

УДК 517.977

© *Н. А. Красовский, А. М. Тарасьев***АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ
БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ С ДИСКОНТИРОВАННЫМИ ИНДЕКСАМИ**

В работе рассматриваются динамические биматричные игры с интегральными показателями, дисконтированными на бесконечном интервале времени. Динамика системы задается дифференциальными уравнениями, описывающими изменение поведения игроков в зависимости от поступающих сигналов управления. Рассматривается задача построения равновесных траекторий в рамках минимаксного подхода, предложенного Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным в теории дифференциальных игр. Используется конструкция динамического равновесия по Нэшу, которая развита в работах А. Ф. Клейменова. Для синтеза оптимальных стратегий управления применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина в сочетании с методом характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби. Получены аналитические формулы для кривых переключения оптимальных стратегий управления. Проведен анализ чувствительности равновесных решений в зависимости от параметра дисконтирования в интегральных функционалах выигрыша. Установлена асимптотическая сходимость равновесных траекторий по параметру дисконтирования к решению динамической биматричной игры со среднеинтегральными функционалами выигрыша, которые исследовались в работах В. И. Арнольда. Рассмотрено приложение полученных результатов к динамической модели инвестирования на финансовых рынках.

Ключевые слова: динамические игры, принцип максимума Понтрягина, уравнения Гамильтона–Якоби, равновесные траектории.

DOI: [10.20537/vm170204](https://doi.org/10.20537/vm170204)

В работе рассматривается динамическая биматричная игра на бесконечном горизонте с дисконтированными интегральными функционалами выигрышей. Параметр дисконтирования, как правило, является крайне неопределенной величиной, что отражает субъективные составляющие в экономических и финансовых моделях. В связи с этим модели с дисконтированными показателями требуют проведения анализа чувствительности решений по отношению к изменениям параметра дисконтирования. В работе строятся оптимальные стратегии управления на основе минимаксного подхода Н. Н. Красовского [9, 22] с использованием конструкций принципа максимума Л. С. Понтрягина [13] и техники метода характеристик для обобщенных (минимаксных) решений уравнений Гамильтона–Якоби, предложенных А. И. Субботиным [15]. На основе построенных оптимальных стратегий управления моделируются равновесные траектории динамической биматричной игры в рамках подхода, предложенного в монографии А. Ф. Клейменова [3]. Важно подчеркнуть, что в рассматриваемой постановке удается получить аналитические решения для стратегий управления, зависящие явным образом от неопределенного параметра дисконтирования. Это позволяет провести анализ чувствительности равновесных траекторий по отношению к изменению параметра дисконтирования и определить асимптотическое поведение решений при стремлении параметра дисконтирования к нулю. Показывается, что в асимптотике стратегии управления и равновесные траектории сходятся к решению динамической биматричной игры со среднеинтегральными функционалами выигрышей, которые рассматривались в работах В. И. Арнольда [1].

Следует отметить, что в работе используются динамические конструкции и методы анализа эволюционных игр, предложенных в работе [10]. При обосновании динамики игрового взаимодействия участников применяются элементы эволюционных игровых моделей [2, 18, 20, 21, 24]. Для анализа сдвига равновесных траекторий от статических равновесий по Нэшу конкурентного типа к точкам кооперативного максимума Парето учитываются идеи и конструкции кооперативных динамических игр [12]. Динамика биматричной игры может быть интерпретирована

как обобщение уравнений А. Н. Колмогорова для вероятностей состояний [4], которые широко применяются в марковских процессах, стохастических моделях математической экономики и теории очередей. Обобщение понимается в том смысле, что параметры динамики не фиксированы априори, а являются управляющими параметрами и строятся по принципу обратной связи в рамках теории управления и теории дифференциальных игр.

Решение динамических биматричных игр основано на построении позиционных стратегий, максимизирующих собственные выигрыши при любом поведении конкурирующих игроков, то есть «гарантирующих» стратегий [9, 11, 22]. Построение решений на бесконечном горизонте разбивается на фрагменты с конечным горизонтом, для которых применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина [13] в сочетании с конструкциями теории позиционных дифференциальных игр [9]. Более точно: элементы принципа максимума рассматриваются в совокупности с методом характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби [15–17]. Оптимальная траектория в каждом временном фрагменте строится из кусков характеристик, при этом моменты переключения с одной характеристики на другую определяются из принципа максимума. В этом методе моменты и точки переключения генерируют линии переключения в фазовом пространстве, определяющие синтез оптимальных позиционных стратегий. Отметим, что аналогичные методы построения позиционных стратегий используются в работах [5–8, 23].

В рамках предложенного подхода рассматривается модель конкуренции на финансовых рынках, которая описывается динамической биматричной игрой. Для нее строятся кривые переключения для оптимальных стратегий управления и синтезируются равновесные траектории для различных показателей коэффициента дисконтирования. Проводится анализ качественного поведения равновесных траекторий и демонстрируется, что равновесные траектории динамической биматричной игры дают результаты лучшие, чем результаты статического равновесия по Нэшу. Приводятся результаты анализа чувствительности полученных решений. Этот анализ показывает, что кривые переключения оптимальных стратегий управления для серий значений коэффициента дисконтирования обладают свойством сходимости по параметру. Приводятся расчеты, подтверждающие факт асимптотической сходимости равновесных траекторий в задачах с дисконтированием к равновесной траектории в задаче со среднеинтегральным функционалом выигрышей.

§ 1. Динамика модели

Исследуется система дифференциальных уравнений, задающая динамику поведения двух игроков:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t), & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + v(t), & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Параметр $x = x(t)$, $0 \leq x \leq 1$, обозначает вероятность того, что первый игрок придерживается первой стратегии (соответственно, $(1 - x)$ есть вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Параметр $y = y(t)$, $0 \leq y \leq 1$, есть вероятность выбора первой стратегии вторым игроком (соответственно, $(1 - y)$ — вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Управляющие параметры $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяют условиям $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ и могут быть интерпретированы как сигналы, рекомендуемые смену стратегий игроками. Например, значение $u = 0$ ($v = 0$) соответствует сигналу: «сменить первую стратегию на вторую». Значение $u = 1$ ($v = 1$) соответствует сигналу: «сменить вторую стратегию на первую». Значение $u = x$ ($v = y$) соответствует сигналу: «сохранять предыдущую стратегию».

Следует отметить, что базис для динамики (1.1) и ее свойства были рассмотрены в работах [10, 24]. Такая динамика обобщает дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний [4]. Такое обобщение предполагает, что коэффициенты входящих и исходящих потоков внутри коалиций участников не заданы априори и могут быть сконструированы как позиционные стратегии в управляемом процессе.

§ 2. Локальные функции выигрыша

Предположим, что выигрыш первого игрока описывается матрицей $A = a_{ij}$, а выигрыш второго игрока описывается матрицей $B = b_{ij}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Локальные функции выигрыша игроков в периоде $t, t \in [t_0, +\infty)$, определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матрицами A и B в биматричной игре, и могут быть интерпретированы как «локальные» интересы игроков:

$$g_A(x(t), y(t)) = C_A x(t)y(t) - \alpha_1 x(t) - \alpha_2 y(t) + a_{22},$$

$$g_B(x(t), y(t)) = C_B x(t)y(t) - \beta_1 x(t) - \beta_2 y(t) + b_{22}.$$

Здесь параметры C_A, α_1, α_2 и C_B, β_1, β_2 задаются в соответствии с классической теорией биматричных игр (см. [2]):

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad D_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \alpha_1 = a_{22} - a_{12}, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21},$$

$$C_B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \quad D_B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad \beta_1 = b_{22} - b_{12}, \quad \beta_2 = b_{22} - b_{21}.$$

§ 3. Равновесие по Нэшу в дифференциальной игре с дисконтированными функционалами

В этом параграфе рассматривается дифференциальная игра с ненулевой суммой двух игроков с дисконтированными функционалами выигрыша на бесконечном горизонте

$$JD_A^\infty = [JD_A^-, JD_A^+], \tag{3.1}$$

$$JD_A^- = JD_A^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T e^{-\lambda(t-t_0)} g_A(x(t), y(t)) dt,$$

$$JD_A^+ = JD_A^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T e^{-\lambda(t-t_0)} g_A(x(t), y(t)) dt,$$

определенными на траекториях $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1.1).

Функционалы выигрыша второго игрока, $JD_B^\infty, JD_B^-, JD_B^+$, определяются аналогично заменой функции $g_A(x, y)$ на функцию $g_B(x, y)$.

Дисконтированные функционалы (3.1) являются традиционными для задач эволюционной экономики и экономического роста [21] и связаны с идеей обесценивания финансовых средств во времени. В задачах оптимального гарантированного управления такие функционалы рассматривались в работе [24]. В отличие от функционалов выигрыша, оптимизируемых в каждом периоде, они допускают возможность проигрыша в некоторых периодах для того, чтобы выигрывать в других периодах и получать лучший интегральный результат по всем периодам. Это обстоятельство дает возможность для более длительного пребывания системы в благоприятных областях, где значения локальных выигрышей игроков строго больше значений выигрышей в состояниях статического равновесия по Нэшу.

Представим понятие динамического равновесия по Нэшу для эволюционной игры с динамикой (1.1) и дисконтированными функционалами выигрыша (3.1) в контексте конструкций неантагонистических позиционных дифференциальных игр [3, 9, 10]. Определим динамическое равновесие по Нэшу в классе позиционных стратегий (обратных связей) $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$.

Определение 1. Динамические равновесия по Нэшу (U^0, V^0) , $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$ из класса управлений по принципу обратной связи $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ для данной задачи определяются неравенствами

$$JD_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq JD_A^+(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - \varepsilon, \quad JD_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq JD_B^+(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) - \varepsilon,$$

$$(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U^0, V^0), \quad (x_1(\cdot), y_1(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U, V^0), \quad (x_2(\cdot), y_2(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U^0, V).$$

Здесь символом X обозначено множество траекторий, выходящих из начальной точки и порожденных соответствующими позиционными стратегиями в смысле работы [9].

§ 4. Вспомогательные игры с нулевой суммой

Для построения желаемых равновесных обратных связей U^0, V^0 используем подход, представленный в [3]. В соответствии с таким подходом мы выстраиваем равновесие с помощью оптимальных обратных связей для дифференциальных игр $\Gamma_A = \Gamma_A^- \cup \Gamma_A^+$ и $\Gamma_B = \Gamma_B^- \cup \Gamma_B^+$ с выигрышами JD_A^∞ и JD_B^∞ (3.1). В игре Γ_A первый игрок гарантированно максимизирует функционал $JD_A^-(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, а второй игрок обеспечивает, напротив, минимизацию функционала $JD_A^+(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $V = v(t, x, y, \varepsilon)$. Наоборот, в игре Γ_B второй игрок гарантированно максимизирует функционал $JD_B^-(x(\cdot), y(\cdot))$, а первый игрок минимизирует функционал $JD_B^+(x(\cdot), y(\cdot))$.

Введем следующие обозначения. Обратные связи, решающие, соответственно, задачу гарантированной максимизации функционалов выигрыша JD_A^-, JD_B^- , обозначим как $u_A^0 = u_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Заметим, что такие обратные связи представляют гарантированную максимизацию выигрышей игроков в длительной перспективе и могут называться «позитивными». Через $u_B^0 = u_B^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_A^0 = v_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ обозначим обратные связи, наиболее неблагоприятные для противоположных игроков, а именно те, которые минимизирует функционалы выигрыша JD_B^+, JD_A^+ противоположных игроков. Назовем такие обратные связи «наказывающим».

Заметим, что негибкие решения отмеченных проблем могут быть получены в рамках классической теории биматричных игр. В самом деле, предположим для определенности (это предположение делается с иллюстративными целями и не ограничивает общность решения), что выполнены следующие соотношения для параметров матриц A и B , соответствующие почти антагонистической структуре биматричной игры:

$$C_A > 0, \quad C_B < 0, \\ 0 < x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} < 1, \quad 0 < x_B = \frac{\beta_2}{C_B} < 1, \quad 0 < y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} < 1, \quad 0 < y_B = \frac{\beta_1}{C_B} < 1. \quad (4.1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Дифференциальные игры Γ_A^-, Γ_A^+ имеют равные значения:

$$w_A^- = w_A^+ = w_A = \frac{D_A}{C_A},$$

и дифференциальные игры Γ_B^-, Γ_B^+ имеют равные значения:

$$w_B^- = w_B^+ = w_B = \frac{D_B}{C_B}$$

для произвольного начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [1, 0]$. Эти значения, например, могут быть гарантированы «позитивными» обратными связями u_A^{cl}, v_B^{cl} , соответствующими классическим решениям x_A, y_B :

$$u_A^0 = u_A^{cl} = u_A^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_A < x \leq 1, \\ 1, & 0 \leq x < x_A, \\ [0, 1], & x = x_A; \end{cases}$$

$$v_B^0 = v_B^{cl} = v_B^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_B < y \leq 1, \\ 1, & 0 \leq y < y_B, \\ [0, 1], & y = y_B. \end{cases}$$

«Наказывающие» обратные связи определяются формулами

$$u_B^0 = u_B^{cl} = u_B^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_B < x \leq 1, \\ 1, & 0 \leq x < x_B, \\ [0, 1], & x = x_B; \end{cases}$$

$$v_A^0 = v_A^{cl} = v_A^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_A < y \leq 1, \\ 1, & 0 \leq y < y_A, \\ [0, 1], & y = y_A, \end{cases}$$

и соответствуют классическим статическим решениям x_B, y_A (4.1), которые генерируют статическое равновесие по Нэшу $NE = (x_B, y_A)$.

Доказательство этого утверждения можно получить прямой подстановкой указанных стратегий в соответствующие функционалы выигрышей (3.1).

Замечание 1. Значения функций выигрыша $g_A(x, y), g_B(x, y)$ совпадают в точках $(x_A, y_B), (x_B, y_A)$:

$$g_A(x_A, y_B) = g_A(x_B, y_A) = w_A, \quad g_B(x_A, y_B) = g_B(x_B, y_A) = w_B.$$

Точка $NE = (x_B, y_A)$ есть «взаимно наказывающее» равновесие по Нэшу, а точка (x_A, y_B) не обладает равновесными свойствами в соответствующей статической игре.

§ 5. Построение динамического равновесия по Нэшу

Построим пару обратных связей, которые составляют равновесие по Нэшу. Для этого соединим «позитивные» обратные связи u_A^0, v_B^0 и «наказывающие» обратные связи u_B^0, v_A^0 .

Выберем начальное положение $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и параметр точности $\varepsilon > 0$. Выберем траекторию $(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U_A^0(\cdot), v_B^0(\cdot))$, сгенерированную «позитивными» обратными связями $u_A^0 = U_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Возьмем $T_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} g_A(x^0(t), y^0(t)) &> JD_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \\ g_B(x^0(t), y^0(t)) &> JD_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \\ t &\in [T_\varepsilon, +\infty]. \end{aligned}$$

Обозначим через $u_A^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1], v_B^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ пошаговую реализацию стратегий u_A^0, v_B^0 такую, что соответствующая пошаговая траектория $(x_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^0(t), y^0(t)) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon.$$

Из результатов работы [3] вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon), V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$, соединяющая вместе «позитивные» обратные связи u_A^0, v_B^0 и «наказывающие» обратные связи u_B^0, v_A^0 в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned} U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) &= \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^0(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) &= \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^0(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned}$$

является динамическим ε -равновесием по Нэшу.

Ниже конструируются гибкие «позитивные» обратные связи, которые генерируют траектории $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$, сводящие к «лучшим» положениям, чем негибкое динамическое равновесие $(x_B, y_A), (x_A, y_B)$ по обоим критериям $JD_A^\infty(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \geq v_A, JD_B^\infty(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \geq v_B$.

§ 6. Двухшаговые задачи оптимального управления

Для построения «позитивных» обратных связей $u_A^0 = u_A^{fl}(x, y)$, $v_B^0 = v_B^{fl}(x, y)$ рассмотрим в этом параграфе вспомогательную двухшаговую задачу оптимального управления с дисконтированным функционалом выигрыша для первого игрока в ситуации, когда действия второго игрока наиболее неблагоприятны. А именно, проанализируем задачу оптимального управления для динамической системы (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + v(t), & y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

с функционалом выигрыша

$$JD_A^f = \int_0^{T_f} e^{-\lambda t} g_A(x(t), y(t)) dt. \quad (6.2)$$

Здесь без ограничения общности считаем, что $t_0 = 0$, $T = T_f$, и терминальный момент времени $T_f = T_f(x_0, y_0)$ определим позднее.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что цена статической игры равна нулю:

$$w_A = \frac{D_A}{C_A} = 0, \quad (6.3)$$

и выполняются следующие условия:

$$C_A > 0, \quad 0 < x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} < 1, \quad 0 < y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} < 1. \quad (6.4)$$

Рассмотрим случай, когда начальные условия (x_0, y_0) системы (6.1) удовлетворяют соотношениям

$$x_0 = x_A, \quad y_0 > y_A. \quad (6.5)$$

Предположим, что действия второго игрока наиболее неблагоприятны для первого игрока. Для траекторий системы (6.1), стартующих из начальных положений (x_0, y_0) (6.5), эти действия $v_A^0 = v_A^{cl}(x, y)$ определяются соотношением

$$v_A^{cl}(x, y) \equiv 0.$$

Оптимальные действия $u_A^0 = u_A^{fl}(x, y)$ первого игрока, согласно функционалу выигрышей JD_A^f (6.2), в данной ситуации могут быть представлены как двухшаговое импульсное управление: оно равняется единице от начального момента времени $t_0 = 0$ до момента оптимального переключения s и затем равняется нулю до конечного момента времени T_f :

$$u_A^0(t) = u_A^{fl}(x(t), y(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_0 \leq t < s, \\ 0, & \text{если } s \leq t < T_f. \end{cases}$$

Здесь параметр s является параметром оптимизации. Конечный момент времени T_f определяется следующим условием. Траектория $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (6.1), стартующая с линии, на которой $x(t_0) = x_A$, возвращается на эту линию, когда $x(T_f) = x_A$.

Рассмотрим, таким образом, две совокупности характеристик. Первая описывается системой дифференциальных уравнений при значении управляющего параметра $u = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + 1, \\ \dot{y}(t) &= -y(t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

решения которой определяются формулой Коши

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1, \quad y(t) = y_0 e^{-t}. \quad (6.7)$$

Здесь начальные положения (x_0, y_0) удовлетворяют условиям (6.5) и параметр времени t удовлетворяет неравенству $0 \leq t < s$.

Вторая совокупность характеристик задана системой дифференциальных уравнений при значении управляющего параметра $u = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t), \\ \dot{y}(t) &= -y(t), \end{aligned} \tag{6.8}$$

решения которой определяются формулой Коши

$$x(t) = x_1 e^{-t}, \quad y(t) = y_1 e^{-t}. \tag{6.9}$$

Здесь начальные положения $(x_1, y_1) = (x_1(s), y_1(s))$ определяются соотношениями

$$x_1 = x_1(s) = (x_0 - 1)e^{-s} + 1, \quad y_1 = y_1(s) = y_0 e^{-s} \tag{6.10}$$

и параметр времени t удовлетворяет неравенству $0 \leq t < p$. Здесь конечный момент времени $p = p(s)$ и конечное положение $(x_2, y_2) = (x_2(s), y_2(s))$ всей траектории $(x(\cdot), y(\cdot))$ заданы формулами

$$x_1 e^{-p} = x_A, \quad p = p(s) = \ln \frac{x_1(s)}{x_A}, \quad x_2 = x_A, \quad y_2 = y_1 e^{-p}. \tag{6.11}$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такой момент времени s и соответствующую точку переключения $(x_1, y_1) = (x_1(s), y_1(s))$ на траектории $(x(\cdot), y(\cdot))$, при которой интеграл $I = I(s)$ достигает максимальной величины:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s), \tag{6.12}$$

$$I_1(s) = \int_0^s e^{-\lambda t} (C_A((x_0 - 1)e^{-t} + 1)y_0 e^{-t} - \alpha_1((x_0 - 1)e^{-t} + 1) - \alpha_2 y_0 e^{-t} + a_{22}) dt,$$

$$I_2(s) = e^{-\lambda s} \int_0^{p(s)} e^{-\lambda t} (C_A x_1(s) y_1(s) e^{-2t} - \alpha_1 x_1(s) e^{-t} - \alpha_2 y_1(s) e^{-t} + a_{22}) dt.$$

На рис. 1 показаны начальное положение IP , выбранное на прямой $x = x_A$ при $y > y_A$, характеристика CH , ориентированная на вершину квадрата $(1, 0)$, характеристики CH_1, CH_2, CH_3 , ориентированные на вершину квадрата $(0, 0)$, точки переключения SP_1, SP_2, SP_3 движения по характеристикам и конечные точки движения FP_1, FP_2, FP_3 , расположенные на прямой $x = x_A$.

§ 7. Решение двухшаговой задачи оптимального управления

Получим решение двухшаговой задачи оптимального управления (6.6)–(6.12), вычислив производную dI/ds , представив ее как функцию оптимальных точек переключения, $(x, y) = (x_1, y_1)$, приравняв эту производную к нулю, $dI/ds = 0$, и найдя уравнение $F(x, y) = 0$ для кривой, состоящей из оптимальных точек переключения (x, y) .

Достаточные условия максимума в такой конструкции получаются из того факта, что интеграл $I(s)$ обладает свойством монотонного возрастания по переменной s в начальном периоде, так как подинтегральная функция $g_A(x, y)$ положительна, $g_A(x, y) > w_A = 0$, в области $x > x_A, y > y_A$. В конечном периоде интеграл $I(s)$ строго монотонно убывает по переменной s , так как подинтегральная функция $g_A(x, y)$ отрицательна, $g_A(x, y) < w_A = 0$, в области $x > x_A, y < y_A$.

Вначале вычислим интегралы I_1, I_2 :

$$\begin{aligned} I_1 = I_1(s) &= C_A(x_0 - 1)y_0 \frac{(1 - e^{-(\lambda+2)s})}{(\lambda + 2)} + C_A y_0 \frac{(1 - e^{-(\lambda+1)s})}{(\lambda + 1)} - \\ &- \alpha_1(x_0 - 1) \frac{(1 - e^{-(\lambda+1)s})}{(\lambda + 1)} - \alpha_1 \frac{(1 - e^{-\lambda s})}{\lambda} - \alpha_2 y_0 \frac{(1 - e^{-(\lambda+1)s})}{(\lambda + 1)} + a_{22} \frac{(1 - e^{-\lambda s})}{\lambda}; \end{aligned}$$

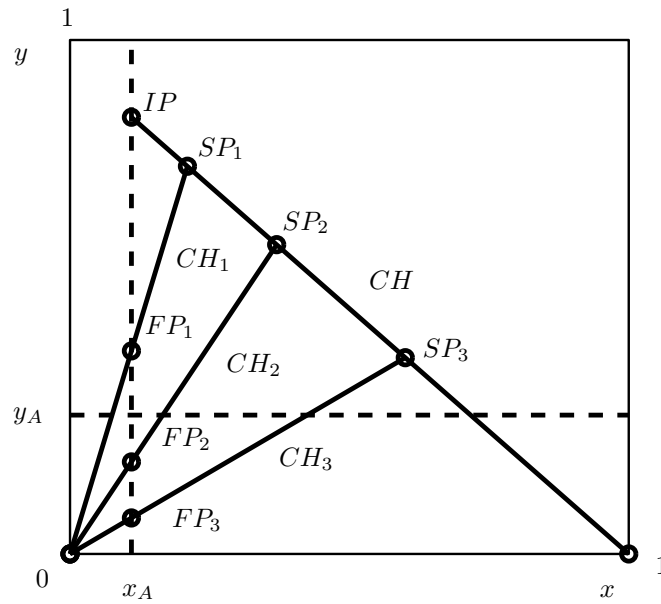


Рис. 1. Семейства характеристик и точки переключения в двухшаговой задаче оптимального управления

$$I_2 = I_2(s) = e^{-\lambda s} C_A x_1(s) y_1(s) \frac{(1 - e^{-(\lambda+2)p(s)})}{(\lambda + 2)} - e^{-\lambda s} \alpha_1 x_1(s) \frac{(1 - e^{-(\lambda+1)p(s)})}{(\lambda + 1)} - e^{-\lambda s} \alpha_2 y_1(s) \frac{(1 - e^{-(\lambda+1)p(s)})}{(\lambda + 1)} + e^{-\lambda s} a_{22} \frac{(1 - e^{-\lambda p(s)})}{\lambda}.$$

Вычислим производные dI_1/ds , dI_2/ds и представим их как функции оптимальных точек переключения $(x, y) = (x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{ds} &= C_A(x_0 - 1)y_0 e^{-2s} e^{-\lambda s} + C_A y_0 e^{-s} e^{-\lambda s} - \\ &= -\alpha_1(x_0 - 1)e^{-s} e^{-\lambda s} - \alpha_1 e^{-\lambda s} - \alpha_2 y_0 e^{-s} e^{-\lambda s} + a_{22} e^{-\lambda s} = \\ &= e^{-\lambda s} (C_A x y - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}). \end{aligned}$$

При расчете производной dI_2/ds примем во внимание следующие выражения для производных dx/ds , dy/ds , dp/ds и экспоненты e^{-p} как функций переменных (x, y) :

$$\frac{dx}{ds} = 1 - x, \quad \frac{dy}{ds} = -y, \quad \frac{dp}{ds} = \frac{1 - x}{x}, \quad e^{-p} = \frac{\alpha_2}{C_A x}.$$

Введем новую переменную $q = e^{-p}$ и получим выражение для dI_2/ds :

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{ds} &= e^{-\lambda s} \left(-\lambda C_A x y \frac{(1 - q^{(\lambda+2)})}{(\lambda + 2)} + C_A (1 - x) y \frac{(1 - q^{(\lambda+2)})}{(\lambda + 2)} - C_A x y \frac{(1 - q^{(\lambda+2)})}{(\lambda + 2)} + \right. \\ &+ C_A (1 - x) y q^{(\lambda+2)} + \lambda \alpha_1 x \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} - \alpha_1 (1 - x) \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} - \alpha_1 (1 - x) q^{(\lambda+1)} + \\ &\left. + \lambda \alpha_2 y \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} + \alpha_2 y \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} - \alpha_2 y \frac{(1 - x)}{x} q^{(\lambda+1)} + a_{22} \frac{(1 - x)}{x} q^\lambda - a_{22} (1 - q^\lambda) \right). \end{aligned}$$

Суммируем производные dI_1/ds и dI_2/ds , приравняем выражение к нулю и выразим y через x в следующем виде:

$$y = \left(\alpha_1 x - \lambda \alpha_1 x \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} + \alpha_1 (1 - x) \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} + \alpha_1 (1 - x) q^{(\lambda+1)} - a_{22} \frac{(1 - x)}{x} q^\lambda + a_{22} (1 - q^\lambda) - a_{22} \right) / \left(C_A x - \lambda C_A x \frac{(1 - q^{(\lambda+2)})}{(\lambda + 2)} + C_A (1 - 2x) \frac{(1 - q^{(\lambda+2)})}{(\lambda + 2)} + C_A (1 - x) q^{(\lambda+2)} + \lambda \alpha_2 \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} + \alpha_2 \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} - \alpha_2 \frac{(1 - x)}{x} q^{(\lambda+1)} - \alpha_2 \right).$$

Упростив выражение, получим формулу

$$y = \left(\alpha_1 \frac{(1 - q^{(\lambda+1)})}{(\lambda + 1)} + \alpha_1 q^{(\lambda+1)} - a_{22} \frac{1}{x} q^\lambda \right) / \left(C_A \frac{(1 - q^{(\lambda+2)})}{(\lambda + 2)} + C_A q^{(\lambda+2)} - \alpha_2 \frac{1}{x} q^{(\lambda+1)} \right).$$

Принимая во внимание, что $w_A = 0$ (6.3), имеем $a_{22} = (\alpha_1 \alpha_2) / C_A$. При подстановке этого соотношения и выражения $q = \alpha_2 / (C_A x)$ в предыдущую формулу получим:

$$y = \left(\alpha_1 \left(1 - \left(\frac{\alpha_2}{C_A x} \right)^{(\lambda+1)} \right) (\lambda + 2) \right) / \left(C_A \left(1 - \left(\frac{\alpha_2}{C_A x} \right)^{(\lambda+2)} \right) (\lambda + 1) \right).$$

Домножив обе части на выражение $x^{(\lambda+2)}$, получим:

$$y = \left(\alpha_1 \left(x^{(\lambda+1)} - \left(\frac{\alpha_2}{C_A} \right)^{(\lambda+1)} \right) (\lambda + 2) x \right) / \left(C_A \left(x^{(\lambda+2)} - \left(\frac{\alpha_2}{C_A} \right)^{(\lambda+2)} \right) (\lambda + 1) \right).$$

Имея в виду соотношения $x_A = \alpha_2 / C_A$ и $y_A = \alpha_1 / C_A$ (6.4), получим конечное выражение для кривой переключения $M_A^1(\lambda)$:

$$y = \frac{(\lambda + 2) \left(x^{(\lambda+1)} - x_A^{(\lambda+1)} \right) y_A x}{(\lambda + 1) \left(x^{(\lambda+2)} - x_A^{(\lambda+2)} \right)}.$$

Для того чтобы построить законченную кривую переключения $M_A(\lambda)$ для оптимальной стратегии первого игрока в игре с дисконтированным функционалом в случае $C_A > 0$, следует добавить к кривой $M_A^1(\lambda)$ подобную кривую $M_A^2(\lambda)$ в области, где $x \leq x_A$ и $y \leq y_A$:

$$M_A(\lambda) = M_A^1(\lambda) \cup M_A^2(\lambda),$$

$$M_A^1(\lambda) = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: y = \frac{(\lambda + 2) \left(x^{(\lambda+1)} - x_A^{(\lambda+1)} \right) y_A x}{(\lambda + 1) \left(x^{(\lambda+2)} - x_A^{(\lambda+2)} \right)}, x \geq x_A, y \geq y_A \right\},$$

$$M_A^2(\lambda) = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: y = - \frac{(\lambda + 2) \left((1 - x)^{(\lambda+1)} - (1 - x_A)^{(\lambda+1)} \right) (1 - y_A) (1 - x)}{(\lambda + 1) \left((1 - x)^{(\lambda+2)} - (1 - x_A)^{(\lambda+2)} \right)} + 1, x \leq x_A, y \leq y_A \right\}. \tag{7.1}$$

В случае, когда $C_A < 0$, кривые $M_A(\lambda)$, $M_A^1(\lambda)$ и $M_A^2(\lambda)$ описываются формулами

$$\begin{aligned}
 M_A(\lambda) &= M_A^1(\lambda) \cup M_A^2(\lambda), \\
 M_A^1(\lambda) &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: \right. \\
 &\quad \left. y = \frac{(\lambda + 2) \left((1 - x)^{(\lambda+1)} - (1 - x_A)^{(\lambda+1)} \right) y_A (1 - x)}{(\lambda + 1) \left((1 - x)^{(\lambda+2)} - (1 - x_A)^{(\lambda+2)} \right)}, x \leq x_A, y \geq y_A \right\}, \\
 M_A^2(\lambda) &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: \right. \\
 &\quad \left. y = -\frac{(\lambda + 2) \left(x^{(\lambda+1)} - x_A^{(\lambda+1)} \right) (1 - y_A) x}{(\lambda + 1) \left(x^{(\lambda+2)} - x_A^{(\lambda+2)} \right)} + 1, x \geq x_A, y \leq y_A \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Кривая $M_A(\lambda)$ делит единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на две части: верхнюю часть

$$D_A^u \supset \{(x, y): x = x_A, y > y_A\}$$

и нижнюю часть

$$D_A^l \supset \{(x, y): x = x_A, y < y_A\}.$$

«Позитивная» обратная связь u_A^{fl} имеет следующую структуру:

$$u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y) = \begin{cases} \max\{0, -\text{sgn}(C_A)\}, & \text{если } (x, y) \in D_A^u, \\ \max\{0, \text{sgn}(C_A)\}, & \text{если } (x, y) \in D_A^l, \\ [0, 1], & \text{если } (x, y) \in M_A(\lambda). \end{cases}
 \tag{7.3}$$

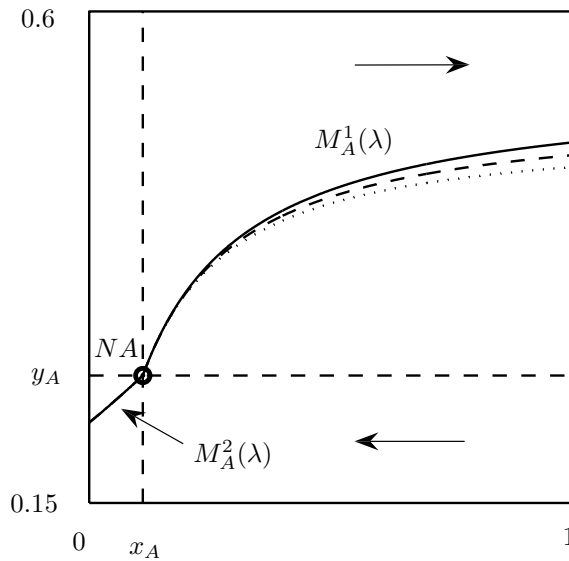


Рис. 2. Кривая переключения для первого игрока в задаче с дисконтированными функционалами выигрышей

На рис. 2 показаны кривые переключения $M_A^1(\lambda)$, $M_A^2(\lambda)$ для первого игрока. Направления скоростей \dot{x} изображены горизонтальными (левыми и правыми) стрелками.

Для второго игрока можно получить подобные кривые переключения $M_B(\lambda)$ для задачи оптимального управления с дисконтированным функционалом, отвечающим матрице B . Более точно: в случае когда $C_B > 0$, кривая переключения $M_B(\lambda)$ задается соотношениями

$$\begin{aligned}
 M_B(\lambda) &= M_B^1(\lambda) \cup M_B^2(\lambda), \\
 M_B^1(\lambda) &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: x = \frac{(\lambda + 2)(y^{(\lambda+1)} - y_B^{(\lambda+1)})x_B y}{(\lambda + 1)(y^{(\lambda+2)} - y_B^{(\lambda+2)})}, x \geq x_B, y \geq y_B \right\}, \\
 M_B^2(\lambda) &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: \right. \\
 &\quad \left. x = -\frac{(\lambda + 2)((1 - y)^{(\lambda+1)} - (1 - y_B)^{(\lambda+1)})(1 - x_B)(1 - y)}{(\lambda + 1)((1 - y)^{(\lambda+2)} - (1 - y_B)^{(\lambda+2)})} + 1, x \leq x_B, y \leq y_B \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

В случае когда параметр C_B отрицателен, $C_B < 0$, кривые $M_B(\lambda)$, $M_B^1(\lambda)$ и $M_B^2(\lambda)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 M_B(\lambda) &= M_B^1(\lambda) \cup M_B^2(\lambda), \\
 M_B^1(\lambda) &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: \right. \\
 &\quad \left. x = \frac{(\lambda + 2)((1 - y)^{(\lambda+1)} - (1 - y_B)^{(\lambda+1)})x_B(1 - y)}{(\lambda + 1)((1 - y)^{(\lambda+2)} - (1 - y_B)^{(\lambda+2)})}, x \geq x_B, y \leq y_B \right\}, \\
 M_B^2(\lambda) &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: \right. \\
 &\quad \left. x = -\frac{(\lambda + 2)(y^{(\lambda+1)} - y_B^{(\lambda+1)})(1 - x_B)y}{(\lambda + 1)(y^{(\lambda+2)} - y_B^{(\lambda+2)})} + 1, x \leq x_B, y \geq y_B \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Кривая $M_B(\lambda)$ делит единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на две части: левую часть

$$D_B^l \supset \{(x, y): x < x_B, y = y_B\}$$

и правую часть

$$D_B^r \supset \{(x, y): x > x_B, y = y_B\}.$$

«Позитивная» обратная связь v_B^{fl} имеет следующую структуру:

$$v_B^{fl} = v_B^{fl}(x, y) = \begin{cases} \max\{0, -\text{sgn}(C_B)\}, & \text{если } (x, y) \in D_B^l, \\ \max\{0, \text{sgn}(C_B)\}, & \text{если } (x, y) \in D_B^r, \\ [0, 1], & \text{если } (x, y) \in M_B(\lambda). \end{cases} \tag{7.6}$$

Замечание 2. Отметим, что в работах В.И. Арнольда [1] рассматривались среднеинтегральные функционалы выигрышей

$$\frac{1}{(T - t_0)} \int_{t_0}^T g_A(x(t), y(t)) dt. \tag{7.7}$$

В статье [8] получены кривые переключения для оптимальных стратегий управления игроков в игре со среднеинтегральными функционалами. Например, для первого игрока, в случае когда $C_A > 0$, кривая переключения в области $x \geq x_A, y \geq y_A$ описывается соотношением

$$y = \frac{2\alpha_1 x}{C_A x + \alpha_2}. \quad (7.8)$$

Асимптотический анализ решений (7.1) для игры с дисконтированными функционалами выигрышей показывает, что при разрешении неопределенности по правилу Лопиталья при параметре дисконтирования λ , стремящемся к нулю, соотношение для кривых переключения (7.1) стратегии управления первого игрока сходится к кривым переключения (7.8) в игре со среднеинтегральными функционалами выигрышей (7.7).

На рис. 2 сплошной линией показана кривая переключения стратегий управления первого игрока в игре со среднеинтегральными функционалами выигрышей, которая асимптотически достигается при $\lambda \downarrow 0$ решениями игры с дисконтированными функционалами выигрышей. Штриховой пунктирной линией и точечной пунктирной линией показаны кривые переключения стратегий управления первого игрока в игре с дисконтированными функционалами выигрышей при $\lambda = 0.1$ и $\lambda = 0.2$ соответственно.

§ 8. Гарантированные значения дисконтированных выигрышей

Сформулируем утверждение, которое подтверждает, что «позитивное» оптимальное управление по принципу обратной связи $u_A^{fl}(x, y)$ (7.3) с кривой переключения $M_A(\lambda)$, определенной формулами (7.1), (7.2), гарантирует, что значение дисконтированного функционала выигрышей больше или равно, чем цена w_A (6.3) статической матричной игры.

Теорема 1. Для любого начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и для любой траектории

$$(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^{fl}), \quad x^{fl}(t_0) = x_0, \quad y^{fl}(t_0) = y_0, \quad t_0 = 0,$$

сгенерированной оптимальным управлением по принципу обратной связи $u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y)$, существует конечный момент времени $t_* \in [0, T_A]$ такой, что в этот момент времени траектория $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$ достигает линии, где $x = x_A$, то есть $x^{fl}(t_*) = x_A$. Тогда, в соответствии с конструкцией оптимального управления, максимизирующего интеграл (6.12) по принципу обратной связи u_A^{fl} , справедлива следующая оценка:

$$\int_{t_*}^T e^{-\lambda(t-t_*)} g_A(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) dt \geq \frac{w_A}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_*)}), \quad \forall T \geq t_*. \quad (8.1)$$

В частности, это неравенство остается в силе, когда время T стремится к бесконечности:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \lambda \int_{t_*}^T e^{-\lambda(t-t_*)} g_A(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) dt \geq w_A. \quad (8.2)$$

Неравенства (8.1), (8.2) означают, что значение дисконтированного функционала не хуже, чем цена w_A (6.3) статической матричной игры.

Аналогичный результат справедлив для траекторий, которые генерируются оптимальным управлением v_B^{fl} (7.6), соответствующим кривой переключения $M_B(\lambda)$ (7.4), (7.5).

Доказательство. Результат теоремы следует из того факта, что значение функционала выигрышей (6.2) является максимальным на построенной ломанной. В частности, он больше или равен, чем значение этого функционала на траектории, которая остается на отрезке $x = x_A$ (см. рис. 1) при управлении $u(t) = x_A$. Значение функционала выигрышей на такой траектории равно

$$\int_{t_*}^T e^{-\lambda(t-t_*)} w_A dt = \frac{w_A}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_*)}).$$

Из этих рассуждений следует требуемое соотношение (8.1), которое в предельном переходе влечет соотношение (8.2). \square

Замечание 3. Рассмотрим приемлемую траекторию $(x_{AB}^{fl}(\cdot), y_{AB}^{fl}(\cdot))$, которая генерируется «положительными» обратными связями u_A^{fl} (7.3), v_B^{fl} (7.6). Тогда, в соответствии с теоремой 1, имеют место следующие неравенства:

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \lambda \int_{t_*}^T e^{-\lambda(t-t_*)} g_A(x_{AB}^{fl}(t), y_{AB}^{fl}(t)) dt \geq w_A,$$

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \lambda \int_{t_*}^T e^{-\lambda(t-t_*)} g_B(x_{AB}^{fl}(t), y_{AB}^{fl}(t)) dt \geq w_B,$$

и, следовательно, приемлемая траектория $(x_{AB}^{fl}(\cdot), y_{AB}^{fl}(\cdot))$ обеспечивает лучший результат для обоих игроков, чем траектории, сходящиеся к точкам статического равновесия по Нэшу, в которых соответствующие выигрыши равны величинам w_A и w_B .

§ 9. Равновесные траектории в игре с дисконтированными выигрышами

Рассмотрим матрицы выигрышей игроков на финансовом рынке, которые отражают данные по исследованным рынкам акций [19] и облигаций [14] в США. Матрица A соответствует поведению торговцев, которые играют на повышение курса и называются «быками». Матрица B соответствует поведению торговцев, которые играют на понижение курса и называются «медведями». Параметры матриц означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1.75 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0.5 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Характеристические параметры статических игр задаются на следующих уровнях:

$$C_A = 11.25, \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1.25, \quad x_A = 0.11, \quad y_A = 0.27;$$

$$C_B = -17.5, \quad \beta_1 = -2.5, \quad \beta_2 = -9.5, \quad x_B = 0.54, \quad y_B = 0.14.$$

Отметим, что игроки коалиции «быков» зарабатывают в случае роста доходности рынков, когда игроки обеих коалиций вкладываются в один и тот же рынок. А игроки коалиции «медведей» получают доход от инвестиций в случае падения рынков, когда игроки коалиции «быков» переходят с одного рынка на другой.

Для игры коалиций «быков» и «медведей» построены кривые переключения $M_A(\lambda)$, $M_B(\lambda)$ и проведены расчеты равновесных траекторий динамики рынка при значении коэффициента дисконтирования $\lambda = 0.1$.

Эти расчеты представлены на рис. 3. Здесь показаны седловые точки NA , NB в статических антагонистических играх, точка равновесия по Нэшу NE в статической биматричной игре, линии переключения управлений игроков $M_A(\lambda) = M_A^1(\lambda) \cup M_A^2(\lambda)$ и $M_B(\lambda) = M_B^1(\lambda) \cup M_B^2(\lambda)$ в динамической биматричной игре с дисконтированными функционалами выигрышей для матриц A , B (9.1). Стрелками указано поле скоростей игроков коалиций.

Поле направлений порождает равновесные траектории, одна из которых представлена на рис. 3. Эта траектория $TR(\lambda) = (x_{AB}^{fl}(\cdot), y_{AB}^{fl}(\cdot))$ стартует из начального положения $IP = (0.1, 0.9)$ и движется по характеристике в направлении угла $(1, 1)$ единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ с управляющими сигналами $u = 1$, $v = 1$. Затем она пересекает линию переключения $M_B(\lambda)$, и вторая коалиция переключает управление v с 1 на 0. Далее, траектория $TR(\lambda)$ движется в направлении угла $(1, 0)$ до тех пор, пока не встречается с линией переключения $M_A(\lambda)$. Здесь игроки первой коалиции меняют управляющий сигнал u с 1 на 0. После этого движение траектории направлено по характеристике в угол $(0, 0)$. Затем траектория пересекает линию $M_B(\lambda)$, на которой возникает скользящий режим, в процессе которого

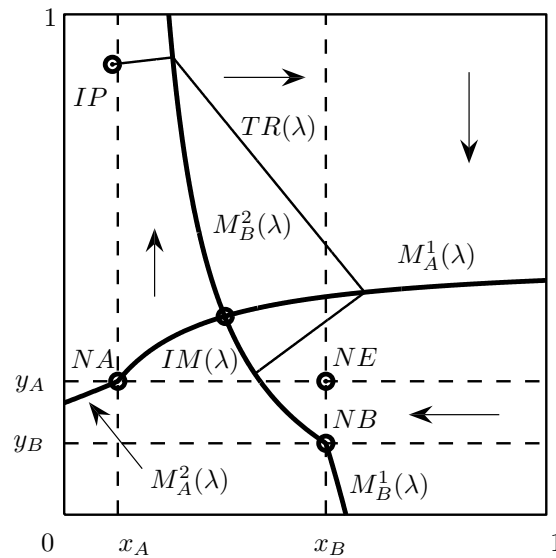


Рис. 3. Равновесная траектория в игре с дисконтированными выигрышами

происходит переключение управлений второй коалиции, и траектория $TR(\lambda)$ сходится к точке $IM(\lambda) = M_A(\lambda) \cap M_B(\lambda)$ пересечения линий переключения $M_A(\lambda)$, $M_B(\lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функциональный анализ и его приложения. 2002. Т. 36. Вып. 2. С. 1–11.
DOI: [10.4213/faa186](https://doi.org/10.4213/faa186)
2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 271 с.
3. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
4. Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
5. Красовский Н.А., Кряжимский А.В., Тарасьев А.М. Уравнения Гамильтона–Якоби в эволюционных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 114–131.
<http://mi.mathnet.ru/timm1089>
6. Красовский Н.А., Тарасьев А.М. Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 167–182.
<http://www.mathnet.ru/timm434>
7. Красовский Н.А., Тарасьев А.М. Равновесные решения в динамических играх. Екатеринбург: УрГАУ, 2015. 128 с.
8. Красовский Н.А., Тарасьев А.М. Равновесные траектории в динамических биматричных играх со среднеинтегральными функционалами выигрышей // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. Вып. 2. С. 58–90. <http://mi.mathnet.ru/mgta179>
9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О дифференциально-эволюционных играх // Труды математического института имени В. А. Стеклова. 1995. Т. 211. С. 257–287. <http://mi.mathnet.ru/tm1129>
11. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
12. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Принципы устойчивой кооперации // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 1. С. 106–123. <http://www.mathnet.ru/mgta6>

13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1961. 392 с.
14. Рынок Форекс [Электронный ресурс]. <http://www.fxstreet.ru.com/>
15. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 214 с.
16. Субботина Н.Н. Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 556–561.
17. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрого действия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 3. С. 157–167.
18. Basar T., Olsder G.J. Dynamic noncooperative game theory. London: Academic Press, 1982, 519 p.
19. CNN Money [Электронный ресурс]. <http://money.cnn.com/>
20. Friedman D. Evolutionary games in economics // *Econometrica*. 1991. Vol. 59. No. 3. P. 637–666. <https://pdfs.semanticscholar.org/acd0/73087a5ac678e44e61ced6c015cdf98397f9.pdf>
21. Intriligator M. Mathematical optimization and economic theory. New York: Prentice–Hall, 1971, 508 p.
22. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995, 322 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-2568-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2568-3)
23. Krasovskii N.A., Tarasyev A.M. Decomposition algorithm of searching equilibria in a dynamic game // *Autom. Remote Control*. 2015. Vol. 76. Issue 10. P. 1865–1893. DOI: [10.1134/S0005117915100136](https://doi.org/10.1134/S0005117915100136)
24. Tarasyev A.M. A Differential model for a 2×2 -evolutionary game dynamics // IIASA Working Paper. IIASA, Laxenburg, Austria. 1994. WP–94–063. <http://pure.iiasa.ac.at/4148/1/WP-94-063.pdf>

Поступила в редакцию 04.04.2017

Красовский Николай Андреевич, к. ф.-м. н., математик, отдел динамических систем, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: nkrasovskiy@gmail.com

Тарасьев Александр Михайлович, д. ф.-м. н., заведующий отделом динамических систем, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: tam@imm.uran.ru

N. A. Krasovskii, A. M. Tarasyev

Asymptotic behavior of solutions in dynamical bimatrix games with discounted indices

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 193–209 (in Russian).

Keywords: dynamical games, Pontryagin maximum principle, Hamilton–Jacobi equations, equilibrium trajectories.

MSC2010: 49N70, 49J15, 91A25

DOI: [10.20537/vm170204](https://doi.org/10.20537/vm170204)

The paper is devoted to the analysis of dynamical bimatrix games with integral indices discounted on an infinite time interval. The system dynamics is described by differential equations in which players' behavior changes according to incoming control signals. For this game, a problem of construction of equilibrium trajectories is considered in the framework of minimax approach proposed by N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin in the differential games theory. The game solution is based on the structure of dynamical Nash equilibrium developed in papers by A. F. Kleimenov. The maximum principle of L. S. Pontryagin in combination with the method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations are applied for the synthesis of optimal control strategies. These methods provide analytical formulas for switching curves of optimal control strategies. The sensitivity analysis for equilibrium solutions is implemented with respect to the discount parameter in the integral payoff functional. It is shown that equilibrium trajectories in the problem with the discounted

payoff functional asymptotically converge to the solution of a dynamical bimatrix game with average integral payoff functionals examined in papers by V. I. Arnold. Obtained results are applied to a dynamical model of investments on financial markets.

REFERENCES

1. Arnold V.I. Optimization in mean and phase transitions in controlled dynamical systems, *Funct. Anal. Appl.*, 2002, vol. 36, issue 2, pp. 83–92. DOI: [10.1023/A:1015655005114](https://doi.org/10.1023/A:1015655005114)
2. Vorob'yev N.N. *Teoriya igr dlya ekonomistov-kibernetikov* (Game theory for economists and system scientists), Moscow: Nauka, 1985, 271 p.
3. Kleimenov A.F. *Neantagonisticheskiye pozitsionnye differentsial'nye igry* (Nonantagonistic positional differential games), Yekaterinburg: Nauka, 1993, 184 p.
4. Kolmogorov A.N. On analytical methods in probability theory, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1938, vol. 5, pp. 5–41 (in Russian).
5. Krasovskiy N.A., Kryazhimskiy A.V., Tarasyev A.M. Hamilton–Jacobi equations in evolutionary games, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 114–131 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/timm1089>
6. Krasovskii N.A., Taras'ev A.M. Search for maximum points of a vector criterion based on decomposition properties, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S174–S190. DOI: [10.1134/S0081543810060155](https://doi.org/10.1134/S0081543810060155)
7. Krasovskii N.A., Taras'yev A.M. *Ravnovesnye resheniya v dinamicheskikh igrakh* (Equilibrium solutions in dynamical games), Yekaterinburg: Ural State Agrarian University, 2015, 128 p.
8. Krasovskii N.A., Tarasyev A.M. Equilibrium trajectories in dynamical bimatrix games with average integral payoff functionals, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2016, vol. 8, issue 2, pp. 58–90 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/mgta179>
9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, 517 p. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
10. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. On differential-evolutionary games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1995, vol. 211, pp. 234–261. <http://mi.mathnet.ru/eng/tm1129>
11. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under uncertainty), Moscow: Nauka, 1977, 392 p.
12. Petrosjan L.A., Zenkevich N.A. Conditions for sustainable cooperation, *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 10, pp. 1894–1904. DOI: [10.1134/S0005117915100148](https://doi.org/10.1134/S0005117915100148)
13. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, New York: John Wiley & Sons, 1962, viii + 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Nauka, 1961, 392 p.
14. Forex Market [Electronic resource]. <http://www.fxstreet.ru.com/>
15. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* (Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations), Moscow: Nauka, 1991, 214 p.
16. Subbotina N.N. The method of Cauchy characteristics and generalized solutions of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation, *Sov. Math., Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 2, pp. 501–506.
17. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Geometry of singular curves for one class of velocity, *Vestn. St-Peterbg. Univ., Ser. 10, Prikl. Mat. Inf. Prots. Upr.*, 2013, issue 3, pp. 157–167 (in Russian).
18. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory*, London: Academic Press, 1982, 519 p.
19. CNN Money [Electronic resource]. <http://money.cnn.com/>
20. Friedman D. Evolutionary games in economics, *Econometrica*, 1991, vol. 59, no. 3, pp. 637–666. <https://pdfs.semanticscholar.org/acd0/73087a5ac678e44e61ced6c015cdf98397f9.pdf>
21. Intriligator M. *Mathematical optimization and economic theory*, New York: Prentice–Hall, 1971, 508 p.
22. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information*, Boston: Birkhäuser, 1995, 322 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-2568-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2568-3)
23. Krasovskii N.A., Tarasyev A.M. Decomposition algorithm of searching equilibria in a dynamic game, *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 10, pp. 1865–1893. DOI: [10.1134/S0005117915100136](https://doi.org/10.1134/S0005117915100136)
24. Tarasyev A.M. A Differential model for a 2×2 -evolutionary game dynamics, *IIASA working paper*, IIASA, Laxenburg, Austria, 1994, WP–94–063. <http://pure.iiasa.ac.at/4148/1/WP-94-063.pdf>

МАТЕМАТИКА

2017. Т. 27. Вып. 2

Krasovskii Nikolai Andreevich, Candidate of Physics and Mathematics, Mathematician, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.

E-mail: nkrasovskiy@gmail.com

Tarashev Alexander Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;

Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: tam@imm.uran.ru