\mathrm{Lip}([t_*-h,t^*],\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет условию $x_{t_*}[\cdot]=x_*[\cdot]$ и вместе с $u[t]$ и $v[t]$ почти всюду на $[t_*,t^*]$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $u[\cdot]\colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{U}$ и $v[\cdot]\colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$ — допустимые реализации и $x[\cdot]$ — движение системы (1.1) на отрезке $[t_* - h, \vartheta]$, порожденное из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ реализациями $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$. Реализацией процесса управления назовем тройку $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$. Качество этого процесса оценивается показателем

$$\gamma = \sigma\big(x_\vartheta[\cdot]\big) + \int_{t_*}^{\vartheta} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\, d\xi, \tag{1.2}$$

где отображения $\sigma\colon C \mapsto \mathbb{R}$ и $\chi\colon [t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

(σ) отображение σ непрерывно;

$(\chi.1)$ отображение χ непрерывно;

$(\chi.2)$ для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\lambda_\chi = \lambda_\chi(D) > 0$, что

$$\big|\chi\big(t, w[\cdot], u, v\big) - \chi\big(t, r[\cdot], u, v\big)\big| \leqslant \lambda_\chi \big\|w[\cdot] - r[\cdot]\big\|_C, \ \ t \in [t_0, \vartheta], \ \ w[\cdot], r[\cdot] \in D, \ \ u \in \mathbb{U}, \ \ v \in \mathbb{V}.$$

Для системы (1.1) и показателя качества (1.2) рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру. Первый игрок распоряжается выбором управляющего воздействия $u[t]$, второй — $v[t]$. Первый игрок нацелен минимизировать показатель (1.2), второй — максимизировать.

Предполагаем, что для отображений f и χ выполняется условие седловой точки в маленькой игре [4, с. 79], или, в другой терминологии, условие Айзекса [1, с. 54]:

(f, χ) для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $w[\cdot] \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \big(\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), s\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\big) = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \big(\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), s\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\big).$$

Дальнейшая формализация рассматриваемой дифференциальной игры в классе позиционных стратегий управления игроков следует схеме из [4] (см., также [5] для систем нейтрального типа). Под стратегией управления первого игрока понимаем всякое отображение

$$U = U\big(t, w[\cdot]\big) \in \mathbb{U}, \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in \mathbb{G}.$$

Пусть зафиксированы позиция $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t_* < \vartheta$ и разбиение отрезка $[t_*, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \big\{\tau_j : 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leqslant \delta,\ j = \overline{1, J-1},\ \tau_1 = t_*,\ \tau_J = \vartheta\big\}. \tag{1.3}$$

Пара $\{U, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи последовательно по шагам разбиения Δ_δ формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u[\cdot]$ по правилу

$$u[t] = U(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot]), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1}. \tag{1.4}$$

Из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ такой закон в паре с допустимой реализацией $v[\cdot]\colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$ однозначно порождает реализацию процесса управления $\{x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$. Реализовавшееся при этом значение показателя качества (1.2) обозначим через $\gamma(t_*, x_*[\cdot]; U, \Delta_\delta; v[\cdot])$.

Исходя из самых неблагоприятных, с точки зрения первого игрока, обстоятельств, определим величину гарантированного результата стратегии U:

$$\begin{gathered}\rho_u\big(t_*, x_*[\cdot], U\big) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[\cdot]} \gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; U, \Delta_\delta; v[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}, \quad t_* < \vartheta,\\ \rho_u\big(\vartheta, x_*[\cdot], U\big) = \sigma\big(x_*[\cdot]\big), \quad \big(\vartheta, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \inf_U \rho_u\big(t_*, x_*[\cdot], U\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}. \tag{1.6}$$

Стратегию U° назовем оптимальной, если справедливо равенство

$$\rho_u\big(t_*, x_*[\cdot], U^\circ\big) = \rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}.$$

Аналогично с понятными изменениями для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w[\cdot]) \in \mathbb{V}$, $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, закон управления $\{V, \Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию $v[\cdot]$ по правилу

$$v[t] = V(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot]), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии V:

$$\begin{gathered}\rho_v\big(t_*, x_*[\cdot], V\big) = \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[\cdot]} \gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; u[\cdot]; V, \Delta_\delta\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}, \quad t_* < \vartheta, \\ \rho_v\big(\vartheta, x_*[\cdot], V\big) = \sigma\big(x_*[\cdot]\big), \quad \big(\vartheta, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G},\end{gathered} \tag{1.7}$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока:

$$\rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \sup_V \rho_v\big(t_*, x_*[\cdot], V\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}. \tag{1.8}$$

Стратегия управления второго игрока V° будет называться оптимальной, если

$$\rho_v\big(t_*, x_*[\cdot], V^\circ\big) = \rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}.$$

Непосредственно из соотношений (1.6) и (1.8) вытекает неравенство

$$\rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) \leqslant \rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}. \tag{1.9}$$

В случае когда справедливо равенство

$$\rho_v^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \rho_u^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}, \tag{1.10}$$

будем говорить, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену, функционал ρ° будем называть функционалом цены, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ — седловой точкой игры. Можно показать (см., например, [2,4]), что для функционала цены ρ° справедливы следующие свойства:

(ρ.1) функционал ρ° непрерывен на $\mathbb{G}$ по метрике пространства $[t_0, \vartheta] \times C$;

(ρ.2) справедливо равенство $\rho^\circ(\vartheta, w[\cdot]) = \sigma(w[\cdot])$, $w[\cdot] \in \mathrm{Lip}$;

(ρ.3) (u-стабильность) для любой начальной позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t_* < \vartheta$, и любых момента $t^* \in (t_*, \vartheta]$, числа $\varepsilon > 0$ и допустимой реализации $v[\cdot]\colon [t_*, t^*) \mapsto \mathbb{V}$ существует такая допустимая реализация $u[\cdot]\colon [t_*, t^*) \mapsto \mathbb{U}$, что для движения $x[\cdot]$, порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ реализациями $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$, справедливо неравенство

$$\rho^\circ\big(t^*, x_{t^*}[\cdot]\big) + \int_{t_*}^{t^*} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\, d\xi \leqslant \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \varepsilon;$$

(ρ.4) (v-стабильность) для любой начальной позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t_* < \vartheta$, и любых момента $t^* \in (t_*, \vartheta]$, числа $\varepsilon > 0$ и допустимой реализации $u[\cdot]\colon [t_*, t^*) \mapsto \mathbb{U}$ существует такая допустимая реализация $v[\cdot]\colon [t_*, t^*) \mapsto \mathbb{V}$, что для движения $x[\cdot]$, порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ реализациями $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$, справедливо неравенство

$$\rho^\circ\big(t^*, x_{t^*}[\cdot]\big) + \int_{t_*}^{t^*} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\, d\xi \geqslant \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) - \varepsilon.$$

Отметим, что вопрос существования цены и седловой точки в подобных дифференциальных играх был рассмотрен, например, в работах [5, 6].

§ 2. Коинвариантные производные функционалов

Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$. Обозначим

$$Y\big(t, w[\cdot]\big) = \big\{y[\cdot] \in \mathrm{Lip}\big([t-h, \vartheta], \mathbb{R}^n\big) \colon y_t[\cdot] = w[\cdot]\big\}.$$

Следуя [13,16] (см., также [10,11]), будем говорить, что функционал $\varphi \colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ коинвариантно-дифференцируем (ci-дифференцируем) в точке $(t, w[\cdot])$, если существует такие число $\partial_t\varphi(t, w[\cdot])$ и вектор $\nabla\varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, что для любой функции $y[\cdot] \in Y(t, w[\cdot])$ имеет место равенство

$$\varphi\big(\tau, y_\tau[\cdot]\big) - \varphi\big(t, w[\cdot]\big) = \partial_t\varphi\big(t, w[\cdot]\big)(\tau - t) + \big\langle y_\tau[0] - w[0], \nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\big\rangle + o_{\{t, y[\cdot]\}}(\tau - t), \quad \tau \in [t, \vartheta],$$

где $o_{\{t,y[\cdot]\}}(\tau - t)$ зависит от момента t и функции $y[\cdot]$ и $o_{\{t,y[\cdot]\}}(\tau - t)/(\tau - t) \to 0$ при $\tau \to t + 0$. Число $\partial_t\varphi(t, w[\cdot])$ и вектор $\nabla\varphi(t, w[\cdot])$ будем называть ci-производными функционала φ в точке $(t, w[\cdot])$. Известно (см., например, [13, с. 34]), что значения ci-производных определяются единственным образом. Также, для удобства, вектор $\nabla\varphi(t, w[\cdot])$ будем называть ci-градиентом функционала φ в точке $(t, w[\cdot])$.

Аналогично будем говорить, что отображение $\mathbb{G} \ni (t, w[\cdot]) \to \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$ ci-дифференцируемо в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если в этой точки ci-дифференцируемы функционалы $\psi_i \colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. При этом полагаем

$$\partial_t\psi\big(t, w[\cdot]\big) = \Big(\partial_t\psi_1\big(t, w[\cdot]\big), \ldots, \partial_t\psi_n\big(t, w[\cdot]\big)\Big), \quad \nabla\psi\big(t, w[\cdot]\big) = \Big(\nabla\psi_1\big(t, w[\cdot]\big), \ldots, \nabla\psi_n\big(t, w[\cdot]\big)\Big).$$

По отображению g из (1.1) определим множество

$$\widetilde{\mathbb{G}} = \Big\{\big(t, w[\cdot]\big) \in \mathbb{G} \colon g - \text{ci-дифференцируемо в } \big(t, w[\cdot]\big)\Big\}. \tag{2.1}$$

Следующая лемма говорит о ci-дифференциальных свойствах отображения g.

Лемма 1. *Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t_* < \vartheta$ и $x[\cdot] \in Y(t_*, x_*[\cdot])$. Тогда при почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$ справедливы соотношения*

$$\big(t, x_t[\cdot]\big) \in \widetilde{\mathbb{G}}, \quad \partial_t g\big(t, x_t[\cdot]\big) = \frac{d}{dt}\Big(g\big(t, x_t[\cdot]\big)\Big), \quad \nabla g\big(t, x_t[\cdot]\big) = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. В силу включения $x[\cdot] \in Y(t_*, x_*[\cdot])$ функция $x[\cdot]$ липшицева на отрезке $[t_* - h, \vartheta]$. Пользуясь этим и условиями $(g.1)$, $(g.2)$, можно показать, что функция $g(t, x_t[\cdot])$ липшицева по t на отрезке $[t_*, \vartheta]$. Следовательно, при почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$ у этой функции существует производная. Докажем, что для всех таких t справедливы соотношения (2.2).

Пусть $y[\cdot] \in Y(t_*, x_*[\cdot])$. Определим функцию

$$\theta(\tau - t) = g\big(\tau, y_\tau[\cdot]\big) - g\big(t, x_t[\cdot]\big) - \frac{d}{dt}\Big(g\big(t, x_t[\cdot]\big)\Big)(\tau - t), \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Из условия $(g.1)$ вытекает равенство $g(\tau, y_\tau[\cdot]) = g(\tau, x_\tau[\cdot])$, $\tau \in [t, \min\{t + h_0, \vartheta\}]$. Отсюда выводим, что $\theta(\tau - t)/(\tau - t) \to 0$ при $\tau \to t + 0$. Таким образом, получаем, что отображение g ci-дифференцируемо в точке $(t, x_t[\cdot])$, и, в силу единственности ci-производных они удовлетворяют равенствам из (2.2). Лемма доказана.

§ 3. Уравнение для функционала цены

В монографии [13, гл. I] рассматривалась дифференциальная игра для систем с запаздыванием и на основе понятия коинвариантных производных выписывалось соответствующее функциональное уравнение Гамильтона–Якоби. В ней, в частности, доказывалось, что функционал, удовлетворяющий такому уравнению и дополнительным условиям гладкости, является ценой исходной дифференциальной игры, а стратегии, строящиеся на основе метода экстремального сдвига в направлении ci-градиента этого функционала, являются оптимальными. В этом параграфе для дифференциальной игры (1.1), (1.2) получен аналогичный результат, учитывающий специфику систем нейтрального типа.

Определим гамильтониан

$$H\big(t, w[\cdot], s\big) = \min_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \Big(\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), s\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\Big), \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Для функционала $\varphi\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ запишем уравнение Гамильтона–Якоби с ci-производными:

$$\partial_t\varphi\big(t, w[\cdot]\big) + \langle\partial_t g\big(t, w[\cdot]\big), \nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\rangle + H\big(t, w[\cdot], \nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\big) = 0, \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in \widetilde{\mathbb{G}}, \tag{3.2}$$

при условии на правом конце

$$\varphi\big(\vartheta, w[\cdot]\big) = \sigma\big(w[\cdot]\big), \quad w[\cdot] \in \mathrm{Lip}. \tag{3.3}$$

Главное отличие уравнения (3.2) от функционального уравнения Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием заключается в появлении слагаемого $\langle\partial_t g(t, w[\cdot]), \nabla\varphi(t, w[\cdot])\rangle$. Поскольку это слагаемое определено только на множестве $\widetilde{\mathbb{G}}$ (2.1), уравнение (3.2) также возможно рассматривать только на этом множестве.

Как и в [13], для доказательства связи уравнения (3.2) с ценой дифференциальной игры (1.1), (1.2) на функционал φ требуется наложить дополнительные условия гладкости. Если следовать [13], то от φ нужно требовать непрерывность на $\mathbb{G}$, ci-дифференцируемость на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$ и непрерывность его ci-производных $\partial_t\varphi$ и $\nabla\varphi$ на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$. Однако, как будет видно в § 6, даже в самом простом случае для систем нейтрального типа такие условия не выполняются. Поэтому будем предполагать следующие более адекватные для систем нейтрального типа условия:

(φ.1) функционал φ непрерывен на $\mathbb{G}$ по метрике пространства $[t_0, \vartheta] \times C$;

(φ.2) для любых чисел $\eta \in (0, \vartheta - t_0)$ и $\alpha, \lambda > 0$ найдется такое число $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(\eta, \alpha, \lambda) > 0$, что для любых пар $(t, w[\cdot]), (\tau, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta - \eta] \times D(\alpha, \lambda)$ будет справедливо неравенство

$$\big|\varphi\big(t, w[\cdot]\big) - \varphi\big(\tau, r[\cdot]\big)\big| \leqslant \lambda_\varphi\Big(\big|t - \tau\big| + \big\|w[\cdot] - r[\cdot]\big\|_C\Big),$$

где компакт $D(\alpha, \lambda) \subset C$ имеет вид

$$D(\alpha, \lambda) = \Big\{w[\cdot] \in \mathrm{Lip}\colon \big\|w[\cdot]\big\|_C \leqslant \alpha, \big\|w[\xi'] - w[\xi'']\big\| \leqslant \lambda\big|\xi' - \xi''\big|, \xi', \xi'' \in [-h, 0]\Big\}. \tag{3.4}$$

(φ.3) функционал φ ci-дифференцируем в каждой точке множества $\widetilde{\mathbb{G}}$;

(φ.4) существуют такие моменты $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_l = \vartheta$, что для любого $\eta \in (0, \Delta t)$, где $\Delta t = \min\{t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, l}\}$, и любых $\alpha, \lambda > 0$ ci-градиент $\nabla\varphi$ равномерно непрерывен на множестве $(\cup_{i=1}^{l}[t_{i-1}, t_i - \eta] \times D(\alpha, \lambda)) \cap \widetilde{\mathbb{G}}$ по метрике пространства $[t_0, \vartheta] \times C$.

Докажем следующую вспомогательную лемму:

Лемма 2. *Пусть функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (φ.2), (φ.3). Тогда для него выполнены следующие условия:*

(φ.5) *для любых позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t_* < \vartheta$, числа $\eta \in (0, \vartheta - t_*)$ и функции $y[\cdot] \in Y(t_*, x_*[\cdot])$ функция $\varphi(t, y_t[\cdot])$ липшицева на $[t_*, \vartheta - \eta]$;*

(φ.6) *для любых $\eta \in (0, \vartheta - t_0)$ и $\alpha, \lambda > 0$ найдется такое $K_\nabla = K_\nabla(\eta, \alpha, \lambda) > 0$, что*

$$\big\|\nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\big\| \leqslant K_\nabla, \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in \big([t_0, \vartheta - \eta] \times D\big(\alpha, \lambda\big)\big) \cap \widetilde{\mathbb{G}}, \tag{3.5}$$

где компакт $D(\alpha, \lambda)$ определен в (3.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение условия (φ.5) вытекает из условия (φ.2) и липшицевости функции $y[\cdot] \in Y(t_*, x_*[\cdot])$.

Докажем выполнение условия (φ.6). Пусть $\eta_* \in (0,\eta)$ и $\alpha_* = \alpha + \lambda(\vartheta - \eta_* - t_0)$. В согласии с условием (φ.2) определим число $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(\eta_*, \alpha_*, \lambda)$ и компакт $D_* = D(\alpha_*, \lambda)$. Положим $K_\nabla = 2\lambda_\varphi$. Докажем, что для такого K_∇ выполнено неравенство (3.5).

Пусть $(t, w[\cdot]) \in ([t_0, \vartheta - \eta] \times D(\alpha, \lambda)) \cap \widetilde{\mathbb{G}}$. В случае $\nabla\varphi(t, w[\cdot]) = 0$ неравенство (3.5) очевидно выполняется. Рассмотрим случай $\nabla\varphi(t, w[\cdot]) \neq 0$. Определим функции $\tilde{y}[\cdot]$ и $\hat{y}[\cdot]$ по правилу

$$\tilde{y}_t[\cdot] = \hat{y}_t[\cdot] = w[\cdot], \quad \tilde{y}[\tau] = w[0], \quad \hat{y}[\tau] = w[0] + \lambda(\tau - t)\nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big) / \big\|\nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\big\|, \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Тогда для этих функций имеем $\tilde{y}[\cdot], \hat{y}[\cdot] \in Y(t, w[\cdot])$, и в силу условия ($\varphi$.3) выводим

$$\begin{aligned}\varphi\big(\tau, \tilde{y}_\tau[\cdot]\big) - \varphi\big(\tau, \hat{y}_\tau[\cdot]\big) &= \Big(\varphi\big(\tau, \tilde{y}_\tau[\cdot]\big) - \varphi\big(t, w[\cdot]\big)\Big) - \Big(\varphi\big(\tau, \hat{y}_\tau[\cdot]\big) - \varphi\big(t, w[\cdot]\big)\Big) = \\ &= -\lambda\big\|\nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\big\|(\tau - t) + o_{\{t, \tilde{y}[\cdot]\}}(\tau - t) - o_{\{t, \hat{y}[\cdot]\}}(\tau - t), \quad \tau \in [t, \vartheta].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Кроме того, по построению компакта D_* для функций $\tilde{y}[\cdot]$ и $\hat{y}[\cdot]$ справедливо включение $\tilde{y}_\tau[\cdot], \hat{y}_\tau[\cdot] \in D(\alpha_*, \lambda)$, $\tau \in [t, \vartheta - \eta_*]$. Откуда с учетом условия (φ.2) при $\tau \in [t, \vartheta - \eta_*]$ получаем

$$\big|\varphi\big(\tau, \tilde{y}_\tau[\cdot]\big) - \varphi\big(\tau, \hat{y}_\tau[\cdot]\big)\big| \leqslant \lambda_\varphi\Big(\big\|\tilde{y}_\tau[\cdot] - w[\cdot]\big\|_C + \big\|\hat{y}_\tau[\cdot] - w[\cdot]\big\|_C\Big) \leqslant 2\lambda_\varphi\lambda(\tau - t). \tag{3.7}$$

Объединяя соотношения (3.6) и (3.7), при этом поделив каждое из них на $(\tau - t)$ и после чего устремляя τ к t, приходим к оценке (3.5). Лемма доказана. □

Условие (φ.3) ослабляет условие ci-дифференцируемости функционала φ на $[t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip}$ и выполняется в типичных случаях систем нейтрального типа (см. § 6). Однако из-за того, что теперь ci-градиент $\nabla\varphi$ определен только на множестве $\widetilde{\mathbb{G}}$, стратегия экстремального сдвига в направлении этого ci-градиента оказывается неопределена в точках $\mathbb{G} \setminus \widetilde{\mathbb{G}}$. Поэтому требуется доопределить $\nabla\varphi$ на все множество $\mathbb{G}$ с сохранением нужных свойств непрерывности. Определим отображение $\Phi\colon [t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip} \mapsto \mathbb{R}^n$ по следующему правилу:

$$\begin{gathered}\Phi\big(t, w[\cdot]\big) = \nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big), \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in \widetilde{\mathbb{G}}, \\ \Phi\big(t, w[\cdot]\big) = \lim_{k \to \infty} \nabla\varphi\big(t_k, y_{t_k}[\cdot]\big), \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in [t_0, \vartheta) \times \mathrm{Lip} \setminus \widetilde{\mathbb{G}},\end{gathered} \tag{3.8}$$

где функция $y[\cdot] \in Y(t, w[\cdot])$, причем $y[\tau] = w[0]$, $\tau \in [t, \vartheta]$, а последовательность t_k, $k = 1, 2, \ldots$, выбрана так, что $t_k \to t{+}0$, при $k \to \infty$, справедливо включение $(t_k, y_{t_k}[\cdot]) \in \widetilde{\mathbb{G}}$, и последовательность $\nabla\varphi(t_k, y_{t_k}[\cdot])$ сходится. Пользуясь леммой 1 и условием (φ.6), можно показать, что такая последовательность существует. Заметим также, что в силу условия (φ.4) величина $\Phi(t, w[\cdot])$ не зависит от выбора функции $y[\cdot] \in Y(t, w[\cdot])$ и последовательности t_k, лишь бы $t_k \to t{+}0$, при $k \to \infty$, выполнялось включение $(t_k, y_{t_k}[\cdot]) \in \widetilde{\mathbb{G}}$ и последовательность $\nabla\varphi(t_k, y_{t_k}[\cdot])$ сходилась.

Из определения величины Φ вытекает следующее

Утверждение 1. *Пусть заданы числа $\eta \in (0, \vartheta - t_0)$, $\eta_* \in (0, \eta)$ и $\alpha, \lambda > 0$, и пусть выбрана позиция $(t, w[\cdot]) \in [t_0, \vartheta - \eta] \times D(\alpha, \lambda)$. Тогда для любых чисел $\varepsilon, \delta > 0$ существует такая позиция $(\tilde{t}, \tilde{w}[\cdot]) \in ([t_0, \vartheta - \eta_*] \times D(\alpha, \lambda)) \cap \widetilde{\mathbb{G}}$, что справедливо неравенство*

$$\big|t - \tilde{t}\big| \leqslant \delta, \quad \big\|w[\cdot] - \tilde{w}[\cdot]\big\|_C \leqslant \delta, \quad \big\|\Phi\big(t, w[\cdot]\big) - \Phi\big(\tilde{t}, \tilde{w}[\cdot]\big)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 3. *Пусть числа t_i, $i = \overline{1, l}$, и Δt взяты из условия (φ.4). Тогда для любого числа $\eta \in (0, \Delta t)$ и любых чисел $\alpha, \lambda > 0$ отображение Φ равномерно непрерывно на компакте $\cup_{i=1}^{l} [t_{i-1}, t_i - \eta] \times D(\alpha, \lambda)$ по метрике пространства $[t_0, \vartheta] \times C$.*

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Покажем существование такого $\delta > 0$, что для всех $(t, w[\cdot]), (\tau, r[\cdot]) \in \cup_{i=1}^{l} [t_{i-1}, t_i - \eta] \times D(\alpha, \lambda)$ при условии $|t - \tau| \leqslant \delta$, $\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C \leqslant \delta$ справедливо

$$\big\|\Phi\big(t, w[\cdot]\big) - \Phi\big(\tau, r[\cdot]\big)\big\| \leqslant \varepsilon. \tag{3.9}$$

Пусть $\eta_* \in (0, \eta)$. В силу условия $(\varphi.4)$ и определения функционала Φ найдется такое число $\delta_* > 0$, что для всех $(\tilde{t}, \tilde{w}[\cdot]), (\tilde{\tau}, \tilde{r}[\cdot]) \in (\cup_{i=1}^{l} [t_{i-1}, t_i - \eta_*] \times D(\alpha, \lambda)) \cap \widetilde{\mathbb{G}}$, при выполнении условия

$$\big|\tilde{t} - \tilde{\tau}\big| \leqslant \delta_*, \quad \big\|\tilde{w}[\cdot] - \tilde{r}[\cdot]\big\|_C \leqslant \delta_*, \tag{3.10}$$

будет справедливо неравенство

$$\big\|\Phi\big(\tilde{t}, \tilde{w}[\cdot]\big) - \Phi\big(\tilde{\tau}, \tilde{r}[\cdot]\big)\big\| \leqslant \varepsilon/3. \tag{3.11}$$

Положим $\delta = \delta_*/3$. Пусть $(t, w[\cdot]), (\tau, r[\cdot]) \in \cup_{i=1}^{l} [t_{i-1}, t_i - \eta] \times D(\alpha, \lambda)$ и выполнено условие $|t - \tau| \leqslant \delta$, $\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C \leqslant \delta$. В силу утверждения 1 найдутся такие позиции $(\tilde{t}, \tilde{w}[\cdot])$, $(\tilde{\tau}, \tilde{r}[\cdot]) \in ([t_0, \vartheta - \eta_*] \times D(\alpha, \lambda)) \cap \widetilde{\mathbb{G}}$, что

$$\begin{aligned} &\big|t - \tilde{t}\big| \leqslant \delta, \quad \big\|w[\cdot] - \tilde{w}[\cdot]\big\|_C \leqslant \delta, \quad \big\|\Phi\big(t, w[\cdot]\big) - \Phi\big(\tilde{t}, \tilde{w}[\cdot]\big)\big\| \leqslant \varepsilon/3, \\ &\big|\tau - \tilde{\tau}\big| \leqslant \delta, \quad \big\|r[\cdot] - \tilde{r}[\cdot]\big\|_C \leqslant \delta, \quad \big\|\Phi\big(\tau, r[\cdot]\big) - \Phi\big(\tilde{\tau}, \tilde{r}[\cdot]\big)\big\| \leqslant \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Тогда для этих позиций будут выполнены условие (3.10) и, следовательно, неравенство (3.11), пользуясь которым приходим к оценке (3.9). Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть функционал* $\varphi\colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* $(\varphi.1)$*–*$(\varphi.4)$ *(или, учитывая лемму 2, условиям* $(\varphi.1)$*,* $(\varphi.3)$*–*$(\varphi.6)$*) и соотношениям (3.2), (3.3). Тогда функционал* φ *является ценой дифференциальной игры (1.1), (1.2), то есть справедливо равенство* $\varphi(t_*, x_*[\cdot]) = \rho^\circ(t_*, x_*[\cdot])$*,* $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$*, а стратегии* U° *и* V°*, определяемые из соотношений*

$$\left.\begin{aligned} U^\circ\big(t, w[\cdot]\big) &\in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \Big(\big\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), \Phi\big(t, w[\cdot]\big)\big\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\Big), \\ V^\circ\big(t, w[\cdot]\big) &\in \operatorname*{argmax}_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \Big(\big\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), \Phi\big(t, w[\cdot]\big)\big\rangle + \chi\big(t, w[\cdot], u, v\big)\Big), \end{aligned}\right. \quad \big(t, w[\cdot]\big) \in \mathbb{G}, \tag{3.12}$$

являются оптимальными.

Доказательство следует схеме из [4, с. 133] (см. также [13, с. 39]).

Для позиций $(\vartheta, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$ утверждение теоремы справедливо в силу условий $(\rho.2)$ и (3.3). Рассмотрим позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t_* < \vartheta$. Учитывая соотношения (1.6), (1.8) и (1.9), для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\rho_u\big(t_*, x_*[\cdot]; U^\circ\big) \leqslant \varphi\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \rho_v\big(t_*, x_*[\cdot]; V^\circ\big) \geqslant \varphi\big(t_*, x_*[\cdot]\big). \tag{3.13}$$

Докажем первое из этих неравенств. По определению (1.5) величины гарантированного результата $\rho_u(t_*, x_*[\cdot]; U^\circ)$ для его доказательства достаточно показать, что для любого числа $\zeta > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\zeta) > 0$, что, каковы бы ни были разбиение Δ_δ (1.3) и допустимая реализация $v[\cdot]\colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$, для движения $x[\cdot]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ законом управления $\{U^\circ, \Delta_\delta\}$ по правилу (1.4) и реализацией $v[\cdot]$, справедливо неравенство

$$\gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; U^\circ, \Delta_\delta; v[\cdot]\big) = \sigma\big(x_\vartheta[\cdot]\big) + \int_{t_*}^{\vartheta} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\, d\xi \leqslant \varphi\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \zeta. \tag{3.14}$$

Пусть зафиксировано $\zeta > 0$. Взяв число α_f из условия $(f.3)$, определим множество

$$Y_* = \Big\{y[\cdot] \in Y\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\colon \Big\|\frac{d}{dt}\Big(y[t] - g\big(t, y_t[\cdot]\big)\Big)\Big\| \leqslant \alpha_f\Big(1 + \big\|y_t[\cdot]\big\|_C\Big) \text{ при п. в. } t \in [t_*, \vartheta]\Big\}. \tag{3.15}$$

Можно показать, что для этого множества найдутся такие $\alpha, \lambda > 0$, что справедливо включение

$$y_t[\cdot] \in D(\alpha, \lambda), \quad t \in [t_*, \vartheta], \quad y[\cdot] \in Y_*,$$

где $D(\alpha, \lambda)$ — компакт, определенный в согласии с (3.4). Отсюда, учитывая условия $(f.1)$, $(\chi.1)$, следует существование таких чисел $K_f, K_\chi > 0$, что справедливы неравенства

$$\big\|f\big(t, y_t[\cdot], u, v\big)\big\| \leqslant K_f, \quad \big|\chi\big(t, y_t[\cdot], u, v\big)\big| \leqslant K_\chi, \quad t \in [t_*, \vartheta], \quad y[\cdot] \in Y_*, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{3.16}$$

Пусть числа t_i, $i = \overline{1, l}$, и Δt взяты из условия $(\varphi.4)$, и пусть $i_* = \min\{i = \overline{1, l} \colon t_* < t_i\}$. Тогда в силу условия $(\varphi.1)$ найдется такое число $\eta \in (0, \min\{\zeta/(8K_\chi l), \Delta t\})$, что

$$\big|\varphi\big(t, y_t[\cdot]\big) - \varphi\big(\tau, y_\tau[\cdot]\big)\big| \leqslant \zeta/(4l), \quad t, \tau \in [t_i - \eta, t_i + \eta] \cap [t_*, \vartheta], \quad i = \overline{i_*, l}, \quad y[\cdot] \in Y_*. \tag{3.17}$$

Из условия $(\varphi.6)$ и определения (3.8) отображения Φ найдется такое $K_\nabla > 0$, что

$$\big\|\Phi\big(t, y_t[\cdot]\big)\big\| \leqslant K_\nabla, \quad t \in [t_*, \vartheta - \eta], \quad y[\cdot] \in Y_*. \tag{3.18}$$

В силу условий $(f.1)$, $(\chi.1)$ и леммы 3 существует такое $\delta \in (0, \eta)$, что для всех $y[\cdot] \in Y_*$, $i = \overline{i_*, l}$, $t, \tau \in [t_{i-1}, t_i - \eta] \cap [t_*, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ при выполнении условия $|t - \tau| \leqslant \delta$ имеют место оценки

$$\begin{gathered} \big\|f\big(t, y_t[\cdot], u, v\big) - f\big(\tau, y_\tau[\cdot], u, v\big)\big\| \leqslant \zeta_1/K_\nabla, \quad \big\|\chi\big(t, y_t[\cdot], u, v\big) - \chi\big(\tau, y_\tau[\cdot], u, v\big)\big\| \leqslant \zeta_1, \\ \big\|\Phi\big(t, y_t[\cdot]\big) - \Phi\big(\tau, y_\tau[\cdot]\big)\big\| \leqslant \zeta_1/K_f, \quad \zeta_1 = \zeta/(12(\vartheta - t_*)). \end{gathered} \tag{3.19}$$

Докажем, что при таком выборе числа δ неравенство (3.14) выполняется. Пусть выбрано некоторое разбиение Δ_δ (1.3) и в согласии с (3.12) определена стратегия U°. Пусть движение $x[\cdot]$ порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ законом управления $\{U^\circ, \Delta_\delta\}$ и некоторой допустимой реализацией помехи $v[\cdot] \colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$. Тогда, учитывая условие $(f.3)$ и определение (3.15) множества Y_*, будет справедливо включение $x[\cdot] \in Y_*$. Рассмотрим функцию

$$\omega[t] = \varphi\big(t, x_t[\cdot]\big) + \int_{t_*}^{t} \chi\big(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]\big)\, d\xi, \quad t \in [t_*, \vartheta],$$

где реализация $u[\cdot] \colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$ определена по закону управления $\{U^\circ, \Delta_\delta\}$ в согласии с (1.4). Тогда в силу соотношений (1.2) и (3.3) для нее справедливы равенства

$$\omega[t_*] = \varphi\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad \omega[\vartheta] = \gamma\big(t_*, x_*[\cdot]; U^\circ, \Delta_\delta; v[\cdot]\big). \tag{3.20}$$

В силу выбора чисел η и δ из условий (3.17) и (3.19) соответственно для каждого $i = \overline{i_*, l}$ существует такое $k_i \in \mathbb{N}$, что $\tau_{k_i} \in \Delta_\delta$ и $t_i \leqslant \tau_{k_i} \leqslant t_i + \eta$. Положим $k_{i_*-1} = 1$. Тогда, в частности, $\tau_{i_*-1} = t_*$ и $\tau_{k_l} = \vartheta$. Отсюда, пользуясь соотношениями (3.16), (3.17), выводим

$$\omega[\vartheta] = \omega[t_*] + \sum_{i=i_*}^{l} \big(\omega[t_i - \eta] - \omega[\tau_{k_{i-1}}]\big) + \sum_{i=i_*}^{l} \big(\omega[\tau_{k_i}] - \omega[t_i - \eta]\big) \leqslant \sum_{i=i_*}^{l} \int_{\tau_{k_{i-1}}}^{t_i - \eta} \frac{d\omega[\xi]}{d\xi} d\xi + \zeta/2.$$

Таким образом, для доказательства неравенства (3.14) нужно показать, что имеет место оценка

$$d\omega[t]/dt \leqslant 6\zeta_1 \text{ при п. в. } t \in [\tau_{k_{i-1}}, t_i - \eta], \quad i = \overline{i_*, l}, \tag{3.21}$$

где число ζ_1 определено в (3.19).

Зафиксируем $i \in \overline{i_*, l}$. Обозначим через T_i множество таких моментов $t \in (\tau_{k_{i-1}}, t_i - \eta)$, для которых справедливо включение $(t, x_t[\cdot]) \in \widetilde{\mathbb{G}}$ и существуют производные $d\varphi(t, x_t[\cdot])/dt$ и $dx[t]/dt$. Тогда из леммы 1 и условия $(\varphi.5)$ следует, что мера множества $[\tau_{k_{i-1}}, t_i - \eta] \setminus T_i$ равна нулю. Для любого момента $t \in T_i$, принимая во внимание условие $(\varphi.3)$ и равенство (3.2), в котором, согласно лемме 1, меняем $\partial_t g(t,x_t[\cdot])$ на $dg(t,x_t[\cdot])/dt$ и, согласно определению (3.8) отображения Φ, меняем $\nabla\varphi(t,x_t[\cdot])$ на $\Phi(t,x_t[\cdot])$, имеем

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi\big(t,x_t[\cdot]\big)\Big)=\lim_{\tau\to t+0}\frac{\varphi(\tau,x_\tau[\cdot])-\varphi(t,x_t[\cdot])}{\tau-t}=\partial_t\varphi\big(t,x_t[\cdot]\big)+\langle\frac{dx[t]}{dt},\nabla\varphi\big(t,x_t[\cdot]\big)\rangle=$$
$$=\langle\frac{d}{dt}\Big(x[t]-g\big(t,x_t[\cdot]\big)\Big),\Phi\big(t,x_t[\cdot]\big)\rangle-H\big(t,x_t[\cdot],\Phi\big(t,x_t[\cdot]\big)\big).$$

Отсюда, учитывая равенство (1.1), при п. в. $t\in[\tau_{k_{i-1}},t_i-\eta]$ выводим

$$\frac{d\omega[t]}{dt}=\frac{d}{dt}\Big(\varphi\big(t,x_t[\cdot]\big)\Big)+\chi\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big)=\langle f\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big),\Phi\big(t,x_t[\cdot]\big)\rangle+$$
$$+\chi\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big)-H\big(t,x_t[\cdot],\Phi\big(t,x_t[\cdot]\big)\big).\tag{3.22}$$

Из оценок (3.16), (3.18), (3.19), с учетом определения (3.1) гамильтониана H, получаем

$$\langle f\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big),\Phi\big(t,x_t[\cdot]\big)\rangle+\chi\big(t,x_t[\cdot],u[t],v[t]\big)-H\big(t,x_t[\cdot],\Phi\big(t,x_t[\cdot]\big)\big)\leqslant\tag{3.23}$$
$$\leqslant\langle f\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],u[t],v[t]\big),\Phi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big)\rangle+\chi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],u[t],v[t]\big)-H\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],\Phi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big)\big)+6\zeta_1,$$
$$t\in[\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[\tau_{k_{i-1}},t_i-\eta],\quad j=\overline{k_{i-1},k_i}.$$

В силу (3.1) и (3.12) при всех $t\in[\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[\tau_{k_{i-1}},t_i-\eta]$, $j=\overline{k_{i-1},k_i}$, имеют место соотношения

$$f\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],u[t],v[t]\big),\ \Phi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big)\rangle+\chi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],u[t],v[t]\big)\leqslant\tag{3.24}$$
$$\leqslant\max_{v\in\mathbb{V}}\Big(\langle f\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],U^\circ\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big),v\big),\Phi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big)\rangle+\chi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],U^\circ\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big),v\big)\Big)=$$
$$=\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\Big(\langle f\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],u,v\big),\Phi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big)\rangle+\chi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],u,v\big)\Big)=H\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot],\Phi\big(\tau_j,x_{\tau_j}[\cdot]\big)\big).$$

Объединяя соотношения (3.22)–(3.24), получаем неравенство (3.21). Таким образом, первое неравенство в (3.13) доказано. Второе неравенство доказывается симметричным образом с учетом условия (f,χ). Теорема доказана. □

Замечание 1. В теореме 1 вместо выполнения условия $(\varphi.2)$ можно потребовать выполнение условий $(\varphi.5)$, $(\varphi.6)$. Как следует из леммы 2, эти условия являются более слабыми, чем условие $(\varphi.2)$, однако во многих случаях их проверка оказывается достаточно затруднительной.

Замечание 2. По аналогии с теоремой 3.1 из [13] в теореме 1 вместо условий $(\varphi.2)$–$(\varphi.4)$ можно потребовать, чтобы функционал φ был ci-дифференцируем на всем $[t_0,\vartheta)\times\mathrm{Lip}$ и чтобы его ci-производные $\partial_t\varphi$ и $\nabla\varphi$ были непрерывны на $[t_0,\vartheta)\times\mathrm{Lip}$. Тогда будут выполняться условия $(\varphi.3)$–$(\varphi.6)$ и, учитывая замечание 1, утверждение теоремы 1 будет также справедливо.

§ 4. Стабильность цены относительно характеристических комплексов

Для получения в некотором смысле обратного к теореме 1 результата, следуя идеологии [7, 13] (см., также [10,12]), введем вспомогательные характеристические комплексы и докажем, что цена дифференциальной игры (1.1), (1.2) является стабильной относительно этих комплексов.

Определим многозначные отображения

$$E_{\text{в}}\big(t,w[\cdot],v\big)=\mathrm{co}\,\big\{\big(f\big(t,w[\cdot],u,v\big),\chi\big(t,w[\cdot],u,v\big)\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\colon u\in\mathbb{U}\big\},$$
$$E_{\text{н}}\big(t,w[\cdot],u\big)=\mathrm{co}\,\big\{\big(f\big(t,w[\cdot],u,v\big),\chi\big(t,w[\cdot],u,v\big)\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\colon v\in\mathbb{V}\big\},\tag{4.1}$$
$$t\in[t_0,\vartheta],\quad w[\cdot]\in C,\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.$$

Можно показать, что для них будут выполняться следующие свойства:

$(E.1)$ для любых $t\in[t_0,\vartheta]$, $w[\cdot]\in C$, $u\in\mathbb{U}$ и $v\in\mathbb{V}$ множества $E_{\text{в}}\big(t,w[\cdot],v\big)$ и $E_{\text{н}}\big(t,w[\cdot],v\big)$ являются непустыми выпуклыми компактами;

$(E.2)$ при фиксированных $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ отображения $E_{\text{в}}\bigl(t, w[\cdot], v\bigr)$ и $E_{\text{н}}\bigl(t, w[\cdot], v\bigr)$ полунепрерывны сверху по $(t, w[\cdot])$;

$(E.3)$ для числа $\alpha_f > 0$ из условия $(f.2)$ имеет место оценка

$$\sup\Bigl\{\|f\|\colon (f,\chi) \in E_{\text{в}}\bigl(t, w[\cdot], v\bigr) \cup E_{\text{н}}\bigl(t, w[\cdot], u\bigr)\Bigr\} \leqslant \alpha_f\bigl(1 + \bigl\|w[\cdot]\bigr\|_C\bigr),$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot] \in C, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V};$$

$(E.4)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $w[\cdot] \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\sup_{v \in \mathbb{V}} \min_{(f,\chi) \in E_{\text{в}}(t, w[\cdot], v)} \bigl(\langle s, f\rangle + \chi\bigr) = H\bigl(t, w[\cdot], s\bigr) = \inf_{u \in \mathbb{U}} \max_{(f,\chi) \in E_{\text{н}}(t, w[\cdot], u)} \bigl(\langle s, f\rangle + \chi\bigr).$$

Обозначим

$$\overline{g}\bigl(t, w[\cdot]\bigr) = \bigl(g\bigl(t, w[\cdot]\bigr), 0\bigr) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad \bigl(t, w[\cdot]\bigr) \in \mathbb{G}.$$

Пусть заданы $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$ и $v \in \mathbb{V}$. Рассмотрим функционально-дифференциальное включение нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\bigl(x[t], z[t]\bigr) - \overline{g}\bigl(t, x_t[\cdot]\bigr)\Bigr) \in E_{\text{в}}\bigl(t, x_t[\cdot], v\bigr), \quad t \in [t_*, \vartheta], \tag{4.2}$$

при условии

$$x_{t_*}[\cdot] = x_*[\cdot], \quad z_{t_*}[\cdot] = 0. \tag{4.3}$$

Включение (4.2) будем называть верхним характеристическим комплексом, а характеристиками — пары функций $(x[\cdot], z[\cdot]) \in \mathrm{Lip}([t_* - h, \vartheta], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, которые удовлетворяют условию (4.3) и почти всюду включению (4.2). Обозначим через $CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$ множество всех таких характеристик $(x[\cdot], z[\cdot])$. Принимая во внимание условия $(g.1)$, $(g.2)$, $(E.1)$–$(E.3)$, можно показать, что множество $CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$ является непустым компактом в $C([t_* - h, \vartheta], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Лемма 4. *Для функционала цены ρ° дифференциальной игры* (1.1), (1.2) *справедливо следующее утверждение. Для любой позиции $\bigl(t_*, x_*[\cdot]\bigr) \in \mathbb{G}$ и любого вектора $v \in \mathbb{V}$ существует такая характеристика $(x[\cdot], z[\cdot]) \in CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$, что справедливо неравенство*

$$\rho^\circ\bigl(t, x_t[\cdot]\bigr) + z[t] \leqslant \rho^\circ\bigl(t_*, x_*[\cdot]\bigr), \quad t \in [t_*, \vartheta]. \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выбрано $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Обозначим $\delta_k = (\vartheta - t_*)/k$ и $\tau_j = t_* + j\delta_k$, $j = \overline{0, k}$. Пользуясь на каждом отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{0, k-1}$ свойством $(\rho.3)$, определим такую реализацию $u^{(k)}[\cdot]\colon [t_*, \vartheta) \mapsto \mathbb{U}$, что для движения $x^{(k)}[\cdot]\colon [t_* - h, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$, порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ реализациями $u^{(k)}[\cdot]$ и $v[\cdot]\colon [t_*, \vartheta) \mapsto \{v\}$, будут справедливы неравенства

$$\rho^\circ\bigl(\tau_k, x^{(k)}_{\tau_k}[\cdot]\bigr) + z^{(k)}[\tau_k] \leqslant \rho^\circ\bigl(\tau_{k-1}, x^{(k)}_{\tau_{k-1}}[\cdot]\bigr) + z^{(k)}[\tau_{k-1}] + 1/k^2 \leqslant$$
$$\leqslant \rho^\circ\bigl(\tau_{k-2}, x^{(k)}_{\tau_{k-2}}[\cdot]\bigr) + z^{(k)}[\tau_{k-2}] + 2/k^2 \leqslant \ldots \leqslant \rho^\circ\bigl(t_*, x_*[\cdot]\bigr) + 1/k,$$

где функция $z^{(k)}[\cdot]\colon [t_* - h, t^*] \mapsto \mathbb{R}$ определяется по правилу

$$z^{(k)}[t] = 0, \quad t \in [t_* - h, t_*], \quad z^{(k)}[t] = \int_{t_*}^{t} \chi\bigl(\xi, x^{(k)}_\xi[\cdot], u^{(k)}[\xi], v\bigr) d\xi, \quad t \in [t_*, \vartheta].$$

Тогда, учитывая определение (4.1) отображения $E_{\text{в}}$, справедливо включение $(x^{(k)}[\cdot], z^{(k)}[\cdot]) \in CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$. В силу компактности множества решений $CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$ у последовательности характеристик $(x^{(k)}[\cdot], z^{(k)}[\cdot])$ существует сходящаяся подпоследовательность, которую будем обозначать так же, а предел ее обозначим через $(\overline{x}[\cdot], \overline{z}[\cdot]) \in CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$. Для доказательства леммы осталось показать выполнение неравенства (4.4) для характеристики $(\overline{x}[\cdot], \overline{z}[\cdot])$.

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу компактности множества характеристик $CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$ и свойства $(\rho.1)$ функционала ρ° существует такое число $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$, что для всех моментов $t, \tau \in [t_*, \vartheta]$ и всех характеристик $(x[\cdot], z[\cdot]) \in CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], v)$, таких, что

$$\big|t - \tau\big| \leqslant \nu, \quad \big\|\overline{x}[\xi] - x[\xi]\big\| \leqslant \nu, \quad \big|\overline{z}[\xi] - z[\xi]\big| \leqslant \nu, \quad \xi \in [t_* - h, \vartheta],$$

будет справедливо неравенство

$$\big|\rho^\circ\big(t, \overline{x}_t[\cdot]\big) - \rho^\circ\big(\tau, x_\tau[\cdot]\big)\big| \leqslant \varepsilon/4, \quad \big|\overline{z}[t] - z[\tau]\big| \leqslant \varepsilon/4.$$

Учитывая тот факт, что характеристика $(\overline{x}[\cdot], \overline{z}[\cdot])$ является пределом последовательности $(x^{(k)}[\cdot], z^{(k)}[\cdot])$, $k = 1, 2, \ldots$, найдется такое $k_* = k_*(\nu(\varepsilon)) > 0$, что для всех $k \geqslant k_*$ имеем

$$\big\|\overline{x}[\xi] - x^{(k)}[\xi]\big\| \leqslant \nu, \quad \big\|\overline{z}[\xi] - z^{(k)}[\xi]\big\| \leqslant \nu, \quad \xi \in [t_* - h, \vartheta].$$

Тогда для всех натуральных k, таких, что $k \geqslant k_*$, $\delta_k \leqslant \nu$, $k \geqslant 2/\varepsilon$, и $j = \overline{0, k-1}$ выводим

$$\rho^\circ\big(t, \overline{x}_t[\cdot]\big) + \overline{z}[t] \leqslant \big|\rho^\circ\big(t, \overline{x}_t[\cdot]\big) - \rho^\circ\big(\tau_j, x^{(k)}_{\tau_j}[\cdot]\big)\big| + \big|\overline{z}[t] - z^{(k)}[\tau_j]\big| + \rho^\circ\big(\tau_j, x^{(k)}_{\tau_j}[\cdot]\big) + z^{(k)}[\tau_i] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \rho^\circ\big(\tau_j, x^{(k)}_{\tau_j}[\cdot]\big) + z^{(k)}[\tau_j] \leqslant \varepsilon/2 + \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + j/k^2 \leqslant \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \varepsilon, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}].$$

Таким образом, получаем, что неравенство $\rho^\circ(t, \overline{x}_t[\cdot]) + \overline{z}[t] \leqslant \rho^\circ(t_*, x_*[\cdot]) + \varepsilon$, $t \in [t_*, \vartheta]$, справедливо для любого $\varepsilon > 0$, а значит, и для $\varepsilon = 0$. Лемма доказана. $\square$

Пусть заданы $(t_*, x_*[\cdot]) \in \mathbb{G}$ и $u \in \mathbb{U}$. Рассмотрим функционально-дифференциальное включение нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\Big(\big(x[t], z[t]\big) - \overline{g}\big(t, x_t[\cdot]\big)\Big) \in E_{\text{н}}\big(t, x_t[\cdot], u\big), \quad t \in [t_*, \vartheta], \tag{4.5}$$

при условии

$$x_{t_*}[\cdot] = x_*[\cdot], \quad z_{t_*}[\cdot] = 0. \tag{4.6}$$

Включение (4.5) будем называть нижним характеристическим комплексом, понимаем под характеристиками — пары функций $(x[\cdot], z[\cdot]) \in \mathrm{Lip}([t_* - h, \vartheta], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, которые удовлетворяют условию (4.6) и почти всюду включению (4.5). Обозначим через $CH_{\text{н}}(t_*, x_*[\cdot], v)$ множество всех таких характеристик $(x[\cdot], z[\cdot])$. По аналогии с леммой 4 можно показать, что справедлива

Лемма 5. *Для функционала цены ρ° дифференциальной игры (1.1), (1.2) справедливо следующее утверждение. Для любой позиции $\big(t_*, x_*[\cdot]\big) \in \mathbb{G}$ и любого вектора $u \in \mathbb{U}$ существует такая характеристика $(x[\cdot], z[\cdot]) \in CH_{\text{н}}(t_*, x_*[\cdot], u)$, что справедливо неравенство*

$$\rho^\circ\big(t, x_t[\cdot]\big) + z[t] \geqslant \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \quad t \in [t_*, \vartheta].$$

§ 5. Дифференциальные свойства функционала цены

Теорема 2. *Пусть функционал цены ρ° дифференциальной игры (1.1), (1.2) ci-дифференцируем в точке $(t_*, x_*[\cdot]) \in \widetilde{\mathbb{G}}$. Тогда он удовлетворяет уравнению (3.2) в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует схеме из работы [7, с. 18].

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию $(E.4)$, найдется такой вектор $\overline{v} \in \mathbb{V}$, что

$$\min_{(f,\chi) \in E_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], \overline{v})} \big(\langle f, \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + \chi\big) \geqslant H\big(t_*, x_*[\cdot], \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\big) - \varepsilon/2. \tag{5.1}$$

По лемме 4, найдется такая характеристика $(x[\cdot], z[\cdot]) \in CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], \overline{v})$, что справедливо неравенство (4.4). Отсюда, учитывая ci-дифференцируемость функционала ρ° в точке $(t_*, x_*[\cdot])$, имеем

$$\begin{gathered} 0 \geqslant \rho^\circ\big(t, x_t[\cdot]\big) - \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + z[t] = \\ = \partial_t \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)(t - t_*) + \langle x[t] - x[t_*],\, \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + z[t] + o^{(1)}_{\{t_*, x[\cdot]\}}(t - t_*), \quad t \in [t_*, \vartheta], \end{gathered} \tag{5.2}$$

где функция $o^{(1)}_{\{t_*, x[\cdot]\}}(t - t_*)/(t - t_*) \to 0$ при $t \to t_* + 0$. Поскольку $(x[\cdot], z[\cdot]) \in CH_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], \overline{v})$, то существуют такие измеримые функции $\tilde{f}[\cdot]\colon [t_*, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\chi}[\cdot]\colon [t_*, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$, что

$$\begin{gathered} x[t] = g\big(t, x_t[\cdot]\big) + x[t_*] - g\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \int_{t_*}^{t} \tilde{f}[\xi] d\xi, \quad z[t] = \int_{t_*}^{t} \tilde{\chi}[\xi] d\xi, \quad t \in [t_*, \vartheta], \\ \big(\tilde{f}[\xi], \tilde{\chi}[\xi]\big) \in E_{\text{в}}\big(\xi, x_\xi[\cdot], \overline{v}\big), \quad \xi \in [t_*, \vartheta]. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Поскольку $(t_*, x_*[\cdot]) \in \widetilde{\mathbb{G}}$, существует такое число $\partial_t g(t_*, x_*[\cdot])$, что имеет место равенство

$$g\big(t, x_t[\cdot]\big) - g\big(t_*, x_*[\cdot]\big) = \partial_t g(t_*, x_*)(t - t_*) + o^{(2)}_{\{t_*, x[\cdot]\}}(t - t_*), \quad t \in [t_*, \vartheta], \tag{5.4}$$

где функция $o^{(2)}_{\{t_*, x[\cdot]\}}(t - t_*)/(t - t_*) \to 0$ при $t \to t_* + 0$. Обозначим

$$\theta\big(t - t_*\big) = o^{(1)}_{\{t_*, x[\cdot]\}}\big(t - t_*\big) + \langle o^{(2)}_{\{t_*, x[\cdot]\}}\big(t - t_*\big), \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle.$$

Тогда, разделив соотношение (5.2) на $(t - t_*)$ и пользуясь равенствами (5.3), (5.4), получаем

$$\begin{gathered} 0 \geqslant \partial_t \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \langle \partial g\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + \\ + \langle \frac{1}{t - t_*} \int_{t_*}^{t} \tilde{f}[\xi] d\xi, \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + \frac{1}{t - t_*} \int_{t_*}^{t} \tilde{\chi}[\xi] d\xi + \frac{\theta(t - t_*)}{t - t_*}, \quad t \in (t_*, \vartheta]. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Из условия $(E.2)$, включения $x[\cdot] \in \mathrm{Lip}([t_* - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ и включения из (5.3) следует существование такого $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$, что

$$\big(\tilde{f}[\xi], \tilde{\chi}[\xi]\big) \in \big[E_{\text{в}}\big(t_*, x_*[\cdot], \overline{v}\big)\big]^{\varepsilon_1}, \quad \xi \in [t_*, t_* + \nu], \quad \varepsilon_1 = \varepsilon/\big(4\big(\big\|\nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\big\| + 1\big)\big).$$

Отсюда, пользуясь леммой 12 работы [17] и учитывая условие $(E.1)$, выводим, что для каждого $t \in [t_*, t_* + \nu]$ существует такая пара $(f_*[t], \chi_*[t]) \in E_{\text{в}}(t_*, x_*[\cdot], \overline{v})$, что справедливы неравенства

$$\Big\| \frac{1}{t - t_*} \int_{t_*}^{t} \tilde{f}[\xi] d\xi - f_*[t] \Big\| \leqslant \varepsilon_1, \quad \Big| \frac{1}{t - t_*} \int_{t_*}^{t} \tilde{\chi}[\xi] d\xi - \chi_*[t] \Big| \leqslant \varepsilon_1.$$

Пользуясь этими неравенствами и оценкой (5.1), из неравенства (5.5) при $t \in [t_*, t_* + \nu]$ получаем

$$\begin{gathered} \varepsilon \geqslant \frac{\varepsilon}{2} + \partial_t \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \langle \partial g\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + \langle f_*[t], \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + \chi_*[t] + \frac{\theta(t - t_*)}{t - t_*} \geqslant \\ \geqslant \partial_t \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \langle \partial g\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + H\big(t_*, x_*[\cdot], \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\big) + \frac{\theta(t - t_*)}{t - t_*}. \end{gathered}$$

Переходя к пределу при $t \to t_* + 0$ и принимая внимание, что эта оценка выполнена для любого $\varepsilon > 0$, получаем неравенство

$$\partial_t \rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big) + \langle \partial_t g\big(t_*, x_*[\cdot]\big), \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\rangle + H\big(t_*, x_*[\cdot], \nabla\rho^\circ\big(t_*, x_*[\cdot]\big)\big) \leqslant 0.$$

Аналогично доказывается и неравенство в другую сторону. Таким образом, теорема доказана. $\square$

§ 6. Примеры

Рассмотрим дифференциальную игру вида (1.1), (1.2), в которой динамическая система описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}\big(x[t]-x[t-1]\big)=u[t]-v[t],\quad t\in[0,3],\quad x[t]\in\mathbb{R},\quad u[t],v[t]\in[-1,1], \tag{6.1}$$

а показатель качества — терминальный:

$$\gamma_1=\sigma\big(x_{\vartheta=3}[\cdot]\big)=\big|x[3]\big|^2. \tag{6.2}$$

Известно (см., например, [6]), что такая дифференциальная игра имеет цену, и, поскольку как первый, так и второй игрок могут столкнуться с реализаций управляющего воздействия оппонента, копирующую их собственную реализацию (т. е. с ситуацией $u[t]=v[t]$), функционал цены этой дифференциальной игры имеет вид

$$\begin{gathered}\rho_1^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=\big|\kappa\big(t,w[\cdot]\big)\big|^2,\\ \kappa\big(t,w[\cdot]\big)=w[i-t]+(3-i)w[0]-(3-i)w[-1],\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in[i,i+1]\times\mathrm{Lip},\quad i=\overline{0,2}.\end{gathered} \tag{6.3}$$

В этом примере, в согласии с (2.1) и (3.1), имеем

$$\widetilde{\mathbb{G}}=\big\{\big(t,w[\cdot]\big)\in\mathbb{G}\colon \exists d^+w[-1]/dt\big\},\quad H\big(t,w[\cdot],s\big)=0. \tag{6.4}$$

Здесь символ $d^+w[-1]/dt$ обозначает правую производную функции $w[\cdot]$ в точке $\xi=-1$. Можно проверить, что функционал цены ρ_1° имеет ci-производные

$$\begin{gathered}\partial_t\rho_1^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=-2(3-i)\kappa\big(t,w[\cdot]\big)d^+w[-1]/dt,\quad \nabla\rho_1^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=2(3-i)\kappa\big(t,w[\cdot]\big),\\ \big(t,w[\cdot]\big)\in\big([i,i+1)\times\mathrm{Lip}\big)\cap\widetilde{\mathbb{G}},\quad i=\overline{0,2},\end{gathered}$$

удовлетворяет соответствующим соотношениям (3.2), (3.3) и условиям (φ.1)–(φ.4), причем в условии (φ.4) имеем $t_i=i$, $i=\overline{1,3}$. Видно, что функционал Φ, определенный в (3.8), в данном случае имеет вид $\Phi(t,w[\cdot])=2(3-i)\kappa(t,w[\cdot])$. Таким образом, по теореме 1, оптимальные стратегии U° и V° могут быть построены, например, по формуле

$$\begin{gathered}U^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=-\frac{\kappa(t,w[\cdot])}{\|\kappa(t,w[\cdot])\|},\quad V^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=\frac{\kappa(t,w[\cdot])}{\|\kappa(t,w[\cdot])\|},\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in\mathbb{G}\setminus\mathbb{G}_*,\\ U^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=V^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=0,\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in\mathbb{G}_*,\end{gathered}$$

где $\mathbb{G}_*=\{(t,w[\cdot])\in\mathbb{G}\colon \kappa(t,w[\cdot])=0\}$.

Рассмотрим теперь вторую дифференциальную игру для такой же динамический системы (6.1), но при другом показателе качества: $\gamma_2=\sigma\big(x_{\vartheta=3}[\cdot]\big)=\big|x[3]\big|$.Функционал цены этой игры имеет вид $\rho_2^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=\big|\kappa\big(t,w[\cdot]\big)\big|$,где $\kappa\big(t,w[\cdot]\big)$ определен в (6.3). Пусть $\widetilde{\mathbb{G}}=\widetilde{\mathbb{G}}_0\cup\widetilde{\mathbb{G}}_+\cup\widetilde{\mathbb{G}}_-$, где

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbb{G}}_0=\big\{\big(t,w[\cdot]\big)\in\widetilde{\mathbb{G}}\colon \kappa\big(t,w[\cdot]\big)=0\big\},\quad \widetilde{\mathbb{G}}_+=\big\{\big(t,w[\cdot]\big)\in\widetilde{\mathbb{G}}\colon \kappa\big(t,w[\cdot]\big)>0\big\},\\ \widetilde{\mathbb{G}}_-=\big\{\big(t,w[\cdot]\big)\in\widetilde{\mathbb{G}}\colon \kappa\big(t,w[\cdot]\big)<0\big\}.\end{gathered}$$

Заметим, что, в отличие от функционала ρ_1°, функционал цены ρ_2° не является ci-дифференцируемым на $\widetilde{\mathbb{G}}$, а именно в точках множества $\widetilde{\mathbb{G}}_0$. При этом в точках множеств $\widetilde{\mathbb{G}}_+$ и $\widetilde{\mathbb{G}}_-$ для всех $i=\overline{0,2}$ у этого функционала существуют ci-производные

$$\partial_t\rho_2^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=-(3-i)d^+w[-1]/dt,\quad \nabla\rho_2^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=3-i,\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in\big([i,i+1)\times\mathrm{Lip}\big)\cap\widetilde{\mathbb{G}}_+,$$

$$\partial_t\rho_2^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=(3-i)d^+w[-1]/dt,\quad \nabla\rho_2^\circ\big(t,w[\cdot]\big)=-(3-i),\quad \big(t,w[\cdot]\big)\in\big([i,i+1)\times\mathrm{Lip}\big)\cap\widetilde{\mathbb{G}}_-,$$

и он удовлетворяет уравнению (3.2), что является иллюстрацией утверждения теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35. № 2. С. 300–311.
4. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
5. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 101–112. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112
6. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 75–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-75-87
7. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
8. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1–42. DOI: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
9. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth analysis and control theory. New York: Springer, 1998. 278 p.
10. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения типа Гамильтона–Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // Доклады РАН. 2000. Т. 371. № 4. С. 457–461.
11. Aubin J.-P., Haddad G. History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // Positivity. 2002. Vol. 6. Issue 3. P. 331–358. DOI: 10.1023/A:1020244921138
12. Лукоянов Н.Ю. Об условиях оптимальности гарантированного результата в задачах управления системами с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 158–169.
13. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011. 243 с.
14. Kaise H. Path-dependent differential games of inf–sup type and Isaacs partial differential equations // 2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC). 2016. P. 1972–1977. DOI: 10.1109/CDC.2015.7402496
15. Hale J.K., Cruz M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1970. Vol. 85. Issue 1. P. 63–81. DOI: 10.1007/BF02413530
16. Kim A.V. Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Springer Netherlands, 1999. xv+168 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1630-7
17. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.

Поступила в редакцию 17.03.2017

Плаксин Антон Романович, научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: a.r.plaksin@gmail.com

A. R. Plaksin

On Hamilton–Jacobi–Isaacs–Bellman equation for neutral type systems

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 222–237 (in Russian).

Keywords: neutral type systems, differential games, Hamilton–Jacobi equation.

MSC2010: 49L20, 49N70

DOI: 10.20537/vm170206

For a conflict-controlled dynamical system described by functional differential equations of neutral type in Hale's form, we consider a differential game with a quality index that estimates the motion history realized up to the terminal time and includes an integral estimation of realizations of players' controls. The game is formalized in the class of pure positional strategies. Based on a coinvariant derivatives conception we derive a Hamilton–Jacobi functional equation. It is proved, firstly, that the solution of this equation, satisfying certain conditions of smoothness, is the value of the initial differential game, and secondly, that value at points of differentiability satisfies the considered Hamilton–Jacobi equation. Thus this equation can be interpreted as the Hamilton–Jacobi–Isaacs–Bellman equation for neutral type systems.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsyal'nye igry*, 1967, 479 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 458 p.
3. Osipov Iu.S. On the theory of differential games of systems with aftereffect, *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, issue 2, pp. 262–272. DOI: 10.1016/0021-8928(71)90032-3
4. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 516 p.
5. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of the value and saddle point in positional differential games for systems of neutral type, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 101–112 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112
6. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 75–87 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-75-87
7. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991, 216 p.
8. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. DOI: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
9. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. *Nonsmooth analysis and control theory*, New York: Springer, 1998, 278 p.
10. Lukoyanov N.Yu. Functional equations of Hamilton-Jacobi type and differential games with hereditary information, *Doklady Mathematics*, 2000, vol. 61, issue 2, pp. 301–304.
11. Aubin J.-P., Haddad G. History path dependent optimal control and portfolio valuation and management, *Positivity*, 2002, vol. 6, issue 3, pp. 331–358. DOI: 10.1023/A:1020244921138
12. Lukoyanov N.Yu. On optimality conditions for the guaranteed result in control problems for time-delay systems, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. S175–S187. DOI: 10.1134/S0081543810050135
13. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* (Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2011, 243 p.
14. Kaise H. Path-dependent differential games of inf-sup type and Isaacs partial differential equations, *2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 2016, pp. 1972–1977. DOI: 10.1109/CDC.2015.7402496
15. Hale J.K., Cruz M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1970, vol. 85, issue 1, pp. 63–81. DOI: 10.1007/BF02413530
16. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i-smooth calculus*, Springer Netherlands, 1999, xv+168 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1630-7
17. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Berlin: Springer, 1988, x+304 p. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu*, Moscow: Nauka, 1985, 225 p. DOI: 10.1007/978-94-015-7793-9

Received 17.03.2017

Plaksin Anton Romanovich, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S.Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: a.r.plaksin@gmail.com