УДК 517.977.58

© *Г. В. Паршиков*

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ[1]

Рассматривается стационарная управляемая система в конечномерном эвклидовом пространстве и на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством на заданном промежутке времени. Один из подходов к решению рассматриваемой задачи о сближении основан на выделении в пространстве позиций множества разрешимости, т. е. множества всех позиций системы, из которых, как из начальных, разрешима задача о сближении. Конструирование множества разрешимости — самостоятельная сложная и трудоемкая задача, которую удается точно решить лишь в редких случаях. В настоящей работе рассматриваются вопросы приближенного конструирования множества разрешимости в задаче о сближении нелинейной стационарной управляемой системы. Эта задача, как известно, тесно сопряжена с задачей конструирования интегральных воронок и трубок траекторий управляемых систем. Интегральные воронки управляемых систем можно приближенно конструировать по (временны́м) шагам как наборы соответствующих множеств достижимости, поэтому одним из основных элементов разрешающей конструкции в настоящей работе являются множества достижимости.

В работе предлагается схема приближенного вычисления множества разрешимости задачи о сближении управляемой стационарной системы на конечном промежутке времени. В основе этой схемы лежит сведение к приближенному вычислению множеств разрешимости конечного числа более простых задач — задач о сближении с целевым множеством в фиксированные моменты времени из заданного временного промежутка. При этом моменты времени должны выбираться достаточно плотно в упомянутом промежутке времени. В работе проведено математическое моделирование задачи о сближении механической системы «Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором». Представлено графическое сопровождение решения задачи.

Ключевые слова: управляемая система, задача о сближении, множество достижимости, множество разрешимости, аппроксимация множества разрешимости.

DOI: 10.20537/vm170205

Введение

Рассматривается стационарная управляемая система в конечномерном эвклидовом пространстве и на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством на заданном промежутке времени. Один из подходов к решению рассматриваемой задачи о сближении основан на выделении в пространстве позиций множества разрешимости, т. е. множества всех позиций системы, из которых, как из начальных, разрешима задача о сближении (см. например, [1–4]). Конструирование множества разрешимости — самостоятельная сложная и трудоемкая задача, которую удается точно решить (т. е. точно вычислить множество разрешимости) лишь в редких случаях. В настоящей работе рассматриваются вопросы приближенного конструирования множества разрешимости в задаче о сближении нелинейной стационарной управляемой системы. Эта задача, как известно, тесно сопряжена с задачей конструирования интегральных воронок и трубок траекторий управляемых систем (см, например, [5–11]). Интегральные воронки управляемых систем можно приближенно конструировать по (временны́м) шагам как наборы соответствующих множеств

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления».

достижимости, поэтому одним из основных элементов разрешающей конструкции в настоящей работе являются множества достижимости.

В работе предлагается схема приближенного вычисления множества разрешимости задачи о сближении управляемой стационарной системы на конечном промежутке времени. В основе этой схемы лежит сведение к приближенному вычислению множеств разрешимости конечного числа более простых задач — задач о сближении с целевым множеством в фиксированные моменты времени из заданного временного промежутка. При этом моменты времени должны выбираться достаточно плотно в упомянутом промежутке времени. В работе проведено математическое моделирование задачи о сближении механической системы «Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором». Представлено графическое сопровождение решения задачи.

§ 1. Задача о сближении стационарной управляемой системы на конечном промежутке времени

На промежутке времени $[t_0,\vartheta]$, $t_0<\vartheta<\infty$ задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u), \tag{1.1}$$

где t — время, $x\in\mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, u — вектор управления, удовлетворяющий включению

$$u\in P\in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^r),$$

здесь $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^r)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^r$ с хаусдорфовой метрикой.

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

Условие 1. Вектор-функция $f(x,u)$ определена, непрерывна на $\mathbb{R}^n\times P$, и для любой ограниченной и замкнутой области $D\subset\mathbb{R}^n$ найдется такая постоянная $L=L(D)\in(0,\infty)$, что

$$\|f(x_*,u)-f(x^*,u)\|\leqslant L\|x_*-x^*\|,\quad x_*,x^* \text{ из } D,\quad u\in P$$

Условие 2. Существует такая постоянная $\gamma\in(0,\infty)$, что

$$\|f(x,u)\|\leqslant\gamma(1+\|x\|),\quad (x,u)\in\mathbb{R}^n\times P.$$

Условие 3. Множество $F(x)=f(x,P)=\{f(x,u)\colon u\in P\}$ выпукло при любых $x\in\mathbb{R}^n$.

Напомним определения некоторых понятий, употребляемых в настоящей работе.

Под допустимым управлением $u(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$ понимаем измеримую по Лебегу вектор-функцию $u(t)\in P$, $t\in[t_0,\vartheta]$. Полагаем $X(t^*,t_*,x_*)\subset\mathbb{R}^n$, $(t_0\leqslant t_*<t^*\leqslant\vartheta,\ x_*\in\mathbb{R}^n)$ — множество достижимости системы (1.1), отвечающее моменту t^* и начальному состоянию $x(t_*)=x_*$; $X(t^*,t_*,X_*)$ — множество достижимости системы (1.1), отвечающее моменту t^* и исходному множеству $(t_*,X_*)=\{(t_*,x_*)\colon x_*\in X_*\}$, $X_*\subset\mathbb{R}^n$; $X(t_*,x_*)=\bigcup\limits_{t^*\in[t_*,\vartheta]}(t_*,X(t^*,t_*,x_*))$ — интегральная воронка системы (1.1) с исходной позицией (t_*,x_*); $X(t_*,X_*)$ — интегральная воронка системы (1.1) с начальным множеством $(t_*,X_*)\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$.

При условиях 1–3, наложенных на систему (1.1), множество $X(t^*,t_*,x_*)$ есть в то же время множество достижимости дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt}\in F(x,u),\qquad x(t_*)=x_*.$$

Отметим также, что множества $X(t^*,t_*,X_*)$ и $X(t_*,X_*)$ являются компактами соответственно в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$ в случае, когда $X_*\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Предполагается, что наряду с управляемой системой (1.1) задано целевое множество $M\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ для системы (1.1).

Рассмотрим следующую задачу о сближении системы (1.1) с компактом M на промежутке $[t_0,\vartheta]$.

Задача 1. В $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ требуется выделить множество W всех исходных позиций (t_*, x_*) системы (1.1), для каждой из которых найдется допустимое управление на $[t_*, \vartheta]$, порождающее движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1), такое, что $x(t^*) \in M$ при некотором $t^* \in [t_*, \vartheta]$.

Множество W назовем множеством разрешимости задачи 1. Также каждому моменту времени $t^* \in [t_0, \vartheta]$ поставим в соответствие множество разрешимости $W^{t^*} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ в задаче о сближении системы (1.1) с M в момент t^* (см., например, [12, стр. 4]). W^{t^*} есть множество всех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, t^*] \times \mathbb{R}^n$, для каждой из которых найдется допустимое управление на $[t_0, t^*]$, порождающее движение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1), где $x(t^*) \in M$.

Справедливо представление

$$W = \bigcup_{t^* \in [t_0, \vartheta]} W^{t^*}. \tag{1.2}$$

Осуществить точное вычисление множества W в соответствии с представлением (1.2) невозможно, во-первых, в силу несчетности семейства $\{W^{t^*} : t^* \in [t_0, \vartheta]\}$ и, во-вторых, в силу невозможности точно вычислить каждое из множеств W^{t^*}, $t^* \in [t_0, \vartheta]$. Невозможность точного вычисления множеств W^{t^*}, $t^* \in [t_0, \vartheta]$ обусловлена сложностью задач о сближении в их подавляющем числе.

Эти особенности представления множества разрешимости W вызывают необходимость приближенного вычисления множества W. Более реальным для нас является вычисление некоторой конечной совокупности из семейства $\{W^{t^*} : t^* \in [t_0, \vartheta]\}$, которая в то же время должна быть достаточно многочисленной с тем, чтобы быть достаточно хорошей аппроксимацией семейства $\{W^{t^*} : t^* \in [t_0, \vartheta]\}$.

Уточним способ выбора такой конечной совокупности из семейства $\{W^{t^*} : t^* \in [t_0, \vartheta]\}$. Осуществим дискретизацию промежутка $[t_0, \vartheta]$: выберем конечное разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n = \vartheta\}$ такое, что $t_{j+1} - t_j = \Delta = N^{-1}(\vartheta - t_0)$, $j = \overline{0, N-1}$. Введем конечное подсемейство $\{W^{t_j} : t_j = \overline{0, N}\}$ семейства $\{W^{t^*} : t^* \in [t_0, \vartheta]\}$ и отвечающее ему множество

$$W_\Gamma = \bigcup_{t_j = \overline{0, N}} W^{t_j} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Поскольку $W^\vartheta \neq \varnothing$, то $W_\Gamma \neq \varnothing$ и, кроме того, $W_\Gamma \subset W$. Также для любой точки $(t_*, x_*) \in W$ найдется допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_*, \vartheta]$, системы (1.1), где $x^*(t^*) \in M$ при некотором $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Зафиксировав некоторую точку $(t_*, x_*) \in W$, получим, что для нее и отвечающего ей (упомянутого выше) момента t^* выполняется включение $t^* \in [t_j, t_{j+1}]$ при некотором $j = \overline{0, N-1}$. Учитывая условие 2 (см. с. 211) и компактность целевого множества M, можем указать такую достаточно большую ограниченную и замкнутую область D $(M \subset D)$ в $\mathbb{R}^n$, что в $D^* = [t_0, \vartheta] \times D$ будут содержаться все разрешающие конструкции задачи (1.1), возникающие в процессе ее решения.

Полагаем, что такая область D нами выбрана. Введем $K = \max\{\|f(x, u)\| : (x, u) \in D \times P\}$. Движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_0, \vartheta]$, порожденное управлением $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, удовлетворяет соотношению

$$x^*(t) = x^*(t_j) + \int_{t_j}^{t} f(x^*(\xi), u^*(\xi))\, d\xi, \qquad t \in [t_j, t_*],$$

где номер j определен выше. Принимая во внимание включение $x^*(\xi) \in D$, $\xi \in [t_j, t^*]$, получаем

$$\|f(x^*(\xi), u^*(\xi))\| \leqslant K, \qquad \xi \in [t_j, t^*],$$

и, значит, выполняются неравенства

$$\|x^*(t_j) - x^*(t^*)\| \leqslant K\Delta. \tag{1.4}$$

Из включения $x^*(t^*) \in M$ и неравенства (1.4) следует, что

$$x^*(t_j) \in M_{K\Delta}; \tag{1.5}$$

здесь M_ε — замкнутая ε-окрестность множества M в $\mathbb{R}^n$.

В итоге получаем, что для произвольно выбранной позиции $(t_*, x_*) \in W$ найдется допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, которому отвечает движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_*, \vartheta]$, системы (1.1), удовлетворяющее (1.5) при некотором $t_j \in \Gamma$, $j \in \overline{0, N-1}$.

Обозначим через W^Γ множество всех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, из которых система (1.1) может достичь множества $M_{K\Delta}$ в некоторый момент $t_j \in \Gamma$; то есть W^Γ — множество всех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, для каждой из которых найдется допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_*, \vartheta]$ системы (1.1), где $x^*(t_j) \in M_{K\Delta}$ при некотором $t_j \in \Gamma$. Наряду с W^Γ, введем множество $W^{t_j,\Gamma} \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ всех позиций $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, $u^*(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$, $t \in [t_*, \vartheta]$ системы (1.1), где $x^*(t_j) \in M_{K\Delta}$. В традиционной терминологии теории управления множество $W^{t_j,\Gamma}$ есть множество разрешимости в задаче о сближении системы (1.1) с множеством $M_{K\Delta}$ в момент $t_j \in [t_0, \vartheta]$. Справедливо представление

$$W^\Gamma = \bigcup_{j \in \overline{0,N}} W^{t_j,\Gamma}. \tag{1.6}$$

Принимая во внимание определения множеств W, W_Γ, W^Γ, получаем

$$W_\Gamma \subset W \subset W^\Gamma. \tag{1.7}$$

Для того, чтобы оценить хаусдорфово отклонение множества W от одного из двух оценочных множеств W_Γ, W^Γ (от множества W_Γ), оценим сверху хаусдорфово расстояние $d(W_\Gamma, W^\Gamma)$ между минорантой W_Γ и мажорантой W_Γ множества W. Учитывая представления (1.3) и (1.6) множеств W_Γ и W^Γ получаем

$$d(W_\Gamma, W^\Gamma) \leqslant \max_{j \in \overline{0,N}} d(W^{t_j}, W^{t_j,\Gamma}) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta. \tag{1.8}$$

Заметим, что справедливость верхней оценки в (1.8) обусловлена тем, что множества W^{t_j} и $W^{t_j,\Gamma}$, рассматриваемые в терминах так называемого «обратного» времени $\tau = t_0 + \vartheta - t$, $t \in [t_0, \vartheta]$, являются интегральными воронками системы (1.1), записанной в терминах времени τ с исходными множествами (t_0, M) и $(t_0, M_{K\Delta})$ соответственно.

Учитывая включение (1.7) и оценку (1.8), получаем

$$d(W_\Gamma, W) \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta. \tag{1.9}$$

Таким образом, согласно оценке (1.9), множество разрешимости W в задаче 1 совпадает с множеством W_Γ с точностью до величины $e^{L(\vartheta - t_0)} K\Delta$, где $\Delta = N^{-1}(\vartheta - t_0)$. Ясно, что, чем меньше диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ, тем ближе W_Γ к W. Следовательно, при малых $\Delta = \Delta(\Gamma)$ множество W_Γ является хорошей нижней аппроксимацией множества W. Этот факт дает нам основание вычислять приближенно W как множество W_Γ, отвечающее разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с малым диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Принимая во внимание это замечание, обратимся к описанию конструкций, связанных с вычислением множеств W^{t_j}, $j \in \overline{0, N}$.

§ 2. Приближенное вычисление множества W в задаче о сближении

Итак, ориентируясь на разработку схем и алгоритмов приближенного конструирования множества разрешимости W задачи 1, мы обратимся к описанию схем и алгоритмов вычисления множеств W^{t_j}, $j \in \overline{0, N}$. Для этого выберем произвольный момент t_j, $j \in \overline{0, N}$, и рассмотрим задачу о приближенном вычислении множества W^{t_j}.

Рассмотрим на промежутке $[t_0, t_j]$ управляемую систему (1.1). Введем «обратное» время $\tau = t_0 + t_j - t \in [t_0, t_j]$, $t \in [t_0, t_j]$, и отвечающую времени τ управляемую систему

$$\frac{dz}{d\tau} = f^*(z, v), \qquad \tau \in [t_0, t_j], \tag{2.1}$$

$$f^*(z,v) = -f(z,v), \qquad (z,v) \in D \times P.$$

Обозначим через $Z^{t_j}(t_0, z^{(0)})$ и $Z^{t_j} = Z^{t_j}(t_0, M)$ интегральные воронки системы (2.1) соответственно с исходными позицией $(t_0, z^{(0)})$ и множеством (t_0, M). Временны́е сечения $W^{t_j}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (t,x) \in W^{t_j}\}$ и $Z^{t_j}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon (\tau, z) \in Z^{t_j}\}$ множеств W^{t_j} и Z^{t_j} связаны соотношением

$$W^{t_j}(t) = Z^{t_j}(\tau) \subset \mathbb{R}^n, \qquad t = t_0 + t_j - \tau, \quad \tau \in [t_0, t_j]. \tag{2.2}$$

Множества W^{t_j} и Z^{t_j} — компакты в $\mathbb{R}^n$, поскольку $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Также, согласно определению области $D^* = [t_0, \vartheta] \times D$, множества W^{t_j} и Z^{t_j} удовлетворяют включениям $W^{t_j} \subset D^*$ и $Z^{t_j} \subset D^*$.

Учитывая соотношение (2.2), будем осуществлять приближенное вычисление множества W^{t_j} как множества Z^{t_j}, точнее, — как приближенное вычисление некоторого конечного набора множеств из семейства $\{Z^{t_j}(\tau) \colon \tau \in [t_0, t_j]\}$ сечений Z^{t_j}. Каждое множество из выделенного набора будем, в свою очередь, вычислять приближенно как конечное множество в $\mathbb{R}^n$.

На оси времени τ введем разбиение $\Gamma^{t_j} = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_j = t_j\}$ промежутка $[t_0, t_j]$ с одинаковыми шагами $\Delta^{(i)} = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta$, $j = \overline{0, N-1}$, $\Delta^{(i)} = \Delta = \Delta(\Gamma)$.

Введем в рассмотрение конечный набор $\{Z^{t_j}(\tau_i) \subset \mathbb{R}^n \colon i = \overline{0,j}\}$ сечений интегральной воронки $Z^{t_j} = Z^{t_j}(t_0, M)$ системы (2.1), отвечающий разбиению Γ^{t_j}. Набор $\{Z^{t_j}(\tau_i) \colon i = \overline{0,j}\}$ стеснен рекуррентными соотношениями

$$Z^{t_j}(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^{t_j}(\tau_{i-1})), \qquad i = \overline{1,j}; \quad Z^{t_j}(\tau_0) = M. \tag{2.3}$$

Здесь $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ — множество достижимости в момент $\tau^* \in [t_0, t_j]$ системы (2.1) с исходным множеством (τ_*, Z_*), $\tau_* \in [t_0, \tau^*]$, $Z_* \subset \mathbb{R}^n$. Множество $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ является в то же время множеством достижимости и дифференциального включения

$$\frac{dz}{d\tau} \in F^*(z)$$

с исходным множеством (τ_*, Z_*); здесь $F^*(z) = f^*(z, P) = \{f^*(z, v) \colon v \in P\}$.

Не имея возможности точного конструирования множеств $Z^{t_j}(\tau_i)$, $i = \overline{1,j}$, будем конструировать некоторые их аппроксимации $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ как конечные множества в $\mathbb{R}^n$. Предварительно опишем схему формирования некоторых промежуточных между $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ и $Z^{t_j}(\tau_i)$ множеств $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ (промежуточных не в смысле включений), которые также являются конечными, но могут иметь слишком большую мощность, препятствующую эффективным вычислениям.

Зададим, следуя работе [12], конечнозначное отображение $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*)$, $t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant t_j$, $\delta = \tau^* - \tau_* > 0$, Z_* — конечное множество в $\mathbb{R}^n$, где

$$Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup_{z_* \in Z_*} Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*),$$
$$Z^{(\delta)}(\tau^*, \tau_*, z_*) = z_* + \delta F^{(\delta)}(z_*), \quad (\tau_*, z_*) \in D.$$

Здесь $z_* + \delta F^{(\delta)}(z_*) = \{z_* + \delta f^{(\delta)} \colon f^{(\delta)} \in F^{(\delta)}(z_*)\}$, а многозначное отображение $z_* \mapsto F^{(\delta)}(z_*)$ определено как конечнозначная аппроксимация отображения $z_* \mapsto F^*(z_*)$, $z_* \in D$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{z_* \in D} d(F^*(z_*), F^{(\delta)}(z_*)) \leqslant \xi^*(\delta), \qquad \delta > 0. \tag{2.4}$$

Функция $\xi^*(\delta)$ в оценке (2.4) выбрана удовлетворяющей соотношению $\xi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Один из вариантов задания отображения $z_* \mapsto F^{(\delta)}(z_*)$, $z_* \in D$, имеет вид

$$F^{(\delta)}(z_*) = f^*(z_*, P^{(\delta)}), \qquad z_* \in D,$$

где $P^{(\delta)}$ — конечное множество в P, которому отвечает $F^{(\delta)}(z_*)$, удовлетворяющее (2.4). Учитывая, что при таком варианте задания отображения $z_* \mapsto F^{(\delta)}(z_*)$ выполняется $F^{(\delta)}(z_*) \subset F(z_*)$, $z_* \in D$, можем записать оценку (2.4) в виде

$$\sup_{z_* \in D} h(F^*(z_*), F^{(\delta)}(z_*)) \leqslant \xi^*(\delta), \qquad \delta > 0;$$

здесь $h(F_*, F^*)$ — хаусдорфово отклонение компакта F_* от F^* в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Зададим сначала в процедуре формирования набора $\{\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)\colon i = \overline{0, j}\}$ стартовое конечное (т. е. состоящее из конечного числа точек) множество $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_0) \subset D$, стеснив его ограничением

$$d(Z^{t_j}(\tau_0), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_0)) = d(M, \tilde{Z}^{t_j}(\tau_0)) \leqslant \sigma^*(\Delta);$$

функция $\sigma^*(\delta)$ удовлетворяет условию $\sigma^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Множества $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$, $i = \overline{0, j}$, зададим рекуррентными соотношениями, копирующими в определенном смысле соотношения (2.3)

$$\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i) = Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{Z}^{t_j}(\tau_{i-1})).$$

При условиях 1–3, которым удовлетворяет система (1.1), множества $Z^{t_j}(\tau_i)$ и $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ стеснены неравенством

$$d(Z^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \leqslant e^{L(\tau_i - t_0)}(\sigma^*(\Delta) + (\tau_i - t_0)(\xi^*(\Delta) + LK\Delta)). \tag{2.5}$$

Оценка (2.5) имеет место для любых $t_j \in \Gamma$, $\tau_i \in \Gamma^{t_j}$. Принимая во внимание оценку (2.5) и предельные соотношения $\sigma^*(\delta) \downarrow 0$, $\xi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ получаем

Утверждение 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta^0 = \Delta^0(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = \Delta^0$ и любых $t_j \in \Gamma$, $\tau_i \in \Gamma^{t_j}$, $j \in \overline{0, N}$, верно неравенство $d(Z^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \leqslant \varepsilon$.*

Из этого утверждения следует предельное соотношение

$$\max_{t_j \in \Gamma, \tau_i \in \Gamma^{t_j}} d(Z^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \to 0, \qquad \text{при } \Delta = \Delta(\Gamma) \to 0. \tag{2.6}$$

Принимая во внимание (2.6), можем трактовать множества $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$, $i \in \overline{0, j}$, как аппроксимации множеств $Z^{t_j}(\tau_i)$, $i \in \overline{0, j}$ — сечений интегральной воронки Z^{t_j} системы (2.6), отвечающих моментам $\tau_i \in \Gamma^{t_j}$, $j \in \overline{0, N}$.

Поскольку в некоторых задачах о сближении мощность конечных множеств $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ может оказаться настолько большой, что затрудняет проведение эффективных вычислений, то возникает необходимость корректировать в таких задачах конструирование конечных аппроксимаций множеств $Z^{t_j}(\tau_i)$, $i \in \overline{0, j}$. Эта корректировка может осуществляться в форме процедуры прореживания на каждом шаге $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ^{t_j}, уже вычисленного аппроксимирующего конечного множества, которое, как оказалось, имеет слишком большую мощность.

К процедуре прореживания $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z) \subset \mathbb{R}^n$ конечных множеств $Z \subset \mathbb{R}^n$ зависящей от параметра $\Delta = \Delta(\Gamma)$, предъявляем следующие требования:

1. Процедура $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z)$ переводит конечные множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ в конечные множества $H^{(\Delta)}(Z) \subset \mathbb{R}^n$ мощности $m(H^{(\Delta)}(Z))$ меньшей, чем мощность $m(Z)$ множеств Z;

2. Имеет место оценка
$$h(Z, H^{(\Delta)}(Z)) \leqslant \varkappa(\delta);$$
здесь функция $\varkappa(\delta)$, $\delta > 0$, выбрана удовлетворяющей соотношению $\varkappa^*(\delta) = \delta^{-1}\varkappa(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Некоторые варианты процедуры прореживания приведены в [12]. Эти варианты процедуры применялись при моделировании конкретных прикладных задач.

Считая, что нами выбрана некоторая конкретная процедура прореживания $Z \mapsto H^{(\Delta)}(Z)$, определим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ управляемой системы (2.1) множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$, $i \in \overline{0,j}$:

$$\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_0) = H^{(\Delta)}(\tilde{Z}^{t_j}(\tau_0)), \qquad \tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i) = H^{(\Delta)}(Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_{i-1}))), \quad i \in \overline{0,j}.$$

Можно показать, что при достаточно малых Δ (т. е. при $0 < \Delta < L^{-1}\ln 2$) множества $\tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$ удовлетворяют соотношению

$$d(\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i), \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)) \leqslant 2L^{-1}e^{L(\tau_i - t_0)}\varkappa^*(\Delta), \quad i \in \overline{0,j}. \tag{2.7}$$

Далее, введем обозначения $\tilde{W}^{t_j}(t_m) = \tilde{Z}^{t_j}(\tau_i)$, $\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m) = \tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$, $t_m + \tau_i = t_0 + t_j$, $i \in \overline{0,j}$. Множества $\tilde{W}^{t_j}(t_m)$ и $\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)$ являются конечными аппроксимациями сечений $W^{t_j}(t_m)$ множества разрешимости $W^{t_j} \subset [t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$ в задаче о сближении управляемой системы (1.1) с множеством W в момент t_j, $j \in \overline{0,N}$.

Оценки (2.5) и (2.7) запишем в терминах множеств $W^{t_j}(t_m)$, $\tilde{W}^{t_j}(t_m)$, $\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)$:

$$d(W^{t_j}(t_m), \tilde{W}^{t_j}(t_m)) \leqslant e^{L(t_j - t_m)}(\sigma^*(\Delta) + (t_j - t_m)(\xi^*(\Delta) + LK\Delta)), \tag{2.8}$$

$$d(\tilde{W}^{t_j}(t_m), \tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)) \leqslant 2L^{-1}e^{L(t_j - t_m)}\varkappa^*(\Delta), \qquad m = \overline{0,j}. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) следует оценка

$$d(W^{t_j}(t_m), \mathcal{W}^{t_j}(t_m)) \leqslant \varphi(\Delta);$$

здесь функция $\varphi(\Delta) = e^{L(\vartheta - t_0)}(2L^{-1}\varkappa^*(\Delta) + \sigma^*(\Delta) + (\vartheta - t_0)(\xi^*(\Delta) + LK\Delta))$ монотонно убывает к нулю при $\delta \downarrow 0$, что влечет за собой предельное соотношение

$$\lim_{\Delta = \Delta(\Gamma)\downarrow 0} \max_{t_j \in \Gamma, t_m \in \Gamma^{t_j}} d((t_m, \tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)), (t_m, W^{t_j}(t_m)) = 0.$$

Введем в рассмотрение конечные множества в $[t_0, t_j] \times \mathbb{R}^n$, $t_j \in \Gamma$

$$\tilde{\mathcal{W}}^{t_j} = \bigcup_{t_m \in \Gamma^{t_j}} (t_m, \tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)), \qquad \tilde{\mathcal{W}}_\Gamma = \bigcup_{t_j \in \Gamma} \tilde{\mathcal{W}}^{t_j}.$$

Учитывая представления $\tilde{\mathcal{W}}_\Gamma = \bigcup\limits_{t_m \in \Gamma^{t_j}, t_j \in \Gamma} (t_m, \tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m))$ и $W_\Gamma = \bigcup\limits_{t \in [t_0, t_j], t_j \in \Gamma} (t, W^{t_j}(t))$ множеств $\tilde{\mathcal{W}}_\Gamma$ и W_Γ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, а также предельное соотношение $d(\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m), W^{t_j}(t)) \to 0$ при $|t_j - t| \downarrow 0$ получаем, что

$$d(\tilde{\mathcal{W}}_\Gamma, W_\Gamma) \to 0 \qquad \text{при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{2.10}$$

Учитывая (2.10) и предельное соотношение $d(W_\Gamma, W) \to 0$ при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$, получаем

$$d(\tilde{\mathcal{W}}_\Gamma, W) \to 0 \qquad \text{при } \Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0. \tag{2.11}$$

Предельное соотношение (2.11) есть обоснование того, что конечные множества $\tilde{\mathcal{W}}_\Gamma \subset D^*$ являются аппроксимациями множества разрешимости W в задаче 1 о сближении.

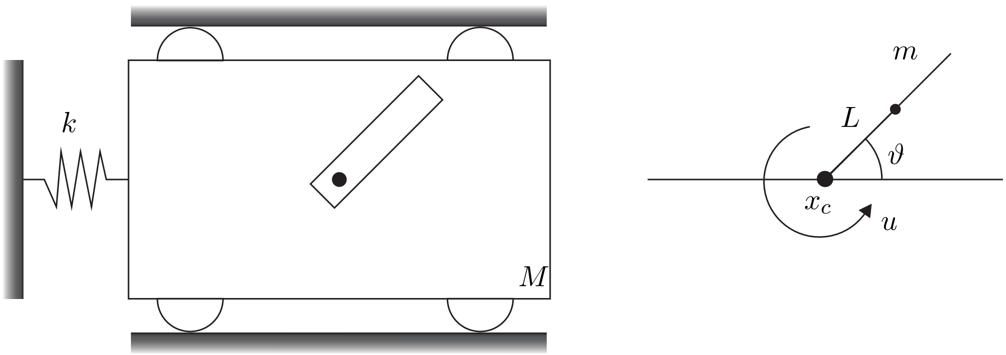

Рис. 1. Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором

§ 3. Примеры. Трансляционный осциллятор с ротационным актуатором

В этом параграфе приведем пример управляемой системы на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ и задачу 1 о сближении этой системы с целевым множеством M. Для решения этой задачи применим схемы и алгоритмы, описанные в § 1 и § 2.

В качестве управляемой механической системы возьмем изображенную на рис. 1 систему трансляционного осциллятора с ротационным актуатором [13, с. 30].

Система включает в себя платформу массы M, соединенную с неподвижной вертикальной поверхностью пружиной с линейной жесткостью, характеризуемой коэффициентом k. Платформа может двигаться только в горизонтальной плоскости, параллельной оси пружины. На платформе установлен эксцентрик массы m, приводимый в движение электродвигателем постоянного тока и имеющий момент инерции I относительно центра масс, расположенного на расстоянии L от оси вращения. Обозначим управляющий момент, приложенный к эксцентрику через u. Вращающий эксцентрик создает управляющую силу, используемую для демпфирования поступательного движения платформы. Математические уравнения системы в предположении отсутствия силы трения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{(m+M)u - mL\cos x_1(mLx_2^2 \sin x_1 - kx_3)}{(I+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos^2 x_1}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \dfrac{(I+mL^2)(mLx_2^2\sin x_1 - kx_3) - mL\cos x_1 u}{(I+mL^2)(m+M) - m^2L^2\cos^2 x_1}, \end{cases} \tag{3.1}$$

здесь $x_1 = x_c$, $x_2 = \dot{x}_c$, $x_3 = \vartheta$, $x_4 = \dot{\vartheta}$.

Для решения задачи 1 с привлечением алгоритмов, представленных в § 1 и § 2, в обоих случаях вводится разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и для него проводятся вычисления на ЭВМ последовательности $\{\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)\}$ множеств $\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m) \subset \mathbb{R}^4$, $j = N, \ldots, 0$, $\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_N)) = M$, аппроксимирующих множество разрешимости W в задаче 1.

Отметим, что попятное пошаговое вычисление множеств $\tilde{\mathcal{W}}^{t_j}(t_m)$, $j = N \ldots 0$, осуществляется как пошаговое вычисление множеств $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i) = H^{(\Delta)}(Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)))$, $i = 1, \ldots, N$, где оператор $H^{(\Delta)}(Z)$ означает процедуру прореживания множества $Z \subset \mathbb{R}^n$ (см. с. 215). При пошаговом вычислении множеств $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$, начиная с некоторых номеров i, начинают проявляться тенденции распространения множеств $\mathcal{Z}^a(\tau_i)$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и возникает потребность в прореживании множеств $Z^{(\Delta)}(\tau_i, \tau_{i-1}, \tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i))$, с помощью процедур, подробно описанных в, например, [12].

Рассмотрим два примера системы (3.1) на промежутке $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$ с различными целевыми множествами M и приведем графические представления решения задачи о сближении в каждом из них.

Пример 1. Целевое множество M представляет собой единичный тессеракт (четырехмерный гиперкуб) с центром в начале координат (рис. 2), т. е. $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x\|_\infty \leqslant 0.5\}$.

Пример 2. Целевое множество M представляет собой единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^4$ (рис. 3), т. е. $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x\|_2 \leqslant 1\}$.

В обоих случаях разбиение Γ промежутка $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$ имеет шаг $\Delta = 0.1$, $N = 30$, $t_0 = 0$, $t_N = 3$; управление u представлено конечным набором значений из $[-1, 1]$ с шагом 0.5. Кроме того, в обоих примерах управляемая система имеет одни и те же параметры:

$$M = 1.0; \qquad m = 0.1; \qquad L = 1; \qquad k = 0.1; \qquad I = 1.2; \qquad m = 0.25.$$

Результаты численного моделирования множеств $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ ($\tau_i = 1.5$ и $\tau_i = 3.0$) для целевого множества M из примера 1 представлены на рисунках 4–7.

Результаты численного моделирования множеств $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ ($\tau_i = 1.5$ и $\tau_i = 3.0$) для целевого множества M из примера 2 представлены на рисунках 8–11.

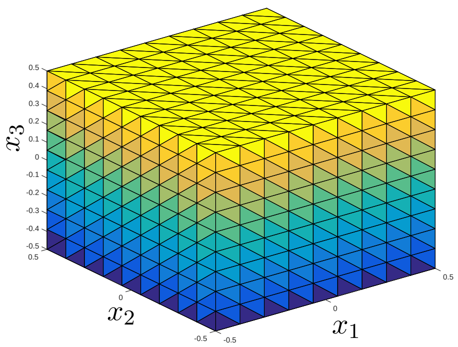

Рис. 2. Проекция целевого множества M для примера 1 на подпространство $\mathbb{R}^{1,2,3}$

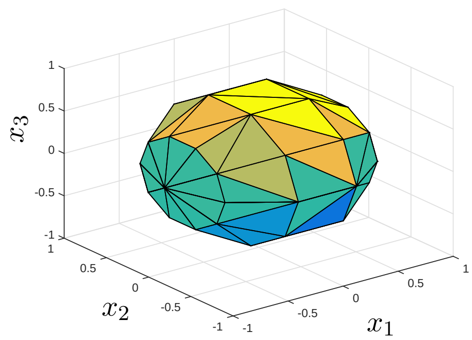

Рис. 3. Проекция целевого множества M для примера 2 на подпространство $\mathbb{R}^{1,2,3}$

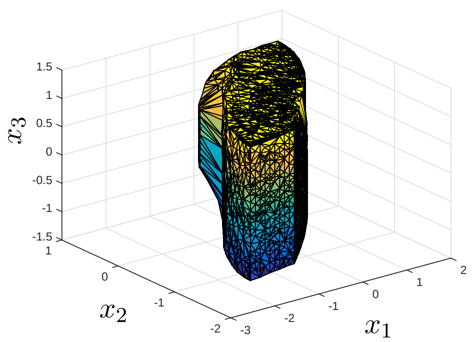

Рис. 4. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 1.5$ на подпространство $\mathbb{R}^{1,2,3}$ в примере 1

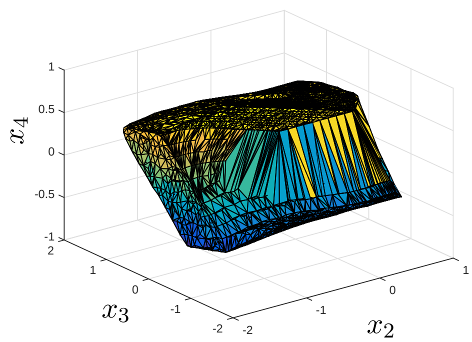

Рис. 5. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 1.5$ на подпространство $\mathbb{R}^{2,3,4}$ в примере 1

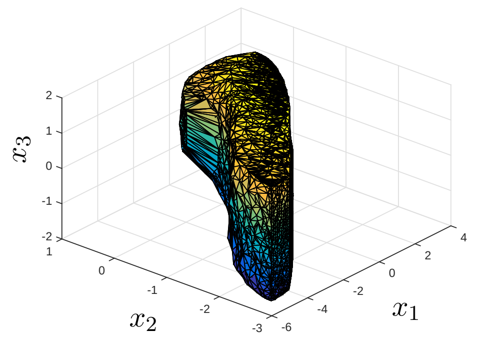

Рис. 6. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 3.0$ на подпространство $\mathbb{R}^{1,2,3}$ в примере 1

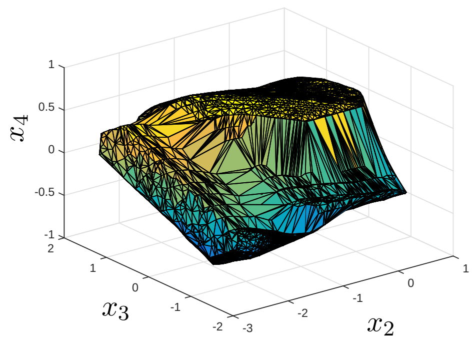

Рис. 7. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 3.0$ на подпространство $\mathbb{R}^{2,3,4}$ в примере 1

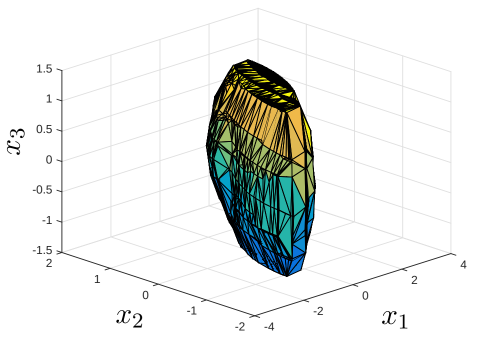

Рис. 8. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 1.5$ на подпространство $\mathbb{R}^{1,2,3}$ в примере 2

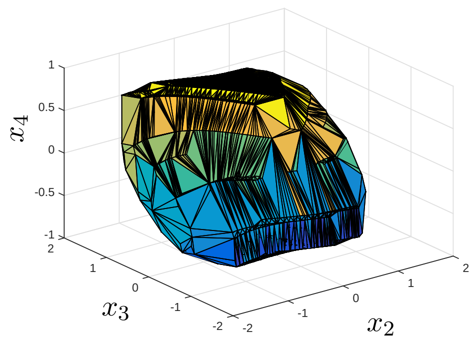

Рис. 9. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 1.5$ на подпространство $\mathbb{R}^{2,3,4}$ в примере 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 756 с.
5. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 275–284.
6. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
7. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
8. Lempio F., Veliov V. Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. Vol. 54. P. 149–232.
9. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 179–187.
10. Гусев М.И. Оценки множества достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
11. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 263–269.

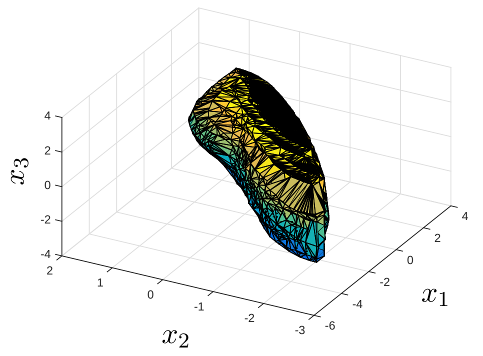

Рис. 10. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 3.0$ на подпространство $\mathbb{R}^{1,2,3}$ в примере 2

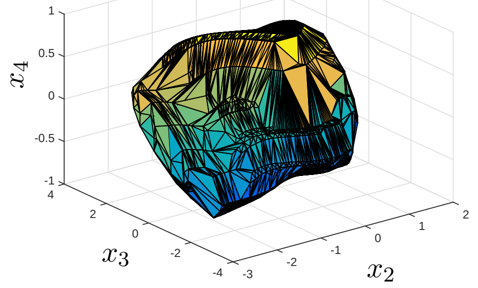

Рис. 11. Проекция множества $\tilde{\mathcal{Z}}^{t_j}(\tau_i)$ при $\tau_i = 3.0$ на подпространство $\mathbb{R}^{2,3,4}$ в примере 2

12. Матвийчук А.Р., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Ушаков В.Н. Задача о сближении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 165–187.
13. Халил Х.К. Нелинейные системы. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 812 с.

Поступила в редакцию 16.05.2017

Паршиков Григорий Викторович, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: grigory.parshikov@uran.ru

G. V. Parshikov
On approximate solvability set construction in a guidance problem for a time-invariant control system on a finite time interval

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 210–221 (in Russian).

Keywords: control system, guidance problem, attainability set, solvability set, solvability set approximation.

MSC2010: 37M05, 49M25, 93C15

DOI: 10.20537/vm170205

A time-invariant control system on a finite time interval in the finite-dimensional Euclidean space is considered. We discuss a problem of guidance with a compact target set for a control system on a given time interval. One way to solve the considered guidance problem is based on finding a solvability set in the phase space, namely, a set of all system positions from which, as from the initial ones, the guidance problem is solvable. The construction of the solvability set is an independent time-consuming problem which rarely has an exact solution. In this paper we discuss the approximate construction of a solvability set in the guidance problem for a time-invariant nonlinear control system. It is well-known that this problem is closely connected with the problem of constructing integral funnels and trajectory tubes of control systems. Integral funnels of control systems can be approximately constructed step-by-step as sets of corresponding attainability sets, therefore, attainability sets are considered to be the basic elements of the solving construction in this paper.

Here, we propose a scheme of the solvability set approximate construction in a guidance problem for a time-invariant control system on a finite time interval. The basis of this scheme is reduction to the solvability sets approximate calculation of a finite number of simpler problems, namely, problems of guidance with the target set at fixed time moments from the given time interval. Wherein, the moments of time have to be

chosen quite tightly in the mentioned time interval. As an example, we provide mathematical modeling of the guidance problem of the control system named “Translational Oscillator with Rotating Actuator” as well as the graphical support of the problem solution.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
2. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under uncertainty), Moscow: Nauka, 1977, 392 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 520 p.
4. Kurzhanski A.B. *Izbrannye trudy* (Selected papers), Moscow: Moscow State University, 2009, 756 p.
5. Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Parshikov G.V. A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the feasibility set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 135–144. DOI: 10.1134/S0081543814020126
6. Chernousko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem: Metod ellipsoidov* (Dynamical systems phase state estimation: ellipsoid method), Moscow: Nauka, 1988, 319 p.
7. Kurzhanskii A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p.
8. Lempio F., Veliov V. Discrete approximation of differential inclusions, *Bayreuther Mathematische Schriften*, 1998, vol. 54, pp. 149–232.
9. Guseinov Kh.G., Moiseev A.N. Ushakov V.N. The approximation of reachable domains of control systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, vol. 62, issue 2, pp. 169–175. DOI: 10.1016/S0021-8928(98)00022-7
10. Gusev M.I. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 134–146. DOI: 10.1134/S008154381006012X
11. Filippova T.F. Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 95–102. DOI: 10.1134/S008154381006009X
12. Matviychuk A.R., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Ushakov V.N. A guidance problem for a nonlinear control system on a finite time interval, *Prikl. Mat. Mekh.*, 2017, vol. 81, issue 2, pp. 165–187 (in Russian).
13. Khalil H.K. *Nelineinye sistemy* (Nonlinear systems), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2009, 812 p.

Received 16.05.2017

Parshikov Grigory Viktorovich, Researcher, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: grigory.parshikov@uran.ru