ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2017. Т. 27. Вып. 2

УДК 519.175, 519.115

© *Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов*

ОБ ОПОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ АЦИКЛИЧЕСКИХ И ТРАНЗИТИВНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В предыдущих работах авторов на множестве всех бинарных отношений множества X введено понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определена алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества X и из всех неупорядоченных пар смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф (граф бинарных отношений G). В настоящей работе для ациклических и транзитивных орграфов вводится понятие опорного множества: это совокупности $S(\sigma)$ и $S'(\sigma)$, состоящие из вершин орграфа $\sigma \in G$, имеющих нулевую полустепень захода и исхода соответственно. Доказано, что если G_σ — связная компонента графа G, содержащая ациклический или транзитивный орграф $\sigma \in G$, то $\{S(\tau) : \tau \in G_\sigma\} = \{S'(\tau) : \tau \in G_\sigma\}$. Получена формула для числа транзитивных орграфов, имеющих фиксированное опорное множество. Аналогичная формула для числа ациклических орграфов, имеющих фиксированное опорное множество, получена авторами ранее.

Ключевые слова: перечисление графов, ациклический орграф, транзитивный орграф.

DOI: 10.20537/vm170201

1. Граф бинарных отношений. Пусть $B \doteq \{0,1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Функции $X^2 \to B$ будем называть *характеристическими*. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma\colon\ X^2 \to B, \qquad \chi_\sigma(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x,y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее, функцию $\chi_\sigma(\cdot,\cdot)$ будем обозначать через $\sigma(\cdot,\cdot)$. С другой стороны, всякая характеристическая функция $\chi\colon\ X^2 \to B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x,y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x,y) = 1$. Отображение $\sigma \to \sigma(\cdot,\cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\operatorname{card} X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1).

Отношения $\sigma, \tau \subseteq X^2$ называются *смежными,* если существует дизъюнктное объединение двух подмножеств $X = Y \cup Z$ такое, что

$$\begin{gathered} \sigma(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y \times Z, \\ \tau(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Z \times Y, \\ \tau(x,y) + \sigma(y,x) = 1 \ \text{ для всех } (x,y) \in Y \times Z, \\ \sigma(x,y) = \tau(x,y) \ \text{ для всех } (x,y) \in Y^2 \cup Z^2. \end{gathered}$$

(Допускается, что $Y = \varnothing$ или $Z = \varnothing$; в обоих этих случаях $\sigma = \tau$.)

Смежность отношений σ и τ записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$. Например, для $X = \{1,2,3,4\}$ имеют место диаграммы

$$\boxed{\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 1&1&1&1\\ 1&1&0&1 \end{matrix}} \xleftrightarrow{\{1\}\times\{2,3,4\}} \boxed{\begin{matrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 0&1&0&1 \end{matrix}} \xleftrightarrow{\{2,4\}\times\{1,3\}} \boxed{\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&1&0&1 \end{matrix}} \xleftrightarrow{\{2,3\}\times\{1,4\}} \boxed{\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{matrix}}\,.$$

Таким образом, множество X порождает пару $\left\langle 2^{X^2}, E(X) \right\rangle$, где через 2^{X^2} обозначено множество вершин, состоящее из всех бинарных отношений множества X, а $E(X)$ — это множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар смежных бинарных отношений множества X (так как допускается, что $Y=\varnothing$, то множество $E(X)$ содержит все петли). Пару $G(X)\doteq\big\langle\, 2^{X^2}, E(X)\big\rangle$ будем называть (неориентированным) *графом бинарных отношений* множества X.

Если $\operatorname{card} X\neq 1$, то диаметр графа $G(X)$ равен 2 (см. [3]). Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данное отношение $\sigma\in 2^{X^2}$.

2. Арифметические свойства некоторых подграфов графа бинарных отношений. Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. Через $\mathcal{V}(X)$ обозначим совокупность всех рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве X. Через $\mathcal{A}(X)$, $\operatorname{card} X<\infty$, обозначим совокупность всех ациклических отношений (ациклических орграфов), определенных на множестве X.

Пусть отношения $\sigma,\tau\in 2^{X^2}$ смежны. Согласно [1–3] справедливо:

1) $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$ тогда и только тогда, когда $\tau\in\mathcal{V}_0(X)$;

2) $\sigma\in\mathcal{V}(X)$ тогда и только тогда, когда $\tau\in\mathcal{V}(X)$;

3) $\sigma\in\mathcal{A}(X)$ тогда и только тогда, когда $\tau\in\mathcal{A}(X)$.

Следовательно, в графе $\big\langle\, 2^{X^2}, E(X)\big\rangle$ определены подграфы

$$\big\langle\,\mathcal{V}_0(X), E(X)\big\rangle,\qquad \big\langle\,\mathcal{V}(X), E(X)\big\rangle,\qquad \big\langle\,\mathcal{A}(X), E(X)\big\rangle. \tag{1}$$

Далее, полагаем $\operatorname{card} X<\infty$ (считаем, что $X=\{1,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$). Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{V}_0^0(X)$ всех помеченных транзитивных орграфов, определенных на X (биекцию определяет процедура замены единичных элементов $\sigma(x,x)$ нулями); в свою очередь, существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{T}_0(X)$ всех помеченных T_0-топологий, определенных на X.

Пусть $T_0(n)\doteq\operatorname{card}\mathcal{V}_0(X)=\operatorname{card}\mathcal{V}_0^0(X)=\operatorname{card}\mathcal{T}_0(X)$. Дополнительно полагаем $T_0(0)\doteq 1$.

В [1] доказано, что количество компонент связности графа $\big\langle\,\mathcal{V}_0(X), E(X)\big\rangle$ равно $T_0(n-1)$.

Заметим, что для любого натурального n справедливы равенства

$$T_0(n) \;=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}\frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}\,V(p_1,\ldots,p_k),$$

$$T_0(n) \;=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(-1)^{n-k}\,\frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}\,W(p_1,\ldots,p_k), \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$. Первую формулу см. в [4–6], а вторую — в [7]. Числа $V(p_1,\ldots,p_k)$ и $W(p_1,\ldots,p_k)$ обозначают количество частичных порядков специального вида, зависящего от набора $(p_1,\ldots,p_k)$. (Определение чисел $V(p_1,\ldots,p_k)$ и $W(p_1,\ldots,p_k)$ см. ниже в пункте 4.)

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}(X)$ и множеством $\mathcal{T}(X)$ всех помеченных топологий, определенных на X.

Пусть $T(n)\doteq\operatorname{card}\mathcal{V}(X)=\operatorname{card}\mathcal{T}(X)$. В силу [4, 8, 9] имеет место равенство

$$T(n)=\sum_{m=1}^{n}S(n,m)\,T_0(m),$$

где $S(n,m)$ — это числа Стирлинга 2-го рода. Согласно [2] количество компонент связности графа $\big\langle\,\mathcal{V}(X), E(X)\big\rangle$ равно

$$\sum_{m=1}^{n}S(n,m)\,T_0(m-1).$$

Пусть $A_n\doteq\operatorname{card}\mathcal{A}(X)$. Согласно [10] имеет место равенство

$$A_n \;=\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(-1)^{n-k}\,\frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}\,2^{\,(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/\,2}, \tag{3}$$

а в силу [3] количество компонент связности графа $\langle\, \mathcal{A}(X), E(X) \rangle$ равно

$$\sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k}\, \frac{(n-1)!}{(p_1-1)!\,p_2!\ldots p_k!}\, 2^{\,(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/\,2}. \tag{4}$$

(В обоих случаях суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел, таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$.)

Замечание 1. В работе [10] доказаны следующие (более общие) утверждения. Обозначим через $A_n(x) \doteq \sum_r A_{nr}x^r$ многочлен, у которого коэффициент A_{nr} равен числу помеченных ациклических орграфов порядка n, имеющих ровно r дуг. Ясно, что $A_n = A_n(1)$. Используем соглашение $A_0(x)=A_0=1$. Многочлен $A_n(x)$ при $n\in\mathbb{N}$ задается формулой

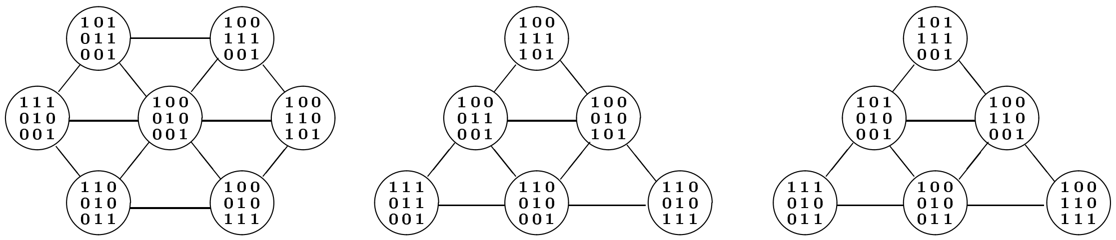
$$A_n(x) \;=\; \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}\,(\,1+x\,)^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}$$

(ср. с формулой (3)). Для любого $n\geqslant 0$ имеет место тождество

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m}\,(\,1+x\,)^{m\,(n-m)}\,A_m(x) = \delta_{n0}.$$

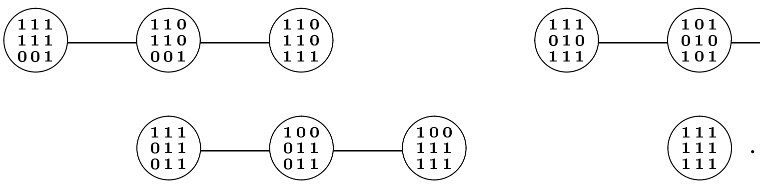
Замечание 2. Числа (4) входят в совокупность $\{\,A_n^{(p)}\,\}$ при $p=1$ (см. пункт 7).

3. Примеры подграфов графа бинарных отношений. Пусть $X=\{1,2,3\}$. Ниже представлены 3 компоненты связности графа $\langle\, \mathcal{V}_0(X), E(X) \rangle$, содержащие 19 частичных порядков:



(5)

Граф $\langle\, \mathcal{V}(X), E(X) \rangle$ содержит 29 рефлексивно-транзитивных отношений. В нем имеется 7 компонент связности: 3 компоненты графа (5) и компоненты



Граф $\langle\, \mathcal{A}(X), E(X) \rangle$ содержит 25 ациклических отношений. В нем имеется 5 компонент связности: 3 компоненты вида (5) (в них следует заменить элементы множества $\mathcal{V}_0(X)$ на элементы множества $\mathcal{V}_0^0(X)$) и компоненты

(6)

При $X = \{1,2,3,4\}$ в графах (1) имеется 219, 355 и 543 вершин соответственно, а количество связных компонент равно 19, 45 и 79 соответственно.

4. Определение чисел $W(p_1,\dots,p_k)$ и $V(p_1,\dots,p_k)$. Зафиксируем $(p_1,\dots,p_k) \in \mathbb{N}^k$, и пусть $n \doteq p_1+\dots+p_k$, $X \doteq \{1,\dots,n\}$. Набор $(p_1,\dots,p_k)$ будем называть *разбиением* числа n. Разбиению $(p_1,\dots,p_k)$ соответствует представление отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в блочном виде

$$\left|\begin{array}{cccc} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \dots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \dots & \sigma^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \dots & \sigma^{kk} \end{array}\right|, \tag{7}$$

в котором на пересечении i-й горизонтальной и j-й вертикальной полос стоит блок σ^{ij} с p_i строками и p_j столбцами. Запись отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в виде (7) будем называть блочным представлением *типа* $(p_1,\dots,p_k)$.

Через $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (7) типа $(p_1,\dots,p_k)$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1,\dots,k$, — единичные матрицы,

и пусть $W(p_1,\dots,p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$.

Через $\mathcal{V}(p_1,\dots,p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$ таких, что в блочном представлении (7) типа $(p_1,\dots,p_k)$ в наддиагональных блоках $\sigma^{i-1,i}$, $i = 2,\dots,k$, в каждом столбце имеется хотя бы одна единица (называем такие блоки *невырожденными*). Заметим, что в силу транзитивности σ все блоки σ^{sr}, $s = 1,\dots,k-1$, $r = s+1,\dots,k$, невырожденные. Применяем обозначение $V(p_1,\dots,p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{V}(p_1,\dots,p_k)$.

5. Сопоставление формул (2) и (3). Включение $\mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$ хорошо известно, причем формулы (2) и (3) для вычисления чисел $\operatorname{card} \mathcal{V}_0^0(X)$ и $\operatorname{card} \mathcal{A}(X)$ имеют одинаковую структуру. Однако если во втором случае формула имеет завершенный вид, то в первом сохраняется проблема вычисления чисел $W(p_1,\dots,p_k)$. В рамках исследований данной проблемы в работах [7, 11] получены семейства уравнений связи между отдельными числами $W(p_1,\dots,p_k)$:

$$W(p_{\pi(1)},\dots,p_{\pi(k)}) = W(p_1,\dots,p_k), \qquad \pi \in D_k,$$

где D_k — группа диэдра, порожденная подстановками $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & k\!-\!1 & k \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & k\!-\!1 & k \\ k & k\!-\!1 & \dots & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\sum_{q_1+\dots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\dots q_r!} W(p+1,q_1,\dots,q_r) = \\ = \sum_{q_1+\dots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\dots q_r!} (r+1)\, W(p,q_1,\dots,q_r),$$

$$W(p,1,q,1) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \left(2^{q-r}+1\right)^p W(p,r,1) + \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \left(2^{p-r}+1\right)^q W(r,q,1).$$

Формулы $W(n) = 1$, $W(p,q) = 2^{pq}$ очевидны. В [11] доказаны следующие явные формулы:

$$W(p,1,q) = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} \left(2^r + 2^q\right)^p,$$

$$W(p,2,q) = \sum_{q_1+\dots+q_4=q} \frac{q!}{q_1!\dots q_4!} \left(2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^{q_1+q_3} + 2^q\right)^p,$$

$$W(p,1,1,q) - W(p,2,q) = \sum_{q_1+q_2+q_3=q} \frac{q!}{q_1!\,q_2!\,q_3!} \left(2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^q\right)^p.$$

Перечисленные соотношения позволяют вычислить числа $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 7$ (без применения ЭВМ, за счет решения системы линейных уравнений относительно величин $W(p_1,\dots,p_k)$). В [11] отмечено, что для вычисления числа $T_0(8)$ данных соотношений не достаточно (не хватает всего трех уравнений относительно величин $W(p_1,\dots,p_k)$, порождающих требуемый ранг матрицы системы). Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности, генерирующей новые уравнения связи. Заметим еще, что благодаря разработке эффективных алгоритмов компьютерных вычислений [12] в настоящее время известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 18$.

6. Опорные множества ациклических и транзитивных орграфов. Для любого ациклического орграфа $\sigma \in \mathcal{A}(X)$, $\operatorname{card} X < \infty$, определены непустые *опорные множества*

$$S(\sigma) \doteq \{y \in X\colon \sigma(x,y) = 0 \text{ для всех } x \in X\},$$

$$S'(\sigma) \doteq \{x \in X\colon \sigma(x,y) = 0 \text{ для всех } y \in X\}$$

и определены семейства опорных множеств

$$S(G_\sigma) \doteq \{S(\tau) \subseteq X\colon \tau \in G_\sigma(X)\}, \qquad S'(G_\sigma) \doteq \{S'(\tau) \subseteq X\colon \tau \in G_\sigma(X)\},$$

где $G_\sigma(X)\ \big(= G_\sigma\big)$ — связная компонента графа $G(X)$, содержащая σ. Легко заметить, что множества $S(\sigma)$ и $S'(\sigma)$ — это совокупности вершин орграфа $\sigma \in \mathcal{A}(X)$, имеющих нулевую полустепень захода и исхода соответственно.

Пусть $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ и $\pi, \varrho \in G_\sigma(X)$. Согласно [3] справедливы следующие утверждения:

1) $S(\pi) = S(\varrho)$ тогда и только тогда, когда $\pi = \varrho$;

2) для любого непустого подмножества $S \subseteq S(\varrho)$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = S$, причем τ смежно с ϱ.

Кроме того, для любого $x \in X$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{\,x\,\}$. Если же $\sigma \in \mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$, то для любых $x, y \in X$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{\,x, y\,\}$ (см. [1]).

Таким образом, при $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ совокупность $S(G_\sigma)$ является специфическим частично упорядоченным множеством относительно естественного отношения включения множеств. Специфика заключается в том, что вместе с каждым элементом семейство $S(G_\sigma)$ содержит все непустые подмножества этого элемента, а кроме того, $S(G_\sigma)$ содержит все одноэлементные подмножества множества X. Более того, если $\sigma \in \mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$, то семейство $S(G_\sigma)$ содержит в обязательном порядке все двухэлементные подмножества множества X. Последнее обстоятельство может сыграть существенную роль в процессе получения родственных (но сепаратных) арифметических свойств множеств $\mathcal{V}_0^0(X)$ и $\mathcal{A}(X)$. (Родственный характер арифметических свойств этих множеств мы уже отмечали в пункте 5; см. также формулы пункта 7.)

Процедура транспонирования матриц $\sigma(x,y) \to \sigma^\top(x,y)$ порождает для множеств $S'(\sigma)$ и $S'(G_\sigma)$ утверждения, аналогичные отмеченным выше.

Теорема 1. *Для любого $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ справедливо равенство $S(G_\sigma) = S'(G_\sigma)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varrho \in G_\sigma$ определены множества $Z \doteq S(\varrho) \in S(G_\sigma)$ и $Y \doteq X \backslash Z$, причем $\varrho(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in X \times Z = Z^2 \cup (Y \times Z)$. Следовательно, определено отношение $\tau \in G_\sigma$ такое, что $\varrho \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$, причем $\tau(x,y) = \varrho(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Z^2$ и $\tau(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Z \times Y$. Другими словами, $\tau(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Z \times X$, поэтому $Z \subseteq S'(\tau) \in S'(G_\sigma)$, и, значит, существует отношение $\pi \in G_\sigma$ такое, что $Z = S'(\pi) \in S'(G_\sigma)$. Таким образом, имеет место импликация $Z \in S(G_\sigma) \Longrightarrow Z \in S'(G_\sigma)$, то есть $S(G_\sigma) \subseteq S'(G_\sigma)$. Обратное включение доказывается симметричным образом. $\square$

Анализ структуры частично упорядоченного множества $S(G_\sigma)\ \big(= S'(G_\sigma)\big)$ показывает, что для его описания достаточно указать все его максимальные элементы. Так, если в диаграмме (5) заменить элементы множества $\mathcal{V}_0(X)$ на элементы множества $\mathcal{V}_0^0(X)$ (заменив единичные элементы $\sigma(x,x)$ нулями), то в семействе опорных множеств первой компоненты графа $\big\langle\, \mathcal{V}_0^0(X), E(X)\big\rangle$ имеется единственный максимальный элемент $\{\,1,2,3\,\}$, а во второй и третьей компонентах максимальными являются множества $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$. В диаграмме (6) в обеих компонентах максимальными являются множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

7. Число транзитивных и ациклических орграфов, имеющих фиксированное опорное множество. Пусть $(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2$, $p\doteq p_1$, $m\doteq p_2$,

$$X\doteq\{1,\dots,p+m\},\quad M\doteq\{p+1,\dots,p+m\}.$$

Через $\mathcal{W}(p;m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (7) типа (p_1,p_2)

1) диагональный блок σ^{11} — единичная матрица,

2) блок σ^{21} состоит из нулей,

3) диагональный блок σ^{22} — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$),

и пусть $W(p;m)\doteq\operatorname{card}\mathcal{W}(p;m)$. Дополнительно полагаем

$$W(0;m)=T_0(m),\quad m=0,1,\dots,\qquad W(p;0)=1,\quad p=0,1,\dots. \tag{8}$$

Через $\mathcal{V}(p,m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma\in\mathcal{W}(p,m)$ таких, что в блочном представлении (7) типа (p_1,p_2) $\big(=(p,m)\big)$ блок σ^{12} невырожденный. Применяем обозначение $V(p;m)\doteq\operatorname{card}\mathcal{V}(p;m)$ и полагаем, по определению,

$$V(0;m)=\delta_{0m},\quad m=0,1,\dots,\qquad V(p;0)=1,\quad p=0,1,\dots. \tag{9}$$

Для отношений $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$ (у которых, в отличие от отношений из $\mathcal{V}_0^0(X)$, для всех $x\in X$ справедливо $\sigma(x,x)=1$) опорными множествами называем совокупности

$$S(\sigma)\doteq\{\,y\in X\colon\ \sigma(x,y)=\delta_{xy}\ \text{для всех}\ x\in X\,\},$$

$$S'(\sigma)\doteq\{\,x\in X\colon\ \sigma(x,y)=\delta_{xy}\ \text{для всех}\ y\in X\,\}.$$

Понятно, что совокупность $\mathcal{V}(p,m)$ совпадает с множеством всех тех отношений $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$, у которых $S(\sigma)=\{1,\dots,p\}$.

Лемма 1. *Для целых $p\geqslant 0$ и $m\geqslant 0$ справедливы равенства*

$$W(p;m)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}V(p+r;m-r), \tag{10}$$

$$V(p;m)=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}W(p+r;m-r). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $p\geqslant 1$, $m\geqslant 1$. Легко заметить, что если $\sigma\in\mathcal{W}(p;m)$, то множество $P\doteq\{1,\dots,p\}$ содержится в опорном множестве $S(\sigma)$. Для любого $\alpha\subseteq M$ через $\mathcal{W}_\alpha(p;m)$ обозначим множество всех тех отношений $\sigma\in\mathcal{W}(p;m)$, у которых $S(\sigma)=P\cup\alpha$, разбив, таким образом, множество $\mathcal{W}(p;m)$ на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{W}_\alpha(p;m)$. Следовательно,

$$W(p;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}(p;m)=\sum_{\alpha\subseteq M}\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(p;m).$$

Очевидно, при $\alpha=\varnothing$ справедливы равенства $\mathcal{W}_\varnothing(p;m)=\mathcal{V}(p;m)$ и $\operatorname{card}\mathcal{W}_\varnothing(p;m)=V(p;m)$. Также легко понять, что если непустые $\alpha,\beta\subseteq M$ таковы, что $|\alpha|=|\beta|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(p;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}_\beta(p;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}_\gamma(p;m),$$

где $\gamma\doteq\{\,p+1,\dots,p+r\,\}\subseteq M$, $r\doteq|\alpha|=|\beta|\in[1,m]$. Так как для всех $\sigma\in\mathcal{W}_\gamma(p;m)$ имеет место равенство $S(\sigma)=\{1,\dots,p+r\}$, то $\mathcal{W}_\gamma(p;m)=\mathcal{V}(p+r;m-r)$, поэтому

$$\operatorname{card}\mathcal{W}_\gamma(p;m)=V(p+r;m-r),$$

что и доказывает равенство (10). При введенных соглашениях (8), (9) легко проверить, что равенство (10) имеет место также при $p=0$ и при $m=0$.

Обозначим через Δ правую часть формулы (11), тогда в силу (10) справедливо равенство

$$\Delta=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}\sum_{s=0}^{m-r}\binom{m-r}{s}V(p+r+s\,;m-r-s).$$

Заменив индекс s на $t=r+s$ и поменяв порядок суммирования, получим цепочку равенств

$$\Delta=\sum_{t=0}^{m}\Bigl[\sum_{r=0}^{t}(-1)^r\binom{t}{r}\Bigr]\binom{m}{t}V(p+t\,;m-t)=\sum_{t=0}^{m}\delta_{t0}\binom{m}{t}V(p+t\,;m-t)=V(p;m).$$

Лемма 2. *Для целых $p\geqslant 1$ и $m\geqslant 0$ справедливо равенство*

$$V(p;m)=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=p+m\\ p_1\geqslant p}}(-1)^{m+1-k}\frac{m!}{(p_1-p)!\,p_2!\ldots p_k!}\,W(p_1,\ldots,p_k).$$

Доказательство. Пусть $m\geqslant 1$. В силу (11) справедливо равенство

$$V(p;m)=(-1)^m+\sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q\binom{m}{q}W(p+q;m-q).$$

В соответствии с леммой 3 [7] для всех $q=0,1,\ldots,m-1$ имеет место равенство

$$W(p+q;m-q)=\sum_{q_1+\ldots+q_r=m-q}(-1)^{m-q-r}\frac{(m-q)!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(p+q,q_1,\ldots,q_r),$$

следовательно,

$$V(p;m)-(-1)^m=\sum_{q=0}^{m-1}(-1)^q\binom{m}{q}\sum_{q_1+\ldots+q_r=m-q}(-1)^{m-q-r}\frac{(m-q)!}{q_1!\ldots q_r!}\,W(p+q,q_1,\ldots,q_r)=$$

$$=\sum_{\substack{q+q_1+\ldots+q_r=m\\ 0\leqslant q<m}}(-1)^{m-r}\frac{m!}{q!\,q_1!\ldots q_r!}\,W(p+q,q_1,\ldots,q_r).$$

Перешли к суммированию по всем переменным одновременно. Пусть $q_0\doteq p+q$, тогда

$$V(p;m)-(-1)^m=\sum_{\substack{q_0+q_1+\ldots+q_r=p+m\\ p\leqslant q_0<p+m}}(-1)^{m-r}\frac{m!}{(q_0-p)!\,q_1!\ldots q_r!}\,W(q_0,q_1,\ldots,q_r).$$

Доказательство завершает замена переменных $k=r+1$, $p_i=q_{i-1}$, $i=1,\ldots,k$. Случай $m=0$ справедлив в силу соглашений (9). □

Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $p=1,\ldots,n$ через $A_n^{(p)}$ $\bigl($через $T_0^{(p)}(n)\bigr)$ обозначим количество всех помеченных ациклических орграфов $\sigma\in\mathcal{A}(X)$ (соответственно помеченных транзитивных орграфов $\sigma\in\mathcal{V}_0^0(X)$), определенных на множестве $X=\{1,\ldots,n\}$ и таких, что $S(\sigma)=\{1,\ldots,p\}$. Понятно, что $T_0^{(p)}(n)=V(p;n-p)$. Таким образом, в силу леммы 2 имеет место

Теорема 2. *Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $p=1,\ldots,n$ справедливы равенства*

$$T_0^{(p)}(n)=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n\\ p_1\geqslant p}}(-1)^{n-p+1-k}\frac{(n-p)!}{(p_1-p)!\,p_2!\ldots p_k!}\,W(p_1,\ldots,p_k),$$

$$A_n^{(p)}=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_k=n\\ p_1\geqslant p}}(-1)^{n-p+1-k}\frac{(n-p)!}{(p_1-p)!\,p_2!\ldots p_k!}\,2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}.$$

Вторая формула доказана в лемме 4 [3] (ср. также с выражением (4)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф частичных порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 3–12. DOI: 10.20537/vm130401
2. Аль Джабри Х.Ш. Граф рефлексивно-транзитивных отношений и граф конечных топологий // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 3–11. DOI: 10.20537/vm150101
3. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф ациклических орграфов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 441–452. DOI: 10.20537/vm150401
4. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. 1966. Vol. 262. P. A1091–A1094.
5. Erne M. Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen // Manuscripta Math. 1974. Vol. 11. No. 3. P. 221–259. DOI: 10.1007/BF01173716
6. Боревич З.И. К вопросу перечисления конечных топологий // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 47–65.
7. Родионов В.И. О перечислении частичных порядков, определенных на конечном множестве // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 318–330. DOI: 10.17377/semi.2016.13.026
8. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ACM. 1967. Vol. 10. Issue 5. P. 295–297. DOI: 10.1145/363282.363311
9. Gupta H. Number of topologies on a finite set // Research Bulletin of the Panjab University (N.S.). 1968. Vol. 19. P. 231–241.
10. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs // Discrete Mathematics. 1992. Vol. 105. No. 1–3. P. 319–321. DOI: 10.1016/0012-365X(92)90155-9
11. Родионов В.И. Об одном рекуррентном соотношении в задаче перечисления конечных частичных порядков // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 98–111. DOI: 10.17377/semi.2017.14.011
12. Brinkmann G., McKay B.D. Posets on up to 16 points // Order. 2002. Vol. 19. Issue 2. P. 147–179. DOI: 10.1023/A:1016543307592

Поступила в редакцию 01.02.2017

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, к. ф.-м. н., преподаватель, Аль Кадисия университет, Ирак, г. Аль Дивания, ул. Вавилония, 29.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., зав. кафедрой, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov

On support sets of acyclic and transitive digraphs

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 153–161 (in Russian).

Keywords: enumeration of graphs, acyclic digraph, transitive digraph.

MSC2010: 05C30

DOI: 10.20537/vm170201

In previous works of the authors, the concept of a binary reflexive adjacency relation was introduced on the set of all binary relations of the set X, and an algebraic system consisting of all binary relations of the set X and of all unordered pairs of adjacent binary relations was defined. If X is a finite set, then this algebraic system is a graph (graph of binary relations G). The current paper introduces the notion of a support set for acyclic and transitive digraphs. This is the collections $S(\sigma)$ and $S'(\sigma)$ consisting of the vertices of the digraph $\sigma \in G$ that have zero indegree and zero outdegree, respectively. It is proved that if G_σ is a connected component of the graph G containing the acyclic or transitive digraph $\sigma \in G$, then $\{S(\tau) : \tau \in G_\sigma\} = \{S'(\tau) : \tau \in G_\sigma\}$. A formula for the number of transitive digraphs having a fixed support set is obtained. An analogous formula for the number of acyclic digraphs having a fixed support set was obtained by the authors earlier.

REFERENCES

1. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of partial orders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, issue 4, pp. 3–12 (in Russian). DOI: 10.20537/vm130401
2. Al' Dzhabri Kh.Sh. The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 3–11 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150101
3. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of acyclic digraphs, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 4, pp. 441–452 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150401
4. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini, *C. R. Acad. Sci.*, 1966, vol. 262, pp. A1091–A1094.
5. Erne M. Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen, *Manuscripta Math.*, 1974, vol. 11, no. 3, pp. 221–259. DOI: 10.1007/BF01173716
6. Borevich Z.I. Enumeration of finite topologies, *J. Sov. Math.*, 1982, vol. 20, issue 6, pp. 2532–2545. DOI: 10.1007/BF01681470
7. Rodionov V.I. On enumeration of posets defined on finite set, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 318–330 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2016.13.026
8. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies, *Comm. ACM*, 1967, vol. 10, issue 5, pp. 295–297. DOI: 10.1145/363282.363311
9. Gupta H. Number of topologies on a finite set, *Research Bulletin of the Panjab University (N.S.)*, 1968, vol. 19, pp. 231–241.
10. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs, *Discrete Mathematics*, 1992, vol. 105, no. 1–3, pp. 319–321. DOI: 10.1016/0012-365X(92)90155-9
11. Rodionov V.I. On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 98–111 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2017.14.011
12. Brinkmann G., McKay B.D. Posets on up to 16 points, *Order*, 2002, vol. 19, issue 2, pp. 147–179. DOI: 10.1023/A:1016543307592

Received 01.02.2017

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, Candidate of Physics and Mathematics, Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the Department, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru