УДК 517.97

© *А. А. Горшков, М. И. Сумин*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Рассматривается выпуклая задача оптимального управления для параболического уравнения со строго равномерно выпуклым целевым функционалом, с граничным управлением и с распределенными поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. Образы задающих поточечные фазовые ограничения операторов вкладываются в лебегово пространство суммируемых с s-й степенью функций при $s \in (1, 2)$. В свою очередь, граничное управление принадлежит лебегову пространству с показателем суммируемости $r \in (2, +\infty)$. Основными результатами работы в рассматриваемой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями являются регуляризованные, или, другими словами, устойчивые к ошибкам исходных данных, секвенциальные принцип Лагранжа в недифференциальной форме и поточечный принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное граничное управление, параболическое уравнение, секвенциальная оптимизация, двойственная регуляризация, устойчивость, поточечное фазовое ограничение в лебеговом пространстве, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.20537/vm170202

Введение

Задачам оптимизации в целом и условной оптимизации в частности свойственны различные проявления неустойчивости [1]. При практическом решении реальных оптимизационных задач, когда их исходные данные могут задаваться с погрешностью, а процесс решения неизбежно связан с применением приближенных методов, проблемы неустойчивости являются центральными, требующими их обязательного учета. Неустойчивость оптимизационных задач, в свою очередь, порождает и «неустойчивость» классических условий оптимальности, в частности таких, как принцип Лагранжа (ПЛ), принцип максимума Понтрягина (ПМП). Это проявляется в выделении ими сколь угодно далеких «возмущенных» оптимальных элементов от их «невозмущенных» аналогов при сколь угодно малых возмущениях исходных данных задач [2].

Естественно, указанные проблемы неустойчивости характерны и для рассматриваемой ниже задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями в случае линейного параболического уравнения, а также для соответствующих ей классических условий оптимальности — ПЛ и ПМП. В данной работе предлагается преодолевать проблемы некорректности в рассматриваемой задаче на основе метода двойственной регуляризации [2–7] и одновременного перехода к понятию минимизирующей последовательности допустимых элементов как основного понятия оптимизационной теории, то есть, другими словами, перехода с языка оптимальных элементов на секвенциальный язык минимизирующих последовательностей. Основными результатами работы в изучаемой задаче оптимального управления с распределенными поточечными фазовыми ограничениями являются регуляризованные, или, другими словами, устойчивые к ошибкам исходных данных, секвенциальные ПЛ и поточечный ПМП.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15–47–02294-р_поволжье_а) и Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (код проекта 1727).

Задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями для управляемых распределенных систем рассматриваются, с точки зрения получения классического ПМП и условий его обобщающих, на протяжении последних тридцати пяти лет (см., например, работы [8–10] и библиографию в них). Однако во всех работах этого направления, по сути дела, внимание уделялось лишь задачам с фазовыми ограничениями-неравенствами. Одновременно отличительной особенностью указанных выше, а также большого числа других публикаций, посвященных теории ПМП в задачах с фазовыми ограничениями, является то, что все рассматриваемые в них задачи оптимального управления изучались лишь при условии точного задания исходных данных. С целью преодоления проблемы неустойчивости классических условий оптимальности в задачах с фазовыми ограничениями в работах [11–13] были получены различные варианты так называемых регуляризованных недифференциального ПЛ и ПМП в выпуклой задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. Отличительными особенностями работ [11–13] являются, во-первых, учет возможного неточного задания исходных данных оптимизационной задачи и, как следствие, учет ее возможной неустойчивости и, во-вторых, вложение образов операторов, задающих фазовые ограничения, в гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций. Это позволило доказать в [11–13] в терминах минимизирующих последовательностей и обычных функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина различные версии так называемых регуляризированных (устойчивых секвенциальных) ПЛ, ПМП, представляющих собой одновременно и регуляризирующие алгоритмы решения задач. Важнейшими свойствами регуляризованных условий оптимальности являются: 1) справедливость для любой имеющей решение задачи вне зависимости от фактов существования или несуществования решения соответствующей двойственной задачи; 2) устойчивость по возмущению исходных данных задачи удовлетворяющих им последовательностей прямых и двойственных переменных, генерируемых посредством метода двойственной регуляризации; 3) отсутствие абстрактных мер, в том числе и мер Радона в соответствующих формулировках; 4) получение обычных классических условий оптимальности (записываемых, в частности, и в терминах традиционных для подобных задач мер Радона) как предельных вариантов указанных регуляризованных условий.

В работах [14, 15] результаты [11–13] были распространены на задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства для линейного параболического уравнения (см. также работы [2, 16], где рассматривались, в частности, задачи с фазовыми равенствами). В этих работах, как и в [11–13], образы операторов, задающих фазовые ограничения, вкладывались в гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций. Однако, если в случае управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений конечный результат в виде регуляризованного ПМП, по сути дела, не зависит от того, в какое лебегово пространство с показателем суммируемости $p \in (1, +\infty)$ вкладывать образы задающих ограничения операторов (свойства регулярности соответствующих линейных сопряженных уравнений принципа максимума не зависят от степени суммируемости входящих в них функциональных множителей Лагранжа, принадлежащих сопряженному лебегову пространству с показателем суммируемости s, $1/s + 1/p = 1$), то в случае распределенных управляемых систем это уже не так: от того, каков показатель суммируемости элементов лебегова пространства, куда вкладываются образы задающих ограничения операторов, зависит «качество» получаемого регуляризованного ПМП. Более того, в случае управляемых распределенных систем существенным является и то, в какое лебегово пространство вкладываются управления, коэффициенты управляемого уравнения, а также и то, какими свойствами гладкости обладает граница области изменения независимых переменных управляемой начально-краевой задачи. Перечисленные обстоятельства, а также ряд других обстоятельств существенно усложняют исследование задач оптимизации распределенных систем с поточечными фазовыми ограничениями по сравнению с их «сосредоточенными» аналогами, задают многообразие их постановок. В частности, в случае управляемых распределенных систем появляется возможность рассматривать различные по сложности постановки задач с фазовыми ограничениями в зависимости от того, какой тип управлений используется в задаче (распределенные, начальные, граничные управления), какой тип поточечных фазовых ограничений используется в ней (распределенные, дискретные, граничные фазовые ограничения).

Принципиальным отличием ситуации настоящей работы от результатов [11–13], а также [14, 15] является то, что в ней, во-первых, управления считаются принадлежащими пространству суммируемых с r-й степенью функций при $r \in (2,+\infty)$ (а не пространству L_2), и, во-вторых, образы задающих распределенные поточечные фазовые ограничения операторов вкладываются в пространство суммируемых с s-й степенью функций при $s \in (1,2)$ (а не в пространство L_2). Указанное использование лебеговых пространств (с неравным двум показателем суммируемости) позволяет: 1) рассматривать более широкий класс задач оптимального управления для уравнений с частными производными, в частности с функционалами, зависящими от значений решений управляемых уравнений в конкретных фиксированных точках области независимых переменных; 2) получать за счет более хороших свойств решений сопряженной задачи, являющихся следствием принадлежности множителей Лагранжа лебеговым пространствам с достаточно высокими показателями $q \in (2,+\infty)$ суммируемости функций, поточечные принципы максимума, в том числе и в задачах с граничными управлениями и функционалами, зависящими от значений решений уравнений в конкретных фиксированных точках, принадлежащих границе области изменения независимых переменных (к таким задачам сводятся, например, обратные задачи дискретного граничного наблюдения); 3) обеспечивать дифференцируемость по Фреше по управляющим переменным функционалов Лагранжа рассматриваемых задач оптимального управления для конструирования численных алгоритмов по нахождению их точек минимума и, как следствие, для конструирования минимизирующих последовательностей допустимых управлений в исходных оптимизационных задачах.

При обосновании получаемых в работе и выражаемых в терминах минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги [17] регуляризованных ПЛ, ПМП, помимо указанной выше общей схемы работ [11–15], существенным образом используется и разработанная ранее схема получения устойчивого ПЛ в секвенциальной форме в задаче выпуклого программирования, допустимые элементы в которой, а также образы задающих ограничения операторов вкладываются в рефлексивные банаховы пространства [19, 20]. Аналогичная задача, но лишь с распределенным управлением, была рассмотрена в [21].

§ 1. Постановка задачи оптимального управления

Пусть $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклый компакт, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $Q_T \equiv \Omega\times(0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T)\}$, $\Gamma_T \equiv S_T \cup \{(x,t) : x \in \Omega, t = 0\}$, $\mathcal{D} \equiv \{w \in L_r(S_T) : w(x,t) \in W$ п. в. на $S_T\}$, $L_r(S_T) \equiv \mathcal{B}$, $L_2(S_T)$, $r > 2$ (см.[2]).

Рассмотрим задачу условной минимизации строго равномерно выпуклого функционала

$$(P^\delta) \qquad f^\delta(w) \equiv \langle A^\delta(\cdot,\cdot)z^\delta[w](\cdot,\cdot), z^\delta[w](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)} + \|w\|^\gamma_{L_r(S_T)} \to \min, \quad w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{B}, \quad \gamma > 1,$$

$$g_1^\delta(w)(x,t) = h^\delta(x,t),\ g_2^\delta(w)(x,t) \leqslant 0 \ \text{ при п. в. } (x,t) \in X \subset \overline{Q}_{\iota,T},\ \iota \in (0,T),$$

где $f^\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный строго равномерно выпуклый функционал, $g_1^\delta(w)(x,t) \equiv \varphi_1^\delta(x,t)z^\delta[w](x,t)$, $g_2^\delta(w)(x,t) \equiv \varphi_2^\delta(x,t,z^\delta[w](x,t))$, $X = \mathrm{cl}\ \overset{\circ}{X}$, $z^\delta[w]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида [22, гл. III, § 5] (см. также [9]):

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a^\delta(x,t)z + u_0^\delta(x,t) = 0,$$
$$z(x,0) = v_0^\delta(x),\ x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma^\delta(x,t)z = w(x,t),\ (x,t) \in S_T. \tag{1.1}$$

[2]Здесь и ниже используются принятые в монографии [22] обозначения для множеств Q_T, S_T, $Q_{i,T}$, а также для функциональных пространств и норм их элементов.

Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ) означает, что эти данные либо соответствуют ситуации их точного задания $(\delta = 0)$, либо являются возмущенными $(\delta > 0)$, то есть задаются с ошибкой, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

В случае существования решения задачи (P^0) (единственного) будем использовать для него обозначение w^0. Ниже будут нужны следующие условия на исходные данные задачи (P^δ):

(а) $A^\delta : S_T \to \mathbb{R}^1$ — измеримая по Лебегу функция такая, что выполняется оценка $0 \leqslant A^\delta(x,t) \leqslant L$ при п. в. $(x,t) \in S_T$, где $L > 0$ — некоторая постоянная;

(б) φ_1^δ, $h^\delta \in L_\infty(X)$ — заданные функции, $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная по совокупности переменных, выпуклая по z при всех $(x,t) \in X$ функция, удовлетворяющая условию $|\varphi_2^\delta(x,t,z) - \varphi_2^\delta(x,t,y)| \leqslant L_M|z-y|$ $\forall\,(x,t) \in X$, $z, y \in S_M^1$ с независящей от $(x,t) \in X$ постоянной $L_M > 0$, где $S_M^1 \equiv \{z \in \mathbb{R}^1 : |z| \leqslant M\}$;

(в) $a_{i,j} \in L_\infty(Q_T)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $a^\delta \in L_\infty(Q_T)$, $u_0^\delta \in L_\infty(Q_T)$, $\sigma^\delta \in L_\infty(S_T)$, $v_0^\delta \in C(\overline{\Omega})$ — заданные функции, $\nu|\xi|^2 \leqslant a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2$ $\forall (x,t) \in Q_T$, $\nu,\mu > 0$, $a_{i,j}(x,t) = a_{j,i}(x,t)$;

(г) справедливы следующие неравенства: $|a^\delta(x,t)| \leqslant K$ при п. в. $(x,t) \in Q_T$, $|\sigma^\delta(s,t)| \leqslant K$, при п. в. $(s,t) \in S_T$, где $K > 0$ — некоторая постоянная;

(д) граница S является кусочно-гладкой.

Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\|A^\delta - A^0\|_{\infty,S_T}, \|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T},\ \|u_0^\delta - u_0^0\|_{\infty,Q_T},\ \|v_0^\delta - v_0^0|_{\Omega}^{(0)},\ \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \leqslant \delta, \tag{1.2}$$

$$\|\varphi_1^\delta - \varphi_1^0\|_{\infty,X},\ \|h^\delta - h^0\|_{\infty,X} \leqslant \delta,\ |\varphi_2^\delta(x,t,z) - \varphi_2^0(x,t,z)| \leqslant K_M\delta\bigl(1+|z|\bigr)\ \forall\,(x,t) \in X,\ z \in S_M^1,$$

где $K_M > 0$ — некоторая зависящая от $M > 0$ постоянная.

Из условий на исходные данные и теоремы существования слабого решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида [9, теорема 3.2] следует разрешимость в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ прямой и сопряженной краевых задач.

Предложение 1. *Для любого управления $w \in \mathcal{B} = L_r(S_T)$ при любом $T > 0$ и любом $\delta \in [0, \delta_0]$ однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ прямая задача (1.1) и справедлива при $r > n+1$ априорная оценка*

$$|z^\delta[w]|_{Q_T}^{(0)} \leqslant C_T(\|u_0^\delta\|_{r,Q_T} + |v_0^\delta|_{\Omega}^{(0)} + \|w\|_{r,S_T}), \tag{1.3}$$

в которой постоянная C_T не зависит от δ и управления $w \in \mathcal{B}$.

Помимо того, одновременно однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ для любой тройки (χ,ψ,ω), $\chi \in L_r(Q_T)$, $\psi \in C(\overline{\Omega})$, $\omega \in L_r(S_T)$, и сопряженная задача

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i} + a^\delta(x,t)\eta = \chi(x,t),$$

$$\eta(x,T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = \omega(x,t), \quad (x,t) \in S_T.$$

Ее решение будем обозначать через $\eta^\delta[\chi,\psi,\omega]$. Для него так же, как в случае прямой задачи, справедлива априорная оценка

$$|\eta^\delta[\chi,\psi,\omega]|_{Q_T}^{(0)} \leqslant C_T(\|\chi\|_{r,Q_T} + |\psi|_{\Omega}^{(0)} + \|\omega\|_{r,S_T}), \tag{1.4}$$

в которой постоянная C_T также не зависит от δ и тройки (χ,ψ,ω).

Заметим, что в силу условий на исходные данные задачи (P^δ) и предложения 1 образы задающих поточечные фазовые ограничения операторов g_1^δ, g_2^δ принадлежат пространству существенно ограниченных функций $L_\infty(X)$. Тем не менее в дальнейшем будем считать, что эти образы принадлежат пространству $L_s(X)$ суммируемых с s-й степенью функций при $s \in (1,2)$. Это автоматически влечет погружение двойственных переменных рассматриваемой оптимизационной задачи в сопряженное с $L_s(X)$ пространство суммируемых с q-й степенью функций, $1/q + 1/s = 1$, $q > 2$. Последнее обстоятельство играет существенную роль при доказательстве основного результата работы, а именно регуляризованного поточечного принципа максимума Понтрягина в задаче (P^0), обеспечивая «нужную» регулярность решений соответствующих сопряженных задач.

Введем функцию Лагранжа и двойственную к (P^δ) задачу:

$$L^\delta(w,\lambda,\mu) \equiv f^\delta(w) + \langle \lambda, g_1^\delta(w) - h^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(w) \rangle, \quad w \in \mathcal{D}, \ (\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q(X), \ \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1,$$

$$V^\delta(\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q^+(X), \quad V^\delta(\lambda,\mu) \equiv \min_{w \in \mathcal{D}} L^\delta(w,\lambda,\mu),$$

где $L_q^+(X) \equiv \{z \in L_q(X) : z(x,t) \geqslant 0 \text{ п. в. на } X\}$. Заметим, что операция min в определении целевой функции двойственной задачи корректна, так как, благодаря условиям на исходные данные задачи (P^δ) и предложению 1, строго равномерно выпуклый функционал $L^\delta(\cdot,\lambda,\mu)$ при каждой паре $(\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q^+(X)$ является и слабо полунепрерывным снизу на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{D}$ пространства $L_r(S_T)$. При этом множество его точек минимума состоит из единственной точки $w^\delta[\lambda,\mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(w,\lambda,\mu) : w \in \mathcal{D}\}$ $\forall (\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q(X)$ (см. теорему 1 в [23]). Функция $V^\delta(\lambda,\mu)$ является определенной для любой точки $(\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q^+(X)$ и вогнутой на указанном множестве.

Центральным в данной работе является понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [17] в задаче (P^0), то есть последовательности элементов $w^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\ldots$, такой, что $f^\delta(w^i) \leqslant \beta + \delta^i$, $w^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}$, для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1,2,\ldots$, где

$$\mathcal{D}^\epsilon \equiv \{w \in \mathcal{D} : \|g_1^\delta(w)\|_{s,X} \leqslant \epsilon, \ \min_{z \in L_s^-(X)} \|g_2^\delta(w) - z\|_{s,X} \leqslant \epsilon\}, \ \epsilon \geqslant 0,$$

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon, \ \beta_\epsilon \equiv \inf_{w \in \mathcal{D}^\epsilon} f^\delta(w), \qquad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^\epsilon = \varnothing,$$

и принято обозначение $L_s^-(X) \equiv \{z \in L_s(X) : z(t) \leqslant 0 \text{ при п. в. } t \in X\}$.

Отметим, что введенное понятие обобщенной нижней грани β, а также соответствующее понятие минимизирующего приближенного решения зависят формально от индекса s. Однако благодаря равномерной ограниченности решений начально-краевой задачи (1.1) (см. предложение 1) и их регулярности (эти решения в соответствии с теоремой 10.1 в [22, гл. III, §10] равномерно ограничены в норме гёльдеровского пространства $H^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(Q')$, $\alpha \in (0,1)$, для любой подобласти $Q' \subset Q_T$, отстоящей на положительное расстояние от нижнего основания и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T), влекущим компактность в метрике $L_p(Q_T)$ при любом $p \in [1,+\infty)$ всего множества решений $\{z^\delta[w] : w \in \mathcal{D}\}$, можно утверждать, что все эти обобщенные грани, соответствующие индексам $1 \leqslant s < +\infty$, совпадают между собою. При этом одновременно любое минимизирующее приближенное решение, соответствующее формально индексу $s \in [1,+\infty)$, является таковым и для случая любого другого индекса, взятого из того же числового диапазона.

Легко видеть, что исходная задача оптимального управления (P^δ) может быть переписана в виде задачи выпуклого программирования в лебеговом пространстве $L_r(S_T)$ с ограничениями, задаваемыми операторами, образы которых лежат в лебеговом пространстве $L_s(X)$:

$$f^\delta(w) \to \min, \quad w \in \mathcal{D} \subset \mathcal{B}, \quad g_1^\delta(w) = h^\delta, \quad g_2^\delta(w) \leqslant 0,$$

где последнее неравенство понимается в смысле упорядоченности по конусу $L_s^-(X)$ неположительных функций в пространстве $L_s(X)$. Одновременно можно утверждать, что для этой задачи выпуклого программирования (эквивалентной исходной задаче оптимального управления (P^δ)) в силу оценок (1.2) и предложения 1 справедливы следующие оценки отклонения возмущенных исходных данных от точных:

$$|f^\delta(w) - f^0(w)| \leqslant C_1\delta \quad \forall w \in \mathcal{D}, \tag{1.5}$$

$$\|g_1^\delta(w) - g_1^0(w)\|_{s,X},\ \|g_2^\delta(w) - g_2^0(w)\|_{s,X} \leqslant C_2\delta(1 + \|w\|_{r,S_T}) \quad \forall\, w \in \mathcal{D},$$

где постоянные $C_1,\ C_2 > 0$ не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$ и $w \in \mathcal{D}$.

§ 2. Принцип максимума Понтрягина в задаче минимизации функции Лагранжа, дифференцируемость функции Лагранжа

Центральную роль при формулировании и доказательстве основных результатов статьи в § § 4, 5, связанных с регуляризованными ПЛ и ПМП для задачи (P^0), играет задача минимизации ее функции Лагранжа $L^\delta(w, \lambda, \mu) \to \min$, $w \in \mathcal{D}$, при произвольной фиксированной паре двойственных переменных $(\lambda, \mu) \in L_q(X) \times L_q^+(X)$. Именно в терминах решений этой задачи и формулируются указанные основные результаты. По этой причине в данном параграфе мы формулируем поточечный ПМП в этой «простейшей» задаче оптимального управления. Прежде чем приводить его формулировку, в дополнение к условиям (а)–(д) на исходные данные, предположим существование непрерывного по z градиента $\nabla_z\varphi_2^\delta(x, t, z)$, $(x, t, z) \in X \times \mathbb{R}^1$. Введем также стандартное обозначение $H_w(s, t, w, \eta) \equiv -(w\eta + |w|^r)$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$H_w(s, t, w^\delta[\lambda, \mu](s, t), \eta^\delta[w^\delta[\lambda, \mu]](s, t)) = \max_{w \in W} H_w(s, t, w, \eta^\delta[w^\delta[\lambda, \mu]](s, t)) \ \text{п.в. на } S_T, \tag{2.1}$$

где $\eta^\delta[w^\delta[\lambda, \mu]] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ *— решение сопряженной задачи*

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x, t)\eta_{x_i}) + a^\delta(x, t)\eta = \lambda(x, t)\varphi_1^\delta(x, t) + \mu(x, t)\nabla_z\varphi_2^\delta(x, t, z^\delta[w[\lambda, \mu]](x, t)),$$

$$\eta(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x, t)\eta = 2A^\delta(s, t)z^\delta[w[\lambda, \mu]](s, t), \quad (x, t) \in S_T,$$

при $w[\lambda, \mu] = w^\delta[\lambda, \mu]$.

Ввиду ограниченности объема статьи мы не приводим здесь доказательства этой теоремы. Отметим, что именно при ее доказательстве существенно используется факт принадлежности пары двойственных переменных (λ, μ) пространству $L_q(X) \times L_q^+(X)$ с достаточно большим показателем q, $q > 2$. Это доказательство проводится в точном соответствии со схемой доказательства принципа максимума леммы 6 в [18]. При этом оно опирается существенным образом, как и в [18], на лемму о представлении линейного функционала на пространстве решений линейного параболического уравнения (см. лемму 4 в [18], а также лемму 3 в [3]), следствием которой является непосредственно используемое при вычислении первой вариации, на основе игольчатого варьирования в задаче минимизации функции Лагранжа, следующее интегральное представление для ее приращения при произвольно выбранной паре управлений w^1, $w \in \mathcal{D}$

$$L^\delta(w^1, \lambda, \mu) - L^\delta(w, \lambda, \mu) = \tag{2.2}$$

$$= \int_{S_T} \big(w^1(s, t) - w(s, t)\big)\eta^\delta[w^1, w](s, t)\, ds\, dt + \int_{S_T} \big(|w^1(s, t)|^r - |w(s, t)|^r\big)\, ds\, dt,$$

где $\eta^\delta[w^1, w] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ — решение вспомогательной сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x, t)\eta_{x_i}) + a^\delta(x, t)\eta =$$

$$= \lambda(x,t)\varphi_1^\delta(x,t) + \mu(x,t)\int_0^1 \nabla_z\varphi_2^\delta\Big(x,t,z^\delta[w](x,t) + \gamma\big(z^\delta[w^1](x,t) - z^\delta[w](x,t)\big)\Big)\,d\gamma,$$

$$\eta(x,T) = 0, \quad x\in\Omega, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = A^\delta(s,t)(z^\delta[w^1](s,t) + z^\delta[w](s,t)), \quad (x,t)\in S_T.$$

При вычислении указанной первой вариации функции Лагранжа принадлежность пары (λ,μ) пространству $L_q(X)\times L_q^+(X)$ с достаточно большим показателем q обеспечивает «нужную» степень суммируемости коэффициентов этой вспомогательной сопряженной задачи и, как следствие, возможность применения при подсчете первой вариации оценки (1.4).

Представление (2.2) для приращения функции Лагранжа обеспечивает выполнимость и еще одного важного обстоятельства с точки зрения практического применения основных результатов статьи из § § 4, 5. Так как конструируемое в соответствии с регуляризованными ПЛ и ПМП минимизирующее приближенное решение в задаче (P^0) состоит из точек минимума функции Лагранжа, взятых при фиксированных значениях двойственных переменных, то для их нахождения удобно иметь формулу для градиента функции Лагранжа с целью организации того или иного численного алгоритма, например алгоритма метода наискорейшего спуска. Возможность вычисления градиента функции Лагранжа обеспечивает применение лебегова пространства $L_r(S_T)$ при $r > n+1$ в качестве несущего пространства управлений. Воспользуемся формулой для приращения функционала Лагранжа (2.2) для вычисления производной Фреше этого функционала. Вместо двух произвольных допустимых управлений $w^1, w\in\mathcal{D}$; возьмем $w^1 = w^\delta[\lambda,\mu] + h,\ h\in L_r(S_T),\ w = w^\delta[\lambda,\mu]$. Таким образом, получаем

$$L^\delta(w^\delta[\lambda,\mu]+h,\lambda,\mu) - L^\delta(w^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu) = \int_{S_T}(|w^\delta[\lambda,\mu](s,t)+h(s,t)|^r - |w^\delta[\lambda,\mu](s,t)|^r)\,ds\,dt +$$

$$+\int_{S_T}(w^\delta[\lambda,\mu](s,t)+h(s,t) - w^\delta[\lambda,\mu](s,t))\eta^\delta[w^\delta[\lambda,\mu](s,t)+h(s,t), w^\delta[\lambda,\mu](s,t)](s,t)\,ds\,dt.$$

Выделение главной линейной части в правой части этого представления приводит к установлению факта дифференцируемости функции Лагранжа и выражению для ее производной Фреше

$$\nabla_w L^\delta(w^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu)(s,t) = \eta^\delta[w^\delta[\lambda,\mu]](s,t) + rw^\delta[\lambda,\mu](s,t)|w^\delta[\lambda,\mu](s,t)|^{r-2},\ (s,t)\in S_T.$$

§ 3. Двойственная регуляризация для задачи оптимального граничного управления с фазовыми ограничениями в лебеговых пространствах

Благодаря оценкам (1.5) для отклонения приближенных исходных данных от точных, укажем алгоритм устойчивого конструирования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0). Применим подход, основанный на методе двойственной регуляризации [2–6], использованный ранее, в частности, для задач оптимального управления сосредоточенными [11–13] и распределенными [14,15] системами с поточечными фазовыми ограничениями, задаваемыми операторами, образы которых принадлежат гильбертовым пространствам.

Пусть решение задачи (P^0) существует. Двойственная регуляризация для задачи (P^0) заключается в решении двойственной к ней и стабилизированной по Тихонову задачи

$$R^{\delta,\alpha(\delta)}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\,\|(\lambda,\mu)\|^k \to \max, \quad (\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L_q^+(X), \quad k>2,$$

при условии согласования

$$\delta/\alpha(\delta)\to 0, \quad \alpha(\delta)\to 0, \quad \alpha(\delta)>0, \quad \delta\to 0. \tag{3.1}$$

Легко убедиться, что функционал $R^{\delta,\alpha(\delta)}(\lambda,\mu)$, $(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L_q^+(X)$, является вогнутым, непрерывным и коэрцитивным. Отметим, что о коэрцитивности некоторого вогнутого функционала F на множестве M в линейном нормированном пространстве V мы говорим, если, как обычно [24, с. 44], $\lim F(v) = -\infty$ при $v\in M$, $\|v\|\to\infty$. На основании предложений 1.1

и 1.2 [24, гл. 2, § 1, с. 44] можем заключить, что множество всех точек максимума функционала $R^{\delta,\alpha(\delta)}$ непусто, выпукло, замкнуто и ограничено. Обозначим его через $M^{\delta,\alpha(\delta)}$. Любая последовательность, максимизирующая $R^{\delta,\alpha(\delta)}$ на множестве $L_q(X)\times L_q^+(X)$, сходится к указанному множеству всех точек максимума $M^{\delta,\alpha(\delta)}$ (см., например, [1, с. 501]). Заметим, что множество $M^{\delta,\alpha(\delta)}$, вообще говоря, может состоять и не из одной точки. Далее будем работать с некоторой произвольно выбранной точкой максимума из множества $M^{\delta,\alpha(\delta)}$, обозначаемой через $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)})$. Покажем, что элементы $w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ сходятся при $\delta\to 0$ к решению w^0 исходной задачи (P^0) при условии согласования (3.1). Ниже с этой целью нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) функционала* $V^\delta : L_q(X)\times\times L_q(X)\to\mathbb{R}^1$ *в точке* (λ,μ) *множества* $L_q(X)\times L_q^+(X)$ *равен*

$$\partial V^\delta(\lambda,\mu)=\big(g_1^\delta(w^\delta[\lambda,\mu])-h^\delta, g_2^\delta(w^\delta[\lambda,\mu])\big).$$

Доказательство этой леммы проводится в соответствии с доказательством аналогичной леммы 2 в [11]. В отличие от [11] при доказательстве сформулированной леммы вместо понятия проксимальной нормали к замкнутому множеству гильбертова пространства следует оперировать понятиями так называемых нормалей Фреше (см., например, [26]) к замкнутым множествам в банаховых пространствах и соответствующих им обобщенных субдифференциалов [26].

Утверждение следующей леммы есть частный случай более общего утверждения, содержащегося в следствии 4.3.6 в [25].

Лемма 2. *Пусть B — банахово пространство, $f : B\to R^1\cup\{+\infty\}$ — собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция, $\Omega\subset B$ — замкнутое выпуклое множество. Тогда $x\in\Omega$ — точка минимума f на Ω в том и только в том случае, если $0\in\partial f(x)+N_\Omega(x)$, где $N_\Omega(x)\equiv\{p\in B^* : \langle p,x\rangle=\max\{\langle p,y\rangle : y\in\Omega\}\}$ — нормальный конус к Ω в x.*

Из леммы 1 и предложения 10 в [25, гл. 4, § 3] следует субдифференцируемость регуляризирующего функционала $R^{\delta,\alpha(\delta)}$, причем супердифференциал $\partial R^{\delta,\alpha(\delta)}$ имеет следующий вид:

$$\partial R^{\delta,\alpha(\delta)}(\lambda,\mu)=\partial V^\delta(\lambda,\mu)-\alpha(\delta)k(\lambda'\,\|\lambda\|^{k-1},\mu'\,\|\mu\|^{k-1}),$$

где $(\lambda',\mu')\in L_s(X)\times L_s(X)$ — такие элементы, для которых выполняются соотношения $\langle\lambda,\lambda'\rangle==\|\lambda\|$, $\|\lambda'\|=1$, $\langle\mu,\mu'\rangle=\|\mu\|$, $\|\mu'\|=1$. В силу специфики лебеговых пространств $L_s(X)$ и $L_q(X)$ и классических свойств неравенства Гёльдера легко показать, что в данной ситуации имеют место равенства

$$\lambda'(x,t)=\left(\frac{|\lambda(x,t)|}{||\lambda||_{L_q(X)}}\right)^{q-1}\operatorname{sign}\lambda(x,t),\quad \mu'=\left(\frac{|\mu(x,t)|}{||\mu||_{L_q(X)}}\right)^{q-1}\operatorname{sign}\mu(x,t).$$

Благодаря субдифференцируемости функционала $R^{\delta,\alpha(\delta)}$ и лемме 2 можем записать

$$\Big\langle(\lambda,\mu)-(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}),(g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-h^\delta,g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))-$$
$$-\alpha(\delta)k\Big(\lambda^{\delta\prime}\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1},\mu^{\delta\prime}\left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1}\Big)\Big\rangle\leqslant 0\quad\forall\,(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L_q^+(X), \tag{3.2}$$

где, в соответствии со сказанным выше, элементы $\lambda^{\delta\prime}$, $\mu^{\delta\prime}$ удовлетворяют равенствам $\langle\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\lambda^{\delta\prime}\rangle==\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|$, $\|\lambda^{\delta\prime}\|=1$, $\langle\mu^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta\prime}\rangle=\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\|$, $\|\mu^{\delta\prime}\|=1$.

Из неравенства (3.2) непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-h^\delta=\alpha(\delta)k\lambda^{\delta\prime}\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1}, \tag{3.3}$$

$$\Big\langle\mu-\mu^{\delta,\alpha(\delta)},g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-\alpha(\delta)k\mu^{\delta\prime}\left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1}\Big\rangle\leqslant 0\quad\forall\mu\in L_q^+(X). \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что при п. в. $(x,t) \in \{(x,t) \in X : \mu^{\delta,\alpha(\delta)}(x,t) > 0\}$ выполняются соотношения

$$g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) = \alpha(\delta)k\mu^{\delta\prime}\left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1}, \quad g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\mu^{\delta,\alpha(\delta)} > 0, \tag{3.5}$$

а при п. в. $(x,t) \in \{(x,t) \in X : \mu^{\delta,\alpha(\delta)}(x,t) = 0\}$ из (3.4) имеет место неравенство

$$g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leqslant 0. \tag{3.6}$$

Из полученных соотношений (3.3)–(3.6) выводим, в свою очередь, справедливость равенства

$$\Big\langle (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}), (g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - h^\delta, g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))\Big\rangle =$$

$$= \alpha(\delta)k\Big(\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^k + \left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^k\Big) \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Кроме того, из (3.3)–(3.6), равномерной ограниченности по δ элементов $g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - h^\delta$ и $g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])$, в силу ограниченности $\mathcal{D}$, и того факта, что $\left\|\lambda^{\delta\prime}\right\| = 1$ и $\left\|\mu^{\delta\prime}\right\| = 1$, заключаем, что $\alpha(\delta)\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1} \leqslant C_1,\ \alpha(\delta)|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^{k-1} \leqslant C_1$.

Так как $k > 2$, то из предыдущих оценок следует, что

$$\alpha(\delta)\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\| \to 0, \quad \alpha(\delta)\left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\| \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0. \tag{3.8}$$

Далее, так как элемент $w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ доставляет минимальное значение функционалу Лагранжа $L^\delta(w,\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}),\ w \in \mathcal{D}$, то есть

$$f^\delta(w) - f^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \Big\langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, g_1^\delta(w) - g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g_2^\delta(w) - g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\Big\rangle \geqslant 0 \quad \forall w \in \mathcal{D},$$

то, применяя неравенство из (3.7), выводим

$$f^\delta(w) - f^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \Big\langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, g_1^\delta(w) - h^\delta\Big\rangle + \Big\langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g_2^\delta(w)\Big\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \alpha(\delta)k\Big(\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^k + \left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^k\Big) \geqslant 0 \quad \forall w \in \mathcal{D}. \tag{3.9}$$

Используя неравенство Гёльдера, оценки (1.2) и (1.5), а также условие согласования (3.1) для (3.8) и ограниченность управлений, получаем предельное соотношение

$$\Big|\Big\langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, g_1^\delta(w^0) - h^\delta\Big\rangle + \Big\langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g_2^\delta(w^0)\Big\rangle\Big| \to \phi_1(\delta),\ \phi_1(\delta) \to 0,\ \delta \to 0.$$

Из (3.9) с учетом последнего соотношения получаем, в свою очередь, неравенство

$$0 \leqslant \alpha(\delta)k\Big(\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^k + \left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^k\Big) \leqslant f^\delta(w^0) - f^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \phi_1(\delta). \tag{3.10}$$

Из неравенства (3.10) выводим оценку

$$f^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leqslant f^0(w^0) + \phi_2(\delta),\ \phi_2(\delta) \to 0,\ \delta \to 0. \tag{3.11}$$

Учитывая оценку (1.3), а также условия на исходные данные, можем утверждать, что справедливы оценки $|f^\delta(w^0)| \leqslant C_3,\ |f^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])| \leqslant C_3,\ C_3 > 0$ — некоторая постоянная. В связи с последними обстоятельствами из (3.10) выводим наконец предельные соотношения

$$\alpha(\delta)\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1} \to 0,\ \alpha(\delta)\left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|^{k-1} \to 0,\ \alpha(\delta) \to 0.$$

Последние предельные соотношения в совокупности с (3.3) и (3.5) приводят к соотношениям

$$||g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-h^\delta||\to 0,\ g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\leqslant\bar\phi(\delta),\ ||\bar\phi(\delta)||\to 0,\ \delta\to 0, \tag{3.12}$$

в которых неравенство понимается в смысле упорядоченности по конусу $L_s^-(X)$ неположительных функций. Из (3.12) в силу ограниченности $\mathcal{D}$ выводим наконец, что

$$||g_1^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-h^0||\to 0,\ g_2^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\leqslant\phi(\delta),\ ||\phi(\delta)||\to 0,\ \delta\to 0, \tag{3.13}$$

где неравенство, так же как и в (3.12), понимается в смысле упорядоченности по конусу $L_s^-(X)$ неположительных функций.

Учитывая соотношения (3.11) и (3.13) и принимая во внимание определение минимизирующего приближенного решения, можем записать далее, что

$$f^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\to f^0(w^0),\ \delta\to 0. \tag{3.14}$$

Покажем, что наряду с предельным соотношением (3.14) справедлива и слабая сходимость

$$w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\to w^0 \text{ слабо в } L_r(S_T). \tag{3.15}$$

Для обоснования этого факта перепишем неравенство (3.9) в виде

$$f^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\leqslant(f^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-f^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))+$$
$$+f^\delta(w)+\left\langle\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},g_1^\delta(w)-h^\delta\right\rangle+\left\langle\mu^{\delta,\alpha(\delta)},g_2^\delta(w)\right\rangle\ \forall w\in\mathcal{D}.$$

Подставляя в это неравенство произвольный элемент w из множества $\mathcal{D}^0\equiv\{w\in\mathcal{D}: g_1^0(w)=h^0,$ $g_2^0(w)\in L_s^-(X)\}$, в силу оценки (1.5) получаем

$$f^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\leqslant 2C_1\delta+f^0(w)+\phi_1(\delta),\ \ \phi_1(\delta)\to 0,\ \delta\to 0. \tag{3.16}$$

В силу ограниченности $\mathcal{D}$ без ограничения общности считаем, что

$$w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\to w^* \text{ слабо в } L_r(S_T),\ \delta\to 0,\ w^*\in\mathcal{D}. \tag{3.17}$$

Пользуясь слабой полунепрерывностью снизу в пространстве $L_r(S_T)$ строго равномерно выпуклого функционала f^0 и условием согласования (3.1), выводим из (3.16), что $f^0(w^*)\leqslant f^0(w)$ $\forall w\in\mathcal{D}^0$. Так как в то же время, благодаря соотношениям (3.13), полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в равномерно выпуклом пространстве и слабой сходимости (3.17), можем записать, что $w^*\in\mathcal{D}^0$, то в силу единственности решения исходной задачи получаем $w^*=w^0$, то есть предельное соотношение (3.15) действительно справедливо.

Покажем, что в силу специфики поставленной задачи, помимо слабой сходимости (3.15), справедлива и сильная сходимость по аргументу. Так как строго равномерно выпуклый функционал f^0 является дифференцируемым в смысле Фреше в точках $\mathcal{D}$ (это доказывается точно так же, как и дифференцируемость функционала Лагранжа в § 2), то, учитывая его выпуклость и дифференцируемость по Фреше f^0, а также определение строго равномерно выпуклой функции, можем записать при всех $\alpha\in(0,1)$

$$\left\langle\partial f^0(w^0),\alpha(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-w^0)\right\rangle+f^0(w^0)\leqslant f^0(\alpha w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]+(1-\alpha)w^0)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha f^0(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])+(1-\alpha)f^0(w^0)-\alpha(1-\alpha)\Delta(||w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-w^0||).$$

Учитывая, что $\alpha\to+0$ в последнем неравенстве, и применяя (3.14) и (3.15), имеем

$$\Delta(||w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-w^0||)\to 0,\ \delta\to 0. \tag{3.18}$$

Проведя рассуждения, как в [1, гл. 4, § 7, лемма 2], выясняем, что модуль выпуклости $\Delta(t)$, $t \in [0, \operatorname{diam} \mathcal{D}]$, строго равномерно выпуклого функционала f^0 можно без ограничения общности считать непрерывным в окрестности нуля и монотонно возрастающим при $t \geqslant 0$, а значит, $t \to 0$ при $\Delta(t) \to 0$, и, следовательно, из (3.18) получаем сильную сходимость по аргументу:

$$||w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - w^0|| \to 0,\ \delta \to 0.$$

Одновременно, в силу соотношения (3.14), ограниченности $\mathcal{D}$ и условия согласования (3.1) можем утверждать, что справедливо и предельное соотношение

$$\Big\langle \big(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}\big), \big(g_1^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - h^\delta, g_2^\delta(w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\big) \Big\rangle \to 0,\ \delta \to 0. \tag{3.19}$$

Далее можно утверждать, что справедливо и предельное соотношение

$$\lim_{\delta \to +0} V^0(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) = \sup_{(\lambda,\mu) \in L_q(X) \times L_q^+(X)} V^0(\lambda, \mu), \tag{3.20}$$

говорящее о том, что семейство элементов $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})$, $\delta \in (0, \delta_0)$ является максимизирующим при $\delta \to 0$ в двойственной к (P^0) задаче. Для обоснования этого факта достаточно практически дословно повторить рассуждения доказательства аналогичного предельного соотношения в [7] (см. также [5]).

Подводя итог проведенным рассуждениям, можно сформулировать следующую теорему сходимости метода двойственной регуляризации для задачи (P^0).

Теорема 2. *Пусть задача (P^0) разрешима. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, для вырабатываемого методом двойственной регуляризации семейства элементов $w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$, $\delta \in (0, \delta_0]$, имеют место предельные соотношения (3.13), (3.14), (3.19), (3.20) и, как следствие, в силу строгой равномерной выпуклости и дифференцируемости по Фреше функционала f^0, сильная сходимость $w^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \to w^0$, $\delta \to 0$.*

§ 4. Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального граничного управления с фазовыми ограничениями в лебеговых пространствах

Теорема сходимости метода двойственной регуляризации 2 открывает возможность получения необходимых и достаточных условий существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0), формулируемых в виде регуляризованного ПЛ [2, 6, 7] в недифференциальной форме. Подчеркнем при этом, что условия существования минимизирующего приближенного решения, выраженные в секвенциальной форме, могли бы в равной степени носить название и регуляризованной теоремы Куна–Таккера [2, 6, 7], так как мы имеем дело только с регулярной функцией Лагранжа. Отметим, что наличие или отсутствие вектора Куна–Таккера в задаче определяет лишь свойства вырабатываемой параллельно с минимизирующей последовательностью допустимых элементов максимизирующей последовательности двойственных переменных в задаче, являющейся двойственной к исходной задаче. В случае существования вектора Куна—Таккера указанная максимизирующая последовательность является ограниченной, в противном случае она не ограничена.

Теорема 3. *Для того чтобы в задаче (P^0) существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in L_q(X) \times L_q^+(X)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\delta^k \big\|(\lambda^k, \mu^k)\big\| \to 0$ при $k \to \infty$, и выполняются соотношения*

$$w^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{0\varepsilon^k},\ \varepsilon^k \to 0,\ k \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\Big\langle \big(\lambda^k, \mu^k\big), \big(g_1^{\delta^k}(w^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) - h^{\delta^k}, g_2^{\delta^k}(w^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k])\big) \Big\rangle \to 0,\ k \to \infty. \tag{4.2}$$

Последовательность $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением, и в силу дифференцируемости по Фреше* f^0 *элементы* $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ *сильно сходятся при* $k\to\infty$ *к* w^0. *Как следствие* (4.1) *и* (4.2), *выполняется и соотношение*

$$V^0(\lambda^k,\mu^k)\to\sup_{(\lambda',\mu')\in L_q(X)\times L_q^+(X)}V^0(\lambda',\mu'). \tag{4.3}$$

В качестве последовательности (λ^k,μ^k), $k=1,2,\ldots$, *может быть взята последовательность* $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)})$, $k=1,2,\ldots$, *генерируемая методом двойственной регуляризации теоремы* 2 *при* $\delta=\delta^k$, $\delta^k\to0$, $k\to\infty$.

Доказательство. Для доказательства необходимости прежде всего заметим, что в случае существования минимизирующего приближенного решения задача (P^0) разрешима. Включение (4.1) и предельное соотношение (4.2) являются следствиями теоремы 2, если в качестве точек (λ^k,μ^k) взять точки $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)},\ \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)})$, $k=1,2,\ldots$. Одновременно, в силу справедливого в этом случае соотношения (3.14), ограниченности $\mathcal{D}$, условия согласования (3.1) и предельного соотношения (4.2), можем утверждать, что справедливо и соотношение (4.3). При этом на основании слабой полунепрерывности сверху вогнутого непрерывного функционала V^0 любая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k,\mu^k)\in L_q(X)\times L_q^+(X)$, $k=1,2,\ldots$, доставляет максимум в невозмущенной двойственной задаче.

Для доказательства достаточности заметим, что в силу включения $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{0\varepsilon^k}$, ограниченности последовательности $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, и условий на исходные данные задачи (P^0) множество $\mathcal{D}^0$ непусто, следовательно, задача (P^0) разрешима. Далее, так как точка $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ минимизирует функционал Лагранжа $L^{\delta^k}(\cdot,\lambda^k,\mu^k)$, то можем записать

$$f^{\delta^k}(w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])+\Big\langle(\lambda^k,\mu^k),\big(g_1^{\delta^k}(w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])-h^{\delta^k},g_2^{\delta^k}(w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\big)\Big\rangle\leqslant$$

$$\leqslant f^{\delta^k}(w)+\Big\langle(\lambda^k,\mu^k),\big(g_1^{\delta^k}(w)-h^{\delta^k},g_2^{\delta^k}(w)\big)\Big\rangle\ \ \forall w\in\mathcal{D}.$$

Отсюда в силу условий теоремы получаем

$$f^{\delta^k}(w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\leqslant f^{\delta^k}(w)+\Big\langle(\lambda^k,\mu^k),\big(g_1^{\delta^k}(w)-h^{\delta^k},g_2^{\delta^k}(w)\big)\Big\rangle+\psi^k\ \forall w\in\mathcal{D},\ \ \psi^k\to0,\ \ k\to\infty.$$

Подставляя в последнее неравенство $w=w^0$ и пользуясь тем, что $\delta^k\left\|(\lambda^k,\mu^k)\right\|\to0$, $k\to\infty$, получаем $f^0(w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\leqslant f^0(w^0)+\psi^k$, $\psi^k\to0$, $k\to\infty$. Так как, к тому же, $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\in\mathcal{D}^{0\varepsilon^k}$, то из последних двух фактов заключаем, что последовательность $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, является минимизирующим приближенным решением и имеет место сходимость $w^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\to w^0$ при $k\to\infty$. В этом случае также выполняется и предельное соотношение (4.3). □

§ 5. Регуляризованный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления с фазовыми ограничениями в лебеговых пространствах

Как следует из теоремы 3, центральную роль при аппроксимации точного решения оптимизационной задачи (P^0) играют точки, минимизирующие ее функционал Лагранжа. С одной стороны, их можно приближенно находить на основе того или иного численного алгоритма, например градиентного типа, для организации которого может быть использована полученная в § 2 формула для производной Фреше (функционал Лагранжа). С другой стороны, для этой цели можно использовать и ПМП теоремы 1. Обозначим с этой целью через $W^\delta_{\max}[\lambda,\mu]$, $(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L_q^+(X)$, множество всех элементов $w\in\mathcal{D}$, для которых выполняются соотношения ПМП (2.1) теоремы 1 при указанных условиях на исходные данные задачи (P^0) и при дополнительном условии существования непрерывного по z градиента $\nabla_z\varphi_2^\delta(x,t,z)$. Так как функция Лагранжа является строго равномерно выпуклой по компоненте w при произвольной фиксированной паре двойственных переменных $(\lambda,\mu)\in L_q(X)\times L_q^+(X)$, то это множество состоит ровно из одной точки $w^\delta_{\max}[\lambda,\mu]$. Естественно, при указанных условиях на исходные данные задачи (P^0) и при дополнительном условии существования непрерывного по z градиента $\nabla_z\varphi_2^\delta(x,t,z)$ имеет место равенство $w^\delta_{\max}[\lambda,\mu]=w^\delta[\lambda,\mu]$. Применяя указанный принцип максимума, с учетом введенного обозначения, мы можем трансформировать регуляризованный ПЛ теоремы 3 в следующий регуляризованный ПМП в задаче (P^0).

Теорема 4. *Для того чтобы в задаче (P^0) существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $(\lambda^k,\mu^k)\in$ $\in L_q(X)\times L_q^+(X)$, $k=1,2,\ldots$, такая, что $\delta^k\left\|(\lambda^k,\mu^k)\right\|\to 0$, $k\to\infty$, и для элементов $w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]$, удовлетворяющих п. в. на S_T принципу максимума Понтрягина*

$$H_w(s,t,w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k](s,t),\eta^{\delta^k}[w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]](s,t))=\max_{w\in W}H_w(s,t,w,\eta^{\delta^k}[w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]](s,t)),$$

где $\eta^{\delta^k}[w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]]\in V_2^{1,0}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$ — решение сопряженной задачи

$$-\eta_t-\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i})+a^{\delta^k}(x,t)\eta=\lambda^k(x,t)\varphi_1^{\delta^k}(x,t)+\mu^k(x,t)\nabla_z\varphi_2^{\delta^k}(x,t,z^{\delta^k}[w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]]),$$

$$\eta(x,T)=0,\ x\in\Omega,\quad \frac{\partial\eta}{\partial\mathcal{N}}+\sigma^{\delta^k}(x,t)\eta=2A^{\delta^k}(s,t)z^{\delta^k}[w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]](s,t),\ (x,t)\in S_T,$$

выполняются предельные соотношения

$$w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{0\varepsilon^k},\ \varepsilon^k\to 0,\ k\to\infty,$$

$$\left\langle(\lambda^k,\mu^k),(g_1^{\delta^k}(w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k])-h^{\delta^k},g_2^{\delta^k}(w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]))\right\rangle\to 0,\ k\to\infty.$$

Последовательность $w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, является искомым минимизирующим приближенным решением, и в силу дифференцируемости по Фреше f^0 элементы $w^{\delta^k}_{\max}[\lambda^k,\mu^k]$ сильно сходятся при $\delta^k\to 0$ к w^0. В качестве последовательности (λ^k,μ^k), $k=1,2,\ldots$, может быть взята последовательность $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)},\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)})$, $k=1,2,\ldots$, генерируемая методом двойственной регуляризации теоремы 2 при $\delta=\delta^k$, $\delta^k\to 0$, $k\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
2. Сумин М.И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49. DOI: 10.7868/S0044466914010141
3. Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 11. С. 2001–2019.
4. Сумин М.И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
5. Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов: Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2009. 284 с.
6. Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
7. Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications // Applied Mathematics. 2012. Vol. 3. Issue 10. P. 1334–1350. DOI: 10.4236/am.2012.330190

8. Raymond J.-P., Zidani H. Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls // SIAM J. Control Optim. 1998. Vol. 36. Issue 6. P. 1853–1879. DOI: 10.1137/S0363012996302470
9. Casas E., Raymond J.-P., Zidani H. Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. Vol. 39. Issue 4. P. 1182–1203. DOI: 10.1137/S0363012998345627
10. Сумин М.И. Субоптимальное управление полулинейным эллиптическим уравнением с фазовым ограничением и граничным управлением // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 260–275.
11. Сумин М.И. Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 12. С. 2083–2102.
12. Сумин М.И. Регуляризованный секвенциальный принцип максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 130–133.
13. Сумин М.И. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управлении с фазовыми ограничениями // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ–2014). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 796–808.
14. Сумин М.И. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении распределенными системами // Динамика систем и процессы управления: Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 301–308.
15. Сумин М.И. Субдифференцируемость функций значений и регуляризация принципа максимума Понтрягина в оптимальном управлении распределенными системами // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1461–1477.
16. Сумин М.И. Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 231–240.
17. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
18. Сумин М.И. Двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с недифференцируемыми функционалами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 229–244.
19. Горшков А.А. О двойственной регуляризации в задаче выпуклого программирования в равномерно выпуклом пространстве // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 3 (1). С. 172–180.
20. Горшков А.А., Сумин М.И. Устойчивый принцип Лагранжа в секвенциальной форме для задачи выпуклого программирования в равномерно выпуклом пространстве и его приложения // Известия вузов. Математика. 2015. № 1. С. 14–28.
21. Горшков А.А. Регуляризованный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении для параболического уравнения с фазовыми ограничениями в лебеговых пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1104–1110.
22. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
23. Владимиров А.А., Нестеров Ю.Е., Чеканов Ю.Н. О равномерно выпуклых функционалах // Вестник Московского университета. Сер. вычислит. матем. и киберн. 1978. № 3. С. 12–23.
24. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
25. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
26. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. I: Basic Theory. Berlin: Springer, 2006. 595 p.

Поступила в редакцию 10.11.2016

Горшков Андрей Александрович, аспирант, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: tiger-nn@mail.ru

Сумин Михаил Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики и оптимального управления, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: m.sumin@mail.ru

A. A. Gorshkov, M. I. Sumin

Regularization of the Pontryagin maximum principle in the problem of optimal boundary control for a parabolic equation with state constraints in Lebesgue spaces

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 162–177 (in Russian).

Keywords: optimal boundary control, parabolic equation, sequential optimization, dual regularization, stability, pointwise state constraint in the Lebesgue space, Lagrange principle, Pontryagin's maximum principle.

MSC2010: 47A52

DOI: 10.20537/vm170202

A convex optimal control problem is considered for a parabolic equation with a strictly uniformly convex cost functional, with boundary control and distributed pointwise state constraints of equality and inequality type. The images of the operators that define pointwise state constraints are embedded into the Lebesgue space of integrable with s-th degree functions for $s \in (1, 2)$. In turn, the boundary control belongs to Lebesgue space with summability index $r \in (2, +\infty)$. The main results of this work in the considered optimal control problem with pointwise state constraints are the two stable, with respect to perturbation of input data, sequential or, in other words, regularized principles: Lagrange principle in nondifferential form and Pontryagin maximum principle.

REFERENCES

1. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* (Optimization methods), vols. 1, 2, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011, 620 p., 432 p.
2. Sumin M.I. Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, issue 1, pp. 22–44. DOI: 10.1134/S0965542514010138
3. Sumin M.I. A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, issue 11, pp. 1903–1921.
4. Sumin M.I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, issue 4, pp. 579–600. DOI: 10.1134/S0965542507040045
5. Sumin M.I. *Nekorrektnye zadachi i metody ikh resheniya. Materialy k lektsiyam dlya studentov starshikh kursov: Uchebnoe posobie* (Ill-posed problems and their solutions. Materials for lectures for senior students: Textbook), Nizhnii Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhnii Novgorod, 2009, 289 p.
6. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn-Tucker theorem in a Hilbert space, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, issue 9, pp. 1489–1509. DOI: 10.1134/S0965542511090156
7. Sumin M.I. On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications, *Applied Mathematics*, 2012, vol. 3, issue 10, pp. 1334–1350. DOI: 10.4236/am.2012.330190
8. Raymond J.-P., Zidani H. Pontryagin's principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls, *SIAM J. Control Optim.*, 1998, vol. 36, issue 6, pp. 1853–1879. DOI: 10.1137/S0363012996302470
9. Casas E., Raymond J.-P., Zidani H. Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints, *SIAM J. Control Optim.*, 2000, vol. 39, issue 4, pp. 1182–1203. DOI: 10.1137/S0363012998345627
10. Sumin M.I. Suboptimal control of a semilinear elliptic equation with a phase constraint and a boundary control, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, issue 2, pp. 281–300. DOI: 10.1023/A:1019226011838

11. Sumin M.I. Parametric dual regularization for an optimal control problem with pointwise state constraints, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, issue 12, pp. 1987–2005. DOI: 10.1134/S096554250912001X
12. Sumin M.I. Regularized sequential Pontryagin maximum principle in the convex optimal control with pointwise state constraints, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, issue 1 (39), pp. 130–133 (in Russian).
13. Sumin M.I. Stable sequential Pontryagin maximum principle in optimal control problem with state constraints, *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniya (VSPU–2014): Trudy* (Proc. XII All-Russia Conf. on Control Problems (RCCP–2014)), Moscow: Inst. of Control Problems, 2014, pp. 796–808 (in Russian).
14. Sumin M.I. Stable sequential Pontryagin maximum principle in optimal control for distributed systems, *Dinamika sistem i protsessy upravleniya: Trudy Mezhdunarodnoi konferentsii* (System dynamic and control processes: Proceedings of Int. Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of Academician N. N. Krasovskii), Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2015, pp. 301–308 (in Russian).
15. Sumin M.I. Subdifferentiability of value functions and regularization of Pontryagin maximum principle in optimal control for distributed systems, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 1461–1477 (in Russian).
16. Sumin M.I. On the stable sequential Lagrange principle in the convex programming and its applications for solving unstable problems, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 231–240 (in Russian).
17. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972, 531 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
18. Sumin M.I. Dual regularization and Pontryagin's maximum principle in a problem of optimal boundary control for a parabolic equation with nondifferentiable functionals, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 161–177. DOI: 10.1134/S0081543811090124
19. Gorshkov A.A. On dual regularization in convex programming in uniformly convex space, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo*, 2013, no. 3 (1), pp. 172–180 (in Russian).
20. Gorshkov A.A., Sumin M.I. The stable Lagrange principle in sequential form for the problem of convex programming in uniformly convex space and its applications, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, issue 1, pp. 11–23. DOI: 10.3103/S1066369X15010028
21. Gorshkov A.A. Regularized Pontryagin maximum principle in optimal control for a parabolic equation with phase constraints in Lebesgue spaces, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2015, vol. 20, issue 5, pp. 1104–1110 (in Russian).
22. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Providence, R.I.: AMS, 1968, 648 p.
23. Vladimirov A.A., Nesterov Yu.E., Chekanov Yu.N. On uniformly convex functionals, *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.*, 1978, no. 3, pp. 10–21.
24. Ekeland I., Temam R. *Convex analysis and variational problems*, SIAM, 1999, 402 p.
25. Aubin J.-P., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis*, New York: John Wiley and Sons, 1988, 584 p.
26. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and generalized differentiation. I: Basic Theory*, Berlin: Springer, 2006, 595 p.

Received 10.11.2016

Gorshkov Andrei Aleksandrovich, Postgraduate Student, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: tiger-nn@mail.ru

Sumin Mikhail Iosifovish, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics and Optimal Control, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: m.sumin@mail.ru