ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

УДК 517.926, 517.977

© ***А. А. Козлов, И. В. Инц***

О РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Управление в системе (1) строится по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$ с измеримой и ограниченной матричной функцией $U(t)$, $t \geqslant 0$. Для замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

исследуется вопрос об условиях ее равномерной глобальной достижимости. Наличие последнего свойства у системы (2) означает существование такой матричной функции $U(t)$, $t \geqslant 0$, которая обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t,s)$ этой системы выполнение равенств $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ при фиксированном $T > 0$ и произвольных $k \in \mathbb{N}$, $\det H_k > 0$. Представленная задача решается в предположении равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей замкнутой системе (2), т. е. при условии существования таких $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых начальном моменте времени $t_0 \geqslant 0$ и начальном состоянии $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы (1) на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ найдется измеримое и ограниченное векторное управление $u = u(t)$, $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, переводящее вектор начального состояния этой системы в ноль на данном отрезке. Доказано, что в двумерном случае, т. е. при $n = 2$, свойство равномерной полной управляемости системы (1) является достаточным условием равномерной глобальной достижимости соответствующей системы (2).

Ключевые слова: линейная управляемая система, равномерная полная управляемость, равномерная глобальная достижимость.

DOI: 10.20537/vm170203

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, т. е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$. Обозначим через $E \in \mathrm{M}_n$ единичную матрицу.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов A и B. Выбрав в качестве u управление, заданное в виде линейной обратной связи

$$u = U(t)x, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

где U — некоторая измеримая и ограниченная $(m \times n)$-матрица, получим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Дадим некоторые необходимые при дальнейших рассуждениях определения и их пояснения.

Для любых чисел $r > 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ под $\mathcal{M}_n(r, \rho)$ всюду далее будем понимать множество матриц из M_n, которые удовлетворяют неравенствам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$.

Определение 1 (см. [2], [3, с. 253]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством:
1) *T-равномерной глобальной достижимости относительно неограниченного множества* $\mathbb{U} \subset \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ найдется такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $H \in \mathcal{M}_n(r, \rho)$ и всякого $t_0 \geqslant 0$ существует измеримое и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta(r, \rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = H$;
2) *T-равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;
3) *равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима при некотором $T > 0$.

Замечание 1. Сам термин «равномерная глобальная достижимость» был введен в статье [2] для систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами и управлением. Представленное определение отличается от введенного в работе [2] расширением как функционального класса коэффициентов нестационарных систем (3), так и множества управляющих воздействий.

Замечание 2. Наличие у системы (3) свойства равномерной глобальной достижимости обеспечивает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временно́м отрезке фиксированной длины T, т. е. указывает на возможность выбора такого матричного управляющего воздействия U, при котором совокупность $\{x_{U_i}(t)\}_{i=1}^{n}$ линейно независимых решений системы (3) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

Определение 2 (см. [1, с. 247], [4, с. 153–154]). *Преобразованием Ляпунова* называется линейное пребразование $z = L(t)y$ с обратимой абсолютно непрерывной матричной функцией $L = L(t)$, заданной на положительной полуоси со значениями во множестве $(n \times n)$-матриц и удовлетворяющей для всех $t \geqslant 0$ неравенству $\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \int_t^{t+1} \|\dot{L}(\tau)\| \, d\tau < \infty$.

Определение 3 (см. [5]). Однородные линейные системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами $\dot{y} = D(t)y$, $t \geqslant 0$, и $\dot{z} = C(t)z$, $t \geqslant 0$, связанные преобразованием Ляпунова, называются *асимптотически эквивалентными* (*по Богданову*).

Определение 4 (см. [2], [3, с. 253]). Будем говорить, что система (3) обладает *свойством глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой измеримой и интегрально ограниченной $(n \times n)$-матрицы $C(t)$, $t \geqslant 0$, найдется измеримое и ограниченное управление $\widehat{U} : [0, +\infty) \to \to \mathrm{M}_{mn}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность (по Богданову) системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

и системы (3) с управлением $U = \widehat{U}(t)$, $t \in [0, +\infty)$.

Замечание 3. Равномерная глобальная достижимость является достаточным условием для глобальной ляпуновской приводимости (см., например, [3, с. 258 – 259], [6]) линейных систем (3).

Замечание 4. Свойство равномерной глобальной достижимости, а также его локальный аналог фактически используются в работах [2, 3, 6–16] для решения задач локальной и глобальной управляемости различных асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем (см., например, монографию [3]).

Определение 5 (см. [3, с. 60]). *Асимптотическими (ляпуновскими) инвариантами линейных однородных систем n-го порядка* называются величины (свойства), относящиеся к этим системам, которые не меняются под действием преобразований Ляпунова. Асимптотическими инвариантами являются [3, с. 29–80], [17], например, свойства устойчивости, асимптотической устойчивости, правильности, приводимости и т. п.; полный спектр показателей Ляпунова, центральные, особые и экспоненциальные показатели, коэффициенты неправильности и т. п.

Определение 6 (см. [3, с. 182]). Зафиксируем какой-либо асимптотический инвариант ι. *Задача глобального управления асимптотическим инвариантом* ι заключается в нахождении такого измеримого и ограниченного управления (2), что система (3) с этим управлением будет иметь любое возможное наперед заданное значение этого инварианта. Так, например, рассматривая в данной задаче в качестве асимптотического инварианта ι полный спектр показателей Ляпунова, получим [3, с. 183–185] *задачу глобального управления показателями Ляпунова*, т. е. задачу о построении для системы (1) обратной связи (2), обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = \overline{1, n}$, при произвольных заранее заданных вещественных числах $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$; здесь $\lambda_1(A + BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + BU)$ — полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы (3).

Замечание 5. Легко видеть, что имеют место следующие соотношения между свойствами равномерной глобальной достижимости (РГД), глобальной ляпуновской приводимости (ГЛП), а также глобальной управляемости характеристических показателей Ляпунова (ГУП) системы (3):

$$\text{РГД} \Rightarrow \text{ГЛП} \Rightarrow \text{ГУП}.$$

Вопрос о наличии равномерной глобальной достижимости у системы (3) решается, как правило, в предположении равномерной полной управляемости соответствующей ей системы (1).

Определение 7 (см. [18], [3, с. 93]). Будем считать, что матрица B системы (1) принадлежит также пространству локально-интегрируемых с квадратом матричных функций. Тогда система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (*по Калману*), если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geqslant 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\xi^T \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)X^T(t_0, \tau)d\tau\, \xi \geqslant \alpha \|\xi\|^2.$$

Для равномерно вполне управляемых двух- и трехмерных стационарных линейных систем (1) В. А. Зайцевым [2], а для четырехмерных стационарных систем (1) В. А. Зайцевым и А. Ф. Габдрахимовым [19] доказана равномерная глобальная достижимость соответствующих систем (3) в классе кусочно-постоянных управлений. В случае же нестационарных линейных систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами С. Н. Поповой и Е. К. Макаровым установлена

Теорема 1 (см. [6], [3, с. 310 – 325]). *Для любой двумерной нестационарной равномерно вполне управляемой системы вида (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами при условии кусочной равномерной непрерывности матрицы B соответствующая замкнутая система (3) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Замечание 6. *Свойство кусочной равномерной непрерывности* функции $B : [0, +\infty) \to \mathrm{M}_{nm}$ означает [3, с. 264–265] выполнение для нее следующих условий:

1) матричная функция B кусочно непрерывна и ограничена на положительной полуоси;

2) существует такое $\Delta_0 > 0$, что длина каждого интервала непрерывности I_j ($j \in J \subset \mathbb{N}$) функции B удовлетворяет неравенству $|I_j| > \Delta_0$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $j \in J$ и для всех $t, s \in I_j$, удовлетворяющих неравенству $|t - s| \leqslant \delta$, выполнено соотношение $\|B(t) - B(s)\| \leqslant \varepsilon$.

Если же матрица B не является кусочно равномерно непрерывной либо размерность фазового пространства $n > 2$, вопрос о глобальной достижимости для нестационарных систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами остается открытым. Исследование же задачи о равномерной глобальной достижимости для систем (3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами ранее вообще не проводилось. Это связано прежде всего с тем, что метод решения данной задачи, предложенный С. Н. Поповой и Е. К. Макаровым [6], предполагает использование свойства равномерной полной управляемости (по Калману), которое имеет смысл лишь в случае интегрируемости с квадратом матрицы B. Отказ от наличия указанной интегрируемости делает фактически невозможным (см., например, [20]) применение определения 7 (а следовательно, и разработанного метода) для решения рассматриваемой задачи.

Е. Л. Тонковым было сформулировано иное определение равномерной полной управляемости, эквивалентное определению 7 для систем с локально суммируемыми с квадратом коэффициентами, преимуществом которого, по сравнению с определением Калмана является возможность его применения к системам с коэффициентами более широких функциональных классов.

Определение 8 (см. [21]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (*по Тонкову*), если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

В настоящей работе рассмотрена двумерная линейная нестационарная равномерно вполне управляемая (в смысле Тонкова) система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами и доказано, что соответствующая ей линейная дифференциальная система (3), замкнутая измеримым и ограниченным управлением, линейным по фазовым переменным, обладает свойством равномерной глобальной достижимости.

Прежде чем переходить к основному результату работы, вначале установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для* (2×2)*-матриц*

$$E_1 := E + e_1 e_2^T, \quad E_2 := E_1^T = E + e_2 e_1^T, \quad E_3 := E_1^2 = E + 2 e_1 e_2^T \tag{4}$$

выполняются равенства

$$E_1^{-1} = E - e_1 e_2^T, \quad E_2^{-1} = E - e_2 e_1^T,$$

$$E_1^{-1} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} = e_2 e_1^T - e_1 e_2^T, \quad E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 = e_1 e_2^T - e_2 e_1^T, \tag{5}$$

$$E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_3 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 = -E. \tag{6}$$

Доказательство леммы 1 проводится непосредственным перемножением матриц из формул (4) и обратных к матрицам E_1 и E_2, которые существуют ввиду очевидной невырожденности E_1 и E_2. $\square$

Замечание 7. При помощи элементарных вычислений можно установить, что для матриц $E_1^{\pm1}$, $E_2^{\pm1}$, E_3 выполняются следующие оценки:

$$\|E_1^{\pm1}\| = \|E_2^{\pm1}\| = (1+\sqrt{5})/2 < 2, \quad \|E_3^{\pm}\| = 1+\sqrt{2} < 3 \tag{7}$$

и равенства

$$\det E_1^{\pm1} = \det E_2^{\pm1} = \det E_3 = 1. \tag{8}$$

Пусть $\mathcal{LU}_2 \subset \mathrm{M}_2$ — совокупность всех нижне- и верхнетреугольных (2×2)-матриц с положительными диагональными элементами. Тогда при любых числах $r > 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ через $\mathcal{LU}_2(r,\rho) \subset \mathrm{M}_2$ будем обозначать множество матриц

$$\mathcal{LU}_2(r,\rho) := \mathcal{LU}_2 \cap \mathcal{M}_2(r,\rho) = \{H \in \mathcal{LU}_2 : \|H-E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}.$$

Теорема 2. *Для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ и всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_2(r,\rho)$ найдутся такие матрицы $H_i \in \mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$, $i = \overline{1,7}$, где $r_1 := 3(r+1)$, при которых матрица H представляется в виде $H = H_7 \cdot \ldots \cdot H_1$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ и $r \geqslant 1$. Возьмем любую матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in \mathcal{M}_2(r,\rho)$. Тогда имеют место два случая: $0 \leqslant |h_{12}/h_{11}| \leqslant 1$ либо $0 \leqslant |h_{11}/h_{12}| < 1$ (случай $h_{11} = h_{12} = 0$ невозможен ввиду невырожденности матрицы H). Рассмотрим в отдельности оба этих случая.

Пусть $0 \leqslant |h_{12}/h_{11}| \leqslant 1$. Тогда выполняется неравенство $h_{11} \neq 0$, а поскольку $\det H > 0$, то ведущие главные угловые миноры [22, с. 30] матрицы H ненулевые, и, следовательно, для этой матрицы можно применить теорему о LU-разложении [22, с. 194]. Тогда справедливо равенство

$$H = L \cdot U, \tag{9}$$

в котором матрицы $L = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^2$ и $U = \{u_{ij}\}_{i,j=1}^2$ имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} - h_{21}h_{12}/h_{11} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & h_{12}/h_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Оценим сверху норму и снизу определители матриц L и U. В силу включения $H \in \mathcal{M}_2(r,\rho)$ имеем неравенства $\|H\| \leqslant \|H-E\| + \|E\| \leqslant r+1$. Отсюда и из очевидной оценки $|h_{ij}| \leqslant \|H\|$, верной для всех $i,j = \overline{1,2}$, на основании условия $0 \leqslant |h_{12}/h_{11}| \leqslant 1$ и соотношений между строчной и спектральной нормами матрицы [22, с. 378] для норм матриц L и U получим оценки

$$\|L\| \leqslant \sqrt{2}\max\{|h_{11}|, |h_{22}| + |h_{21}|\cdot|h_{12}/h_{11}|\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\max\{\|H\|, \|H\|+\|H\|\} = 2\sqrt{2}\|H\| \leqslant 2\sqrt{2}(r+1) \leqslant 3(r+1) = r_1, \tag{11}$$

$$\|U\| \leqslant \sqrt{2}\max\{1+|h_{12}/h_{11}|, 1\} \leqslant 2\sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}(r+1) \leqslant r_1. \tag{12}$$

Для определителей же этих матриц выполняются очевидные соотношения

$$\det U = 1 \geqslant \rho \quad \text{и} \quad \det L = l_{11}\cdot l_{22} = \det L \cdot \det U = \det H \geqslant \rho. \tag{13}$$

Отсюда, из неравенств (12) и определения матрицы U следует включение $U \in \mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$.

Так как $l_{11}\cdot l_{22} \geqslant \rho > 0$, то диагональные элементы матрицы L одного знака. Пусть $l_{ii} > 0$, $i = 1,2$, тогда L — нижнетреугольная матрица с положительными диагональными элементами, и в силу оценок (11) и (13) для нее выполняется включение $L \in \mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$. Поскольку матрица $E \in \mathrm{M}_2$ диагональная (а значит, и треугольная) с положительной диагональю и для нее справедливы соотношения $\det E = 1 \geqslant \rho$ и $\|E\| = 1 \leqslant r_1$, то для нее также имеет место включение

$E \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Тогда на основании формулы (9), с учетом включений $U, L, E \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$ для случая $0 \leqslant |h_{12}/h_{11}| \leqslant 1$ и $l_{ii} > 0$, $i = 1, 2$, имеем требуемое представление матрицы H:

$$H = L \cdot U \cdot \underbrace{E \cdot \ldots \cdot E}_{5 \text{ сомножителей}}. \tag{14}$$

Если же $l_{ii} < 0$, $i = 1, 2$, т. е. на диагонали матрицы L стоят только отрицательные числа, то диагональные элементы матрицы $(-L)$ положительны. Тогда, ввиду разложения (9), выполняется равенство

$$H = (-L) \cdot U \cdot (-E),$$

из которого, в силу справедливости формулы (6), следует представление

$$H = (-L) \cdot U \cdot E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_3 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1. \tag{15}$$

Для доказательства того, что найденное представление (15) является требуемым, осталось показать, что матрицы, стоящие в правой части этого представления, принадлежат множеству $\mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. В силу оценок (11)–(13) для треугольных матриц с положительными диагональными элементами $(-L)$ и U выполняются соотношения

$$\| -L\| = \|L\| \leqslant r_1, \quad \det(-L) = (-1)^2 \cdot \det L \geqslant \rho, \quad \|U\| \leqslant r_1, \quad \det U \geqslant \rho, \tag{16}$$

устанавливающие включения $(-L)$, $U \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Ввиду неравенств (7), оценок $0 < \rho \leqslant 1$ и $r \geqslant 1$, а также равенств (8), для треугольных матриц $E_1^{\pm 1}$, $E_2^{\pm 1}$, E_3, все диагональные элементы которых положительны и, очевидно, равны единице, имеют место соотношения

$$\|E_1^{\pm 1}\| \leqslant 3(r+1), \quad \|E_2^{\pm 1}\| \leqslant 3(r+1), \quad \|E_3\| \leqslant 3(r+1),$$

$$\det E_1^{\pm 1} = \det E_2^{\pm 1} = \det E_3 = 1 \geqslant \rho, \tag{17}$$

из которых, с учетом равенства $r_1 = 3(r+1)$, следуют включения $E_1^{\pm 1}, E_2^{\pm 1}, E_3 \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Таким образом, для случая $0 \leqslant |h_{12}/h_{11}| \leqslant 1$ и $l_{ii} < 0$, $i = 1, 2$, разложение (15) является искомым.

Определим матрицу $J := [e_2, -e_1] \in \mathrm{M}_2$, которая, очевидно, является обратимой и удовлетворяет легко проверяемому соотношению $J^{-1} = -J = [-e_2, e_1]$, и рассмотрим случай $0 \leqslant |h_{11}/h_{12}| < 1$. По определению матриц J и H, справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} h_{12} & -h_{11} \\ h_{22} & -h_{21} \end{pmatrix} = HJ =: G = \{g_{ij}\}_{i,j=1,2} \in \mathrm{M}_2, \tag{18}$$

поэтому для элементов g_{1i}, $i = 1, 2$, матрицы G имеет место оценка $0 \leqslant |g_{12}/g_{11}| = |h_{11}/h_{12}| < 1$. В таком случае для матрицы G выполняется LU-разложение $G = L_1 \cdot U_1$ с матрицами $L_1 = \{l_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^n$ и $U_1 = \{u_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^n$, имеющими вид, аналогичный (10) и полученный заменой элементов h_{ij}, $i, j = 1, 2$, соответствующими элементами g_{ij}. Пользуясь рассуждениями такими же, как и при выводе оценок (11)–(13), а также первых двух неравенств в формуле (16), легко показать, что для матриц $\pm L_1$ и U_1 выполняются неравенства

$$\| \pm L_1\| \leqslant r_1, \quad \|U_1\| \leqslant r_1, \quad \det(\pm L_1) \geqslant \rho, \quad \det U_1 \geqslant \rho. \tag{19}$$

На основании формулы (18) в силу обратимости матрицы J имеем равенство $H = GJ^{-1}$, из которого, учитывая разложение матрицы G и очевидное соотношение $J^{-1} = e_1 e_2^T - e_2 e_1^T$, применяя вторую из формул в (5), получим цепочку равенств:

$$H = GJ^{-1} = L_1 \cdot U_1 \cdot J^{-1} = L_1 \cdot U_1 \cdot E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1. \tag{20}$$

Отсюда, в силу определения матриц L_1, U_1, H и формулы (17), для элементов $l_{ii}^{(1)}$, $i=1,2$, матрицы L_1 вытекают равенства $l_{11}^{(1)}l_{22}^{(1)}=\det L_1=\det L_1\cdot\det U_1\cdot\det E_1\cdot\det E_2^{-1}\cdot\det E_1=$ $=\det(L_1\cdot U_1\cdot E_1\cdot E_2^{-1}\cdot E_1)=\det H\geqslant\rho>0$. Поэтому возможен один из случаев $l_{ii}^{(1)}>0$ или $l_{ii}^{(1)}<0$, $i=1,2$. Для первого случая, пользуясь разложением (20), получим представление

$$H=L_1\cdot U_1\cdot E_1\cdot E_2^{-1}\cdot E_1\cdot E\cdot E. \tag{21}$$

Поскольку U_1 — верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а L_1 — нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами и для них выполняются соотношения (19), то справедливы включения $L_1,\ U_1\in\mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$, которые вместе с ранее установленными сотношениями $E_1,\ E_2^{-1},\ E\in\mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$ означают, что представление (21) является искомым. Если же выполняются неравенства $l_{ii}^{(1)}<0$, $i=1,2$, то на диагонали нижнетреугольной матрицы L_1 стоят только отрицательные числа, а диагональные элементы матрицы $(-L_1)$ положительны, и потому, ввиду формул (19), имеет место включение $(-L_1)\in\mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$. Из представления (20) и первого из равенств в формуле (5) с учетом соотношений $J^{-1}=-EJ=-E\cdot(e_2e_1^T-e_1e_2^T)$ следует цепочка равенств:

$$H=L_1\cdot U_1\cdot J^{-1}=(-E)\cdot(-L_1)\cdot U_1\cdot(-E)\cdot(e_2e_1^T-e_1e_2^T)=$$

$$=(-L_1)\cdot U_1\cdot E_1^{-1}\cdot E_2\cdot E_1^{-1}\cdot E\cdot E, \tag{22}$$

которая, ввиду вышеустановленных включений $(-L_1)$, U_1, E_1^{-1}, E_2, $E\in\mathcal{LU}_2(r_1,\rho)$, дает искомое представление для случая $l_{ii}^{(1)}<0$, $i=1,2$.

Таким образом, в каждом из всевозможных случаев формулами (14), (15), (21), (22) для матрицы H определено требуемое разложение. Теорема 2 доказана. □

В соответствии с работой [20] дадим следующие определение и теорему, с ним связанную.

Определение 9 (см. [20]). Будем говорить, что система (1):
обладает свойством $H(\sigma)$ (где $\sigma>0$), если существуют $\beta_i=\beta_i(\sigma)>0$, $i=\overline{1,4}$, такие, что для любого $\tau\geqslant 0$ и любого вектора $h\in\mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\beta_1\|h\|\leqslant\int_\tau^{\tau+\sigma}\|h^TX(\tau,s)B(s)\|\,ds\leqslant\beta_2\|h\|,$$

$$\beta_3\|h\|\leqslant\int_\tau^{\tau+\sigma}\|h^TX(\tau+\sigma,s)B(s)\|\,ds\leqslant\beta_4\|h\|;$$

обладает свойством H, если существует $\sigma>0$ такое, что система (1) обладает свойством $H(\sigma)$.

Теорема 3 (см. [20]). *Система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами* σ*-равномерно вполне управляема* (*по Тонкову*) *тогда и только тогда, когда она обладает свойством* $H(\sigma)$.

Используя эту теорему, покажем, что свойство равномерной полной управляемости (по Тонкову) инвариантно относительно преобразования Ляпунова. Применив к системе (1) преобразование $y=L(t)x$ с обратимой абсолютно непрерывной матрицей $L(\cdot)$, получим соотношения

$$\dot y=(L(t)x)^{\cdot}=\dot L(t)x+L(t)\dot x=\dot L(t)L^{-1}(t)y+L(t)\big(A(t)x+B(t)u\big)=$$

$$=\big(L(t)A(t)L^{-1}(t)+\dot L(t)L^{-1}(t)\big)y+L(t)B(t)u.$$

Таким образом, данное преобразование переводит систему (1) в линейную управляемую систему

$$\dot y=\big(L(t)A(t)L^{-1}(t)+\dot L(t)L^{-1}(t)\big)y+L(t)B(t)u. \tag{23}$$

Имеет место следующая

Теорема 4. *Преобразование Ляпунова сохраняет свойство $H(\sigma)$ системы, т. е. если система (1) обладает свойством $H(\sigma)$ и $y = L(t)x$ — преобразование Ляпунова, то преобразованная система (23) также обладает свойством $H(\sigma)$.*

Доказательство. Пусть система (1) обладает свойством $H(\sigma)$. Зафиксируем число σ. Обозначим через $Y(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, матрицу Коши однородной системы

$$\dot{y} = \big(L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t)\big)y.$$

Тогда из равенства $y = L(t)x$ следует, что при всех $t,s \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$Y(t,s) = L(t)X(t,s)L^{-1}(s). \tag{24}$$

Возьмем произвольные вектор $h \in \mathbb{R}^n$ и число $\tau \geqslant 0$. Обозначим $\xi := L^T(\tau)h \in \mathbb{R}^n$. Поскольку система (1) обладает свойством $H(\sigma)$, то найдутся такие величины $\beta_1 = \beta_1(\sigma) > 0$ и $\beta_2 = \beta_2(\sigma) > 0$, при которых выполняются неравенства

$$\beta_1\|\xi\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\sigma} \|\xi^T X(\tau,s)B(s)\|\,ds \leqslant \beta_2\|\xi\|. \tag{25}$$

Для доказательства теоремы 4 оценим вначале сверху и снизу $\int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau,s)L(s)B(s)\|\,ds$. На основании определения вектора ξ и соотношения (24) имеем цепочку равенств:

$$\int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau,s)L(s)B(s)\|\,ds = \int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T L(\tau)X(\tau,s)L^{-1}(s)L(s)B(s)\|\,ds =$$

$$= \int_\tau^{\tau+\sigma} \|\xi^T X(\tau,s)B(s)\|\,ds.$$

Отсюда и из оценок (25) для интеграла $\int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau,s)L(s)B(s)\|\,ds$ установим неравенства

$$\beta_1\|\xi\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau,s)L(s)B(s)\|\,ds \leqslant \beta_2\|\xi\|. \tag{26}$$

Так как $L(t)$, $t \geqslant 0$, — матрица Ляпунова, то и $L^T(t)$, $t \geqslant 0$, также является матрицей Ляпунова, а поэтому при некотором $l > 0$ справедливы неравенства $\|L^T(\tau)\| \leqslant l$ и $\|(L^T(\tau))^{-1}\| \leqslant l$, в которых величина l не зависит от τ. На основании определения ξ и последних двух неравенств для нормы вектора ξ имеем оценки снизу и сверху:

$$\|\xi\| = \|L^T(\tau)\cdot h\| \geqslant \|(L^T(\tau))^{-1}\|\cdot\|L^T(\tau)\cdot h\|/l \geqslant \|(L^T(\tau))^{-1}\cdot L^T(\tau)\cdot h\|/l = \|h\|/l,$$

$$\|\xi\| = \|L^T(\tau)\cdot h\| \leqslant \|L^T(\tau)\|\cdot\|h\| \leqslant l\cdot\|h\|.$$

Ввиду этих оценок, а также формулы (26), полагая $\delta_1 = \delta_1(\sigma) := \beta_1/l > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\sigma) := \beta_2\cdot l > 0$, установим неравенства

$$\delta_1\|h\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau,s)L(s)B(s)\|\,ds \leqslant \delta_2\|h\|. \tag{27}$$

Пользуясь рассуждениями, аналогичными выводу формулы (27), легко показать, что найдутся такие величины $\delta_3 = \delta_3(\sigma) > 0$ и $\delta_4 = \delta_4(\sigma) > 0$, что выполняются оценки

$$\delta_3\|h\| \leqslant \int_\tau^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau+\sigma,s)L(s)B(s)\|\,ds \leqslant \delta_4\|h\|. \tag{28}$$

Поскольку число $\tau \geqslant 0$ и вектор $h \in \mathbb{R}^n$ взяты произвольным образом, то на основании формул (27) и (28), пользуясь определением 9, получим, что система (23) обладает свойством $H(\sigma)$. Теорема 4 доказана. $\square$

Следствие 1. *Преобразование Ляпунова сохраняет свойство σ-равномерной полной управляемости (по Тонкову) системы, т. е. если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами σ-равномерно вполне управляема (по Тонкову), то преобразованная система (23) также является σ-равномерно вполне управляемой.*

Доказательство. Пусть система (1) является σ-равномерно вполне управляемой (по Тонкову). Из теоремы 3 следует, что система (1) обладает также и свойством $H(\sigma)$. Применив к этой системе преобразование Ляпунова $y = L(t)x$, получим систему (23), для которой, согласно теореме 4, выполняется свойство $H(\sigma)$. Тогда, по теореме 3, система (23) σ-равномерно вполне управляема (по Тонкову). Следствие 1 доказано. □

Всюду далее полагаем $n = 2$ и $m \in \{1, 2\}$. Из свойства интегральной ограниченности [1, с. 252] матриц A и B вытекает существование таких чисел $a, b \geqslant 1$, что для всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства $\int_t^{t+\sigma} \|A(\tau)\|\,d\tau \leqslant a < +\infty$, $\int_t^{t+\sigma} \|B(\tau)\|\,d\tau \leqslant b < +\infty$. Эти числа a и b зафиксируем. Будем также считать, что для системы (1) числа σ и γ из определения 8 равномерной полной управляемости зафиксированы и для них справедливы не ограничивающие общность рассуждений оценки $\sigma \geqslant 1$ и $\gamma \geqslant 1$.

Теорема 5. *Система (3) равномерно глобально достижима тогда и только тогда, когда найдется величина $\Delta > 0$, при которой для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geqslant 0$ и произвольной матрице $H \in \in \mathcal{LU}_2(r, \rho)$ найдется измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ управление $U = U(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) выполнение равенства $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (3) равномерно глобально достижима. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$. На основании определения множеств $\mathcal{LU}_2(r, \rho)$ и $\mathcal{M}_2(r, \rho)$ выполняется включение $\mathcal{LU}_2(r, \rho) \subset \mathcal{M}_2(r, \rho)$. Тогда, взяв в качестве H произвольную матрицу из множества $\mathcal{LU}_2(r, \rho)$, ввиду последнего включения и равномерной глобальной достижимости системы (3), найдем такие число $T > 0$ и величину $d_1 = d_1(r, \rho) > 0$, а также измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ управление U_1, удовлетворяющее условию $\|U_1(t)\| \leqslant d_1$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, при которых для матрицы Коши $X_{U_1}(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$. Полагая $\theta = d_1$, $\Delta = T$, установим необходимость.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы 5. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$. Возьмем любую матрицу $H \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$ и покажем, что найдется такое число $T > 0$, при котором существует не зависящая от $t_0 \geqslant 0$ величина $d = d(r, \rho) > 0$, что на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ найдется такое измеримое и ограниченное управление U, удовлетворяющее условию $\|U(t)\| \leqslant d$ для $t \in [t_0, t_0 + T]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$.

Пользуясь теоремой 2, представим матрицу H в виде произведения матриц H_k, $k = \overline{1, 7}$, при всех $k = \overline{1, 7}$ удовлетворяющих включению $H_k \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$, где $r_1 := 3(r + 1)$. Тогда на основании условий теоремы 5 при всяком $k = \overline{1, 7}$ на каждом отрезке $[t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$ найдем измеримое и ограниченное управление $U_k = U_k(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$ оценке $\|U_k(t)\| \leqslant \theta_k(r_1, \rho)$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_{U_k}(t, s)$ системы (3) с этим управлением равенство $X_{U_k}(t_0 + k\Delta, t_0 + (k-1)\Delta) = H_k$.

Положим $T := 7\Delta$. Определим для системы (3) управление $U = U(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, полагая его равным $U(t) \equiv U_k(t)$, $t \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$, $k = \overline{1, 7}$. Тогда для матрицы Коши $X_U(t_0 + T, t_0)$ системы (3) с управлением U на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ выполняются равенства

$$X_U(t_0 + T, t_0) = X_{U_7}(t_0 + 7\Delta, t_0 + 6\Delta) \cdot \ldots \cdot X_{U_1}(t_0 + \Delta, t_0) = H_7 \cdot \ldots \cdot H_1 = H. \tag{29}$$

Кроме того, ввиду определения функций $U_k(t)$, $t \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$, $k = \overline{1, 7}$, следует, что функция $U = U(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, измерима и ограничена на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, причем для нее выполняется не зависящая от $t_0 \geqslant 0$ оценка $\|U(t)\| = \|U_k(t)\| \leqslant \Theta(r,\rho)$, в которой $\Theta(r,\rho) = \max\{\theta_k(3(r+1),\rho)\,,\ k=\overline{1,7}\} = \max\{\theta_k(r_1,\rho)\,,\ k=\overline{1,7}\}$. Тогда, полагая $d = d(r,\rho) := \Theta(r,\rho)$, на основании равенств (29) установим равномерную глобальную достижимость линейной системы (3), а с ней и достаточность теоремы. Теорема 5 доказана. □

Замечание 8. Из теоремы 5 следует, что для равномерной глобальной достижимости системы (3) необходимо и достаточно одновременное существование на произвольном отрезке времени некоторой фиксированной длины таких измеримых и ограниченных управлений, которые обеспечивали бы равенства матрицы Коши системы (3) с этими управлениями на рассматриваемом временно́м отрезке всевозможным допустимым как верхне-, так и нижнетреугольным матрицам с положительными диагональными элементами. При этом заметим, что существование управления, реализующего только верхние либо только нижние треугольные матрицы с положительными диагональными элементами, не является достаточным условием для равномерной глобальной достижимости [3, с. 260–261]. Последнее условие может обеспечивать [3, с. 261–264] лишь глобальную ляпуновскую приводимость системы (3).

В работе [23] была дана теорема, которую можно переформулировать следующим образом:

Теорема 6. *Пусть $n = 2$, $m \in \{1,2\}$ и $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если система (1) равномерно вполне управляема, то найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geqslant 0$ и произвольной верхнетреугольной матрице $H \in \mathrm{M}_2$ с положительными диагональными элементами, удовлетворяющей оценкам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U, для которого при всех $t \in [t_0, t_0+\Delta]$ выполняется неравенство $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и которое обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (3) с этим управлением равенство $X_U(t_0+\Delta, t_0) = H$.*

Замечание 9. Формулировка и полное доказательство данного утверждения содержатся в разделе 3.3 диссертации [24]. Величина $\Delta = \Delta(\sigma)$, указанная в теореме 6, определяется равенством $\Delta = \Delta(\sigma) := 2N\sigma$, где $N := [3\pi/\theta]$, $\theta := 7\arcsin(4\gamma_1 b)^{-1}/16$, $\gamma_1 := \max\{\gamma, \sqrt{2}\}$.

Замечание 10. Используя подход, аналогичный предложенному при доказательстве теоремы 6, можно показать, что и для нижнетреугольных (2×2)-матриц H с положительными диагональными элементами имеет место утверждение, аналогичное теореме 6.

Таким образом, в силу теоремы 6 и замечания 10 с учетом определения $\mathcal{LU}_2(r,\rho)$ получим

Следствие 2. *Пусть $n = 2$, $m \in \{1,2\}$ и $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если система (1) равномерно вполне управляема, то найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geqslant 0$ и произвольной матрице $H \in \mathcal{LU}_2(r,\rho)$ найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0+\Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (3) с этим управлением выполнение равенства $X_U(t_0+\Delta, t_0) = H$.*

Теорема 7. *Пусть $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если двумерная линейная система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система (3) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Доказательство. Пусть для линейной системы (1) выполняются равенство $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$ и условие равномерной полной управляемости. Тогда в силу следствия 2 для замкнутой системы (3), соответствующей системе (1), справедливо следующее свойство: найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geqslant 0$ и произвольной матрице $H \in \mathcal{LU}_2(r, \rho)$ найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) с этим управлением выполнение равенства $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$. Наличие же последнего свойства, в силу теоремы 5, обеспечивает равномерную глобальную достижимость двумерной системы (3), соответствующей системе (1). Теорема 7 доказана. $\square$

В статье [25] установлено следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то существует такое измеримое и ограниченное управление $\widetilde{U} : [0, +\infty] \to \mathrm{M}_{m\,2}$, что система* (3) *с этим управлением асимптотически эквивалентна* (*по Богданову*) *системе*

$$\dot{y} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0. \tag{30}$$

Замечание 11. В теореме 8 асимптотическую эквивалентность систем (3) и (30) обеспечивает преобразование Ляпунова [4, с. 153–154] $x = X_{\widetilde{U}}(t, 0)y$, в котором матрица $X_{\widetilde{U}}(t, 0)$ — матрица Коши системы (3) с управлением $U = \widetilde{U}(\cdot)$.

Теорема 9. *Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. Если система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система* (3) *является равномерно глобально достижимой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о будем проводить в соответствии с подходом, описанным в лемме 30.1 работы [3, с. 330]. Пусть система (1) обладает свойством равномерной полной управляемости. Пользуясь теоремой 8, построим такое измеримое и ограниченное управление $U_1 : [0, +\infty) \to \mathrm{M}_{m\,2}$, что система (3) с этим управлением ляпуновским преобразованием $x = L(t)y$ приводится к системе (30). Поскольку имеют место соотношения $\dot{x} = (L(t)y)^{\cdot} = \dot{L}(t)y + L(t)\dot{y}$ и $\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x = (A(t) + B(t)U_1(t))L(t)y$, то, приравнивая правые части двух последних равенств и преобразуя полученное выражение с учетом обратимости матрицы Ляпунова $L(t)$ при всех $t \geqslant 0$, получим соотношение $\dot{y} = \Big(L^{-1}(t)\big(A(t) + B(t)U_1(t)\big)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)\Big)y$, из которого в силу (30) вытекает формула

$$L^{-1}(t)\dot{L}(t) = L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L(t). \tag{31}$$

Это же преобразование приводит равномерно вполне управляемую систему [3, с. 97]

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{32}$$

к системе

$$\dot{y} = L^{-1}(t)B(t)u, \quad t \geqslant 0, \tag{33}$$

которая, согласно следствию 1, так же как и система (32), равномерно вполне управляема. В силу замечания 11 матрицей ляпуновского преобразования $x = L(t)y$ является матрица Коши системы (3) с управлением U_1, которая на основании свойств матрицы Коши является абсолютно непрерывной и ограниченной матричной функцией. Тогда, ввиду определения функции $B(t)$, $t \geqslant 0$, матрица при управлении в системе (33) локально интегрируема и интегрально ограничена. Поскольку система (33) равномерно вполне управляема, то в силу теоремы 7 система

$$\dot{y} = L^{-1}(t)B(t)U_2(t)y, \quad t \geqslant 0, \tag{34}$$

полученная из системы (33) выбором некоторого измеримого и ограниченного управления, заданного в виде линейной обратной связи $u(t) = U_2(t)y$, $t \geqslant 0$, является равномерной глобально достижимой. Зафиксируем для системы (34) число T из определения равномерной глобальной достижимости.

Так как матрица $X_{U_1}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, — матрица Коши системы (3) с интегрально ограниченными коэффициентами и ограниченным управлением U_1, то, применяя лемму Гронуолла–Беллмана [4, с. 108–109] и формулу Лиувилля–Остроградского [4, с. 73], нетрудно показать, что найдутся такие числа $\kappa_1 \geqslant 1$ и $0 < \rho_1 \leqslant 1$, что для всякого $t_0 \geqslant 0$ и произвольных $t,s \in [t_0, t_0+T]$ выполняются неравенства $\|X_{U_1}(t,s)\| \leqslant \kappa_1$ и $\det X_{U_1}(t,s) \geqslant \rho_1$. Зафиксируем любые числа $t_0 \geqslant 0$, $\kappa_2 \geqslant 1$ и $0 < \rho_2 \leqslant 1$. Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathcal{M}_2(\kappa_2, \rho_2)$. Тогда для матрицы $H_1 := (X_{U_1}(t_0, t_0+T)H) \in \mathrm{M}_2$ имеют место оценки $\|H_1 - E\| \leqslant \|X_{U_1}(t_0, t_0+T)\| \cdot \|H\| + 1 \leqslant \leqslant \kappa_1 \cdot \kappa_2 + 1 =: r$ и $\det H_1 = \det(X_{U_1}(t_0, t_0+T) \cdot H) = \det X_{U_1}(t_0, t_0+T) \cdot \det H \geqslant \rho_1 \cdot \rho_2 =: \rho$, означающие справедливость включения $H_1 \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$. В силу равномерной глобальной достижимости системы (34) существует величина $d = d(r,\rho) > 0$, при которой на отрезке $[t_0, t_0+T]$ найдется такое измеримое и ограниченное управление $U_2 : [t_0, t_0+T] \to \mathrm{M}_{m\,2}$, удовлетворяющее для всех $t \in [t_0, t_0+T]$ оценке $\|U_2(t)\| \leqslant d$, что для матрицы Коши $Y_{U_2}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (34) с этим управлением обеспечивается равенство $Y_{U_2}(t_0+T, t_0) = H_1$.

Применим к системе (34) с выбранным управлением $U_2 = U_2(\cdot)$ обратное ляпуновское преобразование $y = L^{-1}(t)x$, тогда с учетом равенства (31) получим цепочку соотношений:

$$L^{-1}(t)B(t)U_2(t)L^{-1}(t)x = L^{-1}(t)B(t)U_2(t)y = \dot{y} = (L^{-1}(t)x)^{\cdot} =$$

$$= -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)x + L^{-1}(t)\dot{x} = -L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L(t)L^{-1}(t)x + L^{-1}(t)\dot{x},$$

из которых вытекает равенство $L^{-1}(t)B(t)U_2(t)L^{-1}(t)x = -L^{-1}(t)(A(t)+B(t)U_1(t))x + L^{-1}(t)\dot{x}$. Отсюда, таким образом, получаем, что система (34) асимптотически эквивалентна системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)(U_1(t) + U_2(t)L^{-1}(t)))x, \quad t \geqslant 0. \tag{35}$$

Положим $U(t) := U_1(t) + U_2(t)L^{-1}(t)$. Тогда, ввиду определения матричных функций $U_1(t)$, $U_2(t)$, $L(t)$, $t \geqslant 0$, функция $U(t)$ является измеримой и ограниченной на $[0, +\infty)$. В силу замечания 11 при всех $t \geqslant 0$ справедливо тождество $L(t) \equiv X_{U_1}(t, t_0)$. Отсюда и из верного [3, с. 56] для матриц Коши $X(t,s)$ и $Y(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, асимптотически эквивалентных систем, связанных преобразованием Ляпунова $x = L(t)y$, соотношения $X(t,s) = L(t)Y(t,s)L^{-1}(s)$ следует, что для матрицы Коши $X_U(t_0+T, t_0)$ системы (3) с выбранным управлением $U = U(t)$ (т. е. системы (35), асимптотически эквивалентной системе (34)) на отрезке $[t_0, t_0+T]$ имеют место равенства

$$X_U(t_0+T, t_0) = L(t_0+T) \cdot Y_{U_2}(t_0+T, t_0) \cdot L^{-1}(t_0) =$$

$$= X_{U_1}(t_0+T, t_0) \cdot Y_{U_2}(t_0+T, t_0) \cdot X_{U_1}(t_0, t_0) = X_{U_1}(t_0+T, t_0) \cdot H_1 \cdot E =$$

$$= X_{U_1}(t_0+T, t_0) \cdot X_{U_1}(t_0, t_0+T) \cdot H = H,$$

означающие равномерную глобальную достижимость системы (3). Теорема 9 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. № 1. С. 31–62.
3. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 480 с.
5. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.

6. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
7. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 60–67.
8. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
9. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.
10. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 228–238.
11. Попова С.Н., Тонков Е.Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 723–724.
12. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
13. Попова С.Н. Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем // Известия вузов. Математика. 2002. № 6 (481). С. 50–53.
14. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
15. Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1048–1054.
16. Козлов А.А., Макаров Е.К. О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых систем в невырожденном случае // Веснiк ВДУ. 2007. № 3 (45). С. 100–109.
17. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
18. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
19. Габдрахимов А.Ф., Зайцев В.А. Ляпуновская приводимость четырехмерных линейных стационарных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 25–40.
20. Зайцев В.А. Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 2. С. 157–179. DOI: 10.20537/vm150202
21. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
22. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
23. Козлов А.А. О частном случае глобальной ляпуновской приводимости двумерных систем // Веснiк ВДУ. 2008. № 3 (49). С. 105–110.
24. Козлов А.А. Управление показателями Ляпунова дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / ИМ НАН. Минск, 2008. 115 с.
25. Козлов А.А., Инц И.В. О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 720–742. DOI: 10.1134/S0012266116060021

Поступила в редакцию 30.05.2017

Козлов Александр Александрович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: kozlovaa@tut.by

Инц Ирина Викторовна, аспирант, кафедра высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: i.ints@mail.ru

A. A. Kozlov, I. V. Ints

On uniform global attainability of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 178–192 (in Russian).

Keywords: linear control system, uniform complete controllability, uniform global attainability.

MSC2010: 34D08, 34H05, 93C15

DOI: 10.20537/vm170203

We consider a linear time-varying control system with locally integrable and integrally bounded coefficients

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

We construct control of the system (1) as a linear feedback $u = U(t)x$ with measurable and bounded function $U(t)$, $t \geqslant 0$. For the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

we study a question about the conditions for its uniform global attainability. The last property of the system (2) means existence of a matrix $U(t)$, $t \geqslant 0$, that ensure equalities $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ for the state-transition matrix $X_U(t,s)$ of the system (2) with fixed $T > 0$ and arbitrary $k \in \mathbb{N}$, $\det H_k > 0$. The problem is solved under the assumption of uniform complete controllability of the system (1), corresponding to the closed-loop system (2), i.e. assuming the existence of such $\sigma > 0$ and $\gamma > 0$, that for any initial time $t_0 \geqslant 0$ and initial condition $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ of the system (1) on the segment $[t_0, t_0+\sigma]$ there exists a measurable and bounded vector control $u = u(t)$, $\|u(t)\| \leqslant \gamma\|x_0\|$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, that transforms a vector of the initial state of the system into zero on that segment. It is proved that in two-dimensional case, i.e. when $n = 2$, the property of uniform complete controllability of the system (1) is a sufficient condition of uniform global attainability of the corresponding system (2).

REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
2. Zaitsev V.A. Global attainability and global Lyapunov reducibility of two-dimensional and three-dimensional linear control systems with the constant coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, no. 1, pp. 31–62 (in Russian).
3. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
4. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Moscow State University, 1998, 624 p.
5. Bogdanov Yu.S. About the asymptotically equivalent linear differential systems, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 6, pp. 707–716 (in Russian).
6. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, issue 1, pp. 97–107.
7. Zaitsev V.A. Tonkov E.L. Attainability, compatibility and V.M. Millionshchikov's method of rotations, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 42–52.
8. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over the Lyapunov exponents of consistent systems. I, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 10, pp. 1556–1564.
9. Popova S.N., Tonkov E.L. Control of the Lyapunov exponents of consistent systems. II, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1800–1807.
10. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over Lyapunov exponents of consistent systems. III, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 2, pp. 209–218.
11. Popova S.N., Tonkov E.L. Uniform consistency of linear systems, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 672–674.

12. Popova S.N., Tonkov E.L. Consistent systems and control of Lyapunov exponents, *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 226–235.
13. Popova S.N. Equivalence between local attainability and complete controllability of linear systems, *Russian Mathematics*, 2002, vol. 46, no. 6, pp. 48–51.
14. Popova S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, issue 12, pp. 1713–1723. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000023551.43484.e5
15. Popova S.N. On the global controllability of Lyapunov exponents of linear systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, issue 8, pp. 1072–1078. DOI: 10.1134/S0012266107080058
16. Kozlov A.A., Makarov E.K. About uniform global attainability of linear control systems in the non-degenerate case, *Vestn. Vitsebsk. Dzyarzh. Univ.*, 2007, no. 3 (45), pp. 100–109 (in Russian).
17. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96. DOI: 10.1007/BF01091661
18. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
19. Gabdrakhimov A.F., Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility for four-dimensional linear stationary control systems in the class of the piecewise-constant control functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2006, no. 1, pp. 25–40 (in Russian).
20. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 157–179 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150202
21. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
22. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
23. Kozlov A.A. On the partial case of global Lyapunov's reducibility of two-dimensional systems, *Vestn. Vitsebsk. Dzyarzh. Univ.*, 2008, no. 3 (49), pp. 105–110 (in Russian).
24. Kozlov A.A. Control over Lyapunov's exponents of a differential systems with break and fast oscillated coefficients, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Minsk, 2008, 20 p. (In Russian).
25. Kozlov A.A., Ints I.V. On the global Lyapunov reducibility of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equation*, 2016, vol. 52, issue 6, pp. 699–721.
DOI: 10.1134/S0012266116060021

Received 30.05.2017

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: kozlovaa@tut.by

Ints Irina Viktorovna, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: i.ints@mail.ru