УДК 514.174.3

© *В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев*

АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВ НА ПЛОСКОСТИ $\mathbb{R}^2$ [1]

Изучается задача об оптимальном покрытии выпуклых множеств на плоскости объединением заданного числа n кругов одинакового радиуса. Критерий оптимальности заключается в минимизации радиуса кругов, что позволяет свести задачу оптимизации к задаче построения наилучшей чебышёвской n-сети выпуклого множества. В работе предложены и обоснованы численные методы, базирующиеся на разбиении множества на области Дирихле и отыскании так называемых характерных точек. Одним из ключевых элементов методов является построение чебышёвского центра компактного выпуклого множества. Представлены стохастические алгоритмы генерации начального положения точек n-сети. Проведено моделирование ряда примеров и выполнена визуализация построенных покрытий.

Ключевые слова: покрытие кругами, наилучшая чебышёвская сеть, чебышёвский центр, зона Дирихле, характерные точки, замкнутая кривая.

DOI: 10.20537/vm160212

Введение

В настоящей работе изучается задача об оптимальном покрытии выпуклых компактных множеств в $\mathbb{R}^2$ объединением n кругов одинакового радиуса. Эта задача относится к широкому классу задач аппроксимации множеств в евклидовых пространствах. Многие из этих задач возникают в теории оптимального управления и теории дифференциальных игр [1] при разработке алгоритмов построения множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем и дифференциальных включений, а также при разработке алгоритмов построения максимальных стабильных мостов в дифференциальных играх — так называемых множеств разрешимости в соответствующих задачах дифференциальных игр [2]. При этом алгоритмы аппроксимации являются одними из ключевых в процедурах построения решений задач теории оптимального управления и теории дифференциальных игр. Другой важной областью математики, в которой задачи и алгоритмы аппроксимации играют ключевую роль, является теория распознавания образов [3]. Кратко отметим те задачи аппроксимации, которые актуальны в теории оптимального управления, дифференциальных игр и теории распознавания образов. Так, в работах А. Б. Куржанского, Ф. Л. Черноусько и их сотрудников, относящихся к вычислению множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем, в задачах управления аппроксимации множеств осуществляются с использованием эллипсоидов и параллелепипедов [4, 5]. При этом разработана содержательная и эффективная теория эллипсоидальной аппроксимации множеств. В работах [6, 7] рассматриваются пиксельные аппроксимации множеств достижимости управляемых систем, предложены алгоритмы пиксельной аппроксимации и получены оценки, обосновывающие корректность этих алгоритмов. В работе [8] рассматриваются алгоритмы оптимизации хаусдорфова расстояния между выпуклыми многогранниками в конечномерном евклидовом пространстве. Эти алгоритмы базируются на использовании конструкций субдифференциала и субградиентных методов.

Отметим, что задача об оптимизации покрытий и соответствующий алгоритм, рассматриваемые в настоящей статье и восходящие к работам А. Л. Гаркави [9, 10], А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова [11, 12], В. С. Брусова и С. Л. Пиявского [13, 14], Ш. И. Галиева [15], дополняют хорошо известные упомянутые выше методы и алгоритмы аппроксимации компактных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект 15–11–10018).

множеств в евклидовых пространствах. Особенностью этой работы является то, что в отличие от предыдущих работ авторов, посвященных тематике, в ней рассматриваются выпуклые множества в плоскости $\mathbb{R}^2$, не являющиеся, вообще говоря, классическими геометрическими фигурами (кругами, треугольниками, многоугольниками). Эта особенность работы приводит к использованию оригинальных алгоритмов аппроксимации.

§ 1. Постановка задачи

Задача 1. Пусть заданы выпуклое множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ и $n \in \mathbb{N}$. В пространстве $\mathbb{R}^2$ требуется выделить набор для кругов $O(\mathbf{z}^{(i)}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\mathbf{x}-\mathbf{z}^{(i)}\|\} \leqslant r$, $i = \overline{1,n}$, наименьшего радиуса $r > 0$, удовлетворяющий включению

$$M \subseteq \bigcup_{i=\overline{1,n}} O(\mathbf{z}^{(i)}, r).$$

Здесь $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ — метрическое пространство компактов в $\mathbb{R}^2$ с хаусдорфовой метрикой, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд чисел, $\|\mathbf{h}\|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{h}$ в $\mathbb{R}^2$.

Ранее авторами в работах [8, 16] рассматривались в основном вопросы, относящиеся к оптимальному покрытию выпуклых многоугольников, однако в различных задачах теории управления и теории дифференциальных игр возникают вопросы, связанные с аппроксимацией выпуклых множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$, не являющихся многоугольниками. Эти множества могут иметь границу, составленную, например, из конечного числа гладких кривых в $\mathbb{R}^2$. В настоящей работе рассматриваются именно множества последнего типа, для которых решение задачи 1 обладает своей спецификой. Отметим, что покрытия фигур в $\mathbb{R}^2$ с криволинейной границей исследовались К. Бездеком [17] и Х. Мелиссеном [18].

Для последующих рассуждений нам необходимо привести следующие хорошо известные определения.

Определение 1. Пусть A и B — элементы пространства $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$. *Хаусдорфовым отклонением* A от B [19] называется величина

$$h(A, B) = \max\{\rho(\mathbf{a}, B) \colon \mathbf{a} \in A\}.$$

Здесь $\rho(\mathbf{a}, B) = \min\{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \colon \mathbf{b} \in B\}$.

Определение 2. *Чебышёвским центром* [20] множества $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ называется точка $\mathbf{c}(M)$, удовлетворяющая равенству

$$h(M, \{\mathbf{c}(M)\}) = \min\{h(M, \{\mathbf{x}\}) \colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Для любого $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ чебышёвский центр $\mathbf{c}(M)$ существует, является единственным и $\mathbf{c}(M) \in \mathrm{co}\, M$ [20] (где $\mathrm{co}(\cdot)$ означает выпуклую оболочку множества).

Определение 3. *Чебышёвским радиусом* $r(M)$ множества $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ называется величина $h\left(M, \{\mathbf{c}(M)\}\right)$.

Определение 4. На плоскости $\mathbb{R}^2$ *n-сетью* [9] называется непустое множество, состоящее не более чем из n точек в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим через Σ_n множество всех n-сетей пространства $\mathbb{R}^2$.

Определение 5. n-сеть S^* называется *наилучшей n-сетью множества* $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$, если

$$h(M, S^*) = \min\{h(M, S) \colon S \in \Sigma_n\}.$$

Решение задачи 1 во введенных терминах можно свести к отысканию наилучшей n-сети S_n множества $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$. Точки сети S_n служат центрами кругов $O(\mathbf{z}^{(i)}, r)$, $i = \overline{1, n}$, при этом $r = h(M, S_n)$.

В работах [9, 10] доказано существование наилучшей n-сети для произвольного множества $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$, здесь $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^2$ с хаусдорфовой метрикой.

В общем случае $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ наилучшая n-сеть не единственна, а ее структура сложная; в частности, некоторые точки $\mathbf{z}^{(i)} \in S_n$ могут не принадлежать M. Однако если M — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$, то как минимум для одной наилучшей n-сети выполняется включение $S_n \subset M$ (см. [16]). Поэтому при решении задачи 1 мы можем ограничиться рассмотрением n-сетей, вложенных в M.

§ 2. Алгоритм решения задачи 1

В этом параграфе представлен итерационный алгоритм решения задачи 1 и даны некоторые пошаговые оценки качества работы алгоритма (см. теорему 1). Отметим, что уже ранее в работах [8,16] были представлены итерационные алгоритмы (схожие с алгоритмом A1 из работы [15]), использующие методы вычислительной геометрии и локальной оптимизации. Некоторые основные компоненты алгоритмов описаны в [13,14] и развиты с применением современных вычислительных технологий. Основным нововведением, по сравнению с разработанными ранее авторами схемами, стала подмена частей множества M объединениями конечного числа точек. Кроме того, применены более экономичные методы вычисления координат точек новой чебышёвской n-сети при заданном разбиении фигуры.

Приведем некоторые необходимые для описания итерационного алгоритма решения задачи 1 определения.

Определение 6. *Ячейкой Вороного* [3, гл. 3] точки $\mathbf{z}^{(i)} \in S_n$ n-сети S_n называется множество

$$W_i(S_n) = \Big\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\mathbf{w} - \mathbf{z}^{(i)}\| = \min\{\|\mathbf{w} - \mathbf{z}^{(j)}\| \colon \mathbf{z}^{(j)} \in S_n\}\Big\}. \tag{2.1}$$

Определение 7. Пусть заданы $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$ и n-сеть S_n. *Областью Дирихле* [13, с. 305] точки $\mathbf{z}^{(i)} \in S_n$ в множестве M называется подмножество $D_i(M, S_n) = M \cap W_i(S_n)$.

Используемый в настоящей работе алгоритм для построения аппроксимаций наилучшей n-сети основан на итерационной замене точек на чебышёвские центры соответствующих областей Дирихле. А именно, пусть на k-м шаге итераций построена некоторая n-сеть $S_n^{(k)} \subset M$, состоящая из точек $\mathbf{z}_k^{(i)}, i = \overline{1, n}$. Точки новой чебышёвской n-сети $S_n^{(k+1)} \subset M$ вычисляются в соответствии с алгоритмом

$$\mathbf{z}_k^{(i)} = \mathbf{c}\big(D_i(M, S_n^{(k)})\big),\ i = \overline{1, n}. \tag{2.2}$$

Как нетрудно убедиться (см. [8]),

$$h(M, S_n^{(k+1)}) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} r\big(D_i(M, S_n^{(k)})\big) \leqslant h(M, S_n^{(k)}). \tag{2.3}$$

При применении алгоритма к выпуклым множествам M в $\mathbb{R}^2$ с границей, имеющей нетривиальное описание, важно оценить качество работы алгоритма. В частности, важно показать, насколько применение формулы (2.2) уменьшает хаусдорфово отклонение $h(M, S_n^{(k)})$ множества M от чебышёвской n-сети с переходом от номера k к $(k+1)$. Конечно, в идеале хотелось бы оценить скорость сходимости алгоритма хотя бы для некоторых множеств M в $\mathbb{R}^2$ с достаточно простой геометрией. Однако пока это сделать не удается, и эта задача оценки скорости сходимости алгоритма остается в повестке дня.

Итак, сформулируем следующее утверждение, дающее некоторую пошаговую оценку сверху аппроксимации последовательности $\{h(M, S_n^{(k)})\}$.

Теорема 1. *Пусть заданы выпуклое множество* $M \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^2)$ *и* n*-сеть* $S_n^{(k)} \subset M$, *представляющая собой* k*-ю итерацию, реализовавшуюся в ходе работы алгоритма. Тогда для сети* $S_n^{(k+1)}$ *выполняется оценка*

$$h(M, S_n^{(k+1)}) \leqslant h(M, S_n^{(k)}) - (\sqrt{2}-1)\frac{\left(\min\left\{\|\mathbf{z}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{z}_k^{(i)}\| \colon i = \overline{1,n}\right\}\right)^2}{h(M, S_n^{(k)})}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную область Дирихле $D_i(M, S_n^{(k)})$, соответствующую произвольно выбранному k при произвольном $i \in \overline{1,n}$. Обозначим $d_i = \|\mathbf{z}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{z}_k^{(i)}\|$, $r_i = r(D_i(M, S_n^{(k)}))$. Заметим, что из условия $S_n^{(k)} \subset M$ следует, что точка $\mathbf{z}_k^{(i)} \in D_i(M, S_n^{(k)})$ и, значит,

$$d_i \leqslant r_i. \tag{2.5}$$

Докажем оценку

$$h(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}) \geqslant r_i + \frac{d_i^2}{(1+\sqrt{2})r_i}. \tag{2.6}$$

В самом деле, если $d_i = 0$, то правые и левые части (2.6) совпадают. Если $d_i > 0$, то рассмотрим круг $O(\mathbf{z}_{k+1}^{(i)}, r_i)$, включающий в себя по построению $D_i(M, S_n^{(k)})$, и его диаметр Λ, перпендикулярный вектору $\mathbf{z}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{z}_k^{(i)}$. Обозначим через Γ^* ту часть окружности $\partial O(\mathbf{z}_{k+1}^{(i)}, r_i)$, которая ограничивает половину круга $O(\mathbf{z}_{k+1}^{(i)}, r_i)$, не содержащую точку $\mathbf{z}_k^{(i)}$. Из свойств чебышёвского радиуса и чебышёвского центра произвольного компактного множества $M \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^2)$ известно, что на окружности $\partial O\left(\mathbf{c}(M), r(M)\right)$ найдется множество $\widehat{M} \subset M$ такое, что $\mathbf{c}(M) \in \operatorname{co}\widehat{M}$. Значит, при любом разбиении окружности $\partial O(\mathbf{z}_{k+1}^{(i)}, r_i)$ на две полуокружности, в каждой из них найдутся точки из $\widehat{M}$; в частности, такие точки найдутся и в случае описанного выше разбиения окружности $\partial O(\mathbf{z}_{k+1}^{(i)}, r_i)$. Следовательно, существует как минимум одна точка $\mathbf{z}^* \in D_i(M, S_n^{(k)}) \cap \Gamma^*$. Поскольку $\mathbf{z}_k^{(i)}$ лежит на перпендикуляре, построенном к Λ в центре круга $O(\mathbf{z}_{k+1}^{(i)}, r_i)$, направленном в сторону, противоположную к Γ^*, то ближайшая к $\mathbf{z}_k^{(i)}$ точка на Γ^* лежит именно на диаметре Λ. Справедлива оценка $\|\mathbf{z}_k^{(i)} - \mathbf{z}^*\| \geqslant \sqrt{r_i^2 + d_i^2}$, из которой

$$h(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}) \geqslant \|\mathbf{z}_k^{(i)} - \mathbf{z}^*\| \geqslant r_i - r_i + \sqrt{r_i^2 + d_i^2} = r_i + \frac{\left(\sqrt{r_i^2 + d_i^2} - r_i\right)\left(\sqrt{r_i^2 + d_i^2} + r_i\right)}{\sqrt{r_i^2 + d_i^2} + r_i} =$$

$$= r_i + \frac{r_i^2 + d_i^2 - r_i^2}{\sqrt{r_i^2 + d_i^2} + r_i}.$$

С учетом неравенства (2.5) получаем оценку $h(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}) \geqslant r_i + \dfrac{d_i^2}{\sqrt{2r_i^2} + r_i}$, совпадающую с (2.6). Учитывая (2.3), можно записать теперь оценку

$$h(M, S_n^{(k)}) = \max\{r_i \colon i = \overline{1,n}\} \leqslant \max\left\{h(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}) - \frac{d_i^2}{(1+\sqrt{2})r_i} \colon i = \overline{1,n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant h(M, S_n^{(k)}) - \frac{\min\left\{\|\mathbf{z}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{z}_k^{(i)}\|^2 \colon i = \overline{1,n}\right\}}{(1+\sqrt{2})h(M, S_n)},$$

которая совпадает с (2.4). □

Ячейки Вороного по построению имеют границу, состоящую из отрезков либо лучей прямых. В случае если M есть выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$, то и области Дирихле в нем тоже будут выпуклыми многоугольниками (в вырожденном случае отрезками или точками). Однако если граница $\Gamma = \partial M$ множества M содержит дуги кривых, то и множества $\partial D_i(M, S_n^{(k)}), i = \overline{1,n}$, могут включать в себя криволинейные участки. Для такого сорта множеств M трудно применять формулу (2.2), поскольку отыскание чебышёвского центра — сложная вычислительная задача. В связи с этим алгоритмы, представленные в этой работе, модернизированы с учетом геометрии множества M.

Обозначим $\Omega(\mathbf{z}, S_n^{(k)})$ множество ближайших к $\mathbf{z}$ точек из $S_n^{(k)}$, $f_i(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}-\mathbf{z}_k^{(i)}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{z}$ до точки $\mathbf{z}_k^{(i)} \in S_n^{(k)}$.

Определение 8. *Множеством $H(M, S_n^{(k)})$ характерных точек* [13, с. 306] *множества M относительно n-сети $S_n^{(k)}$* назовем совокупность всех точек $\mathbf{z}^*$, относительно которых выполнено одно из трех условий:

I. $\mathbf{z}^* \in \Gamma$, и найдется точка $\mathbf{z}_k^{(i)} \in S_n^{(k)}$, удовлетворяющая включению $\mathbf{z}_k^{(i)} \in \Omega(\mathbf{z}^*, S_n^{(k)})$, при этом функция $f_i(\mathbf{z})$ имеет в точке $\mathbf{z}^*$ локальный максимум на множестве Γ;

II. $\mathbf{z}^* \in \Gamma$, и найдутся несовпадающие точки $\mathbf{z}_k^{(i)}, \mathbf{z}_k^{(j)}$ в $S_n^{(k)}$ такие, что $\{\mathbf{z}_k^{(i)}, \mathbf{z}_k^{(j)}\} \subseteq \Omega(\mathbf{z}^*, S_n^{(k)})$;

III. $\mathbf{z}^* \in M$, и найдутся несовпадающие точки $\mathbf{z}_k^{(i)}$, $\mathbf{z}_k^{(j)}$, $\mathbf{z}_k^{(l)}$ в $S_n^{(k)}$ такие, что $\{\mathbf{z}_k^{(i)}, \mathbf{z}_k^{(j)}, \mathbf{z}_k^{(l)}\} \subseteq$ $\subseteq \Omega(\mathbf{z}^*, S_n^{(k)})$.

В [13,14] показано, что все точки множества M, в которых достигается максимум функции $\rho(\mathbf{z}, S_n^{(k)})$, являются характерными.

Определение 9. *Множеством характерных точек множества M относительно n-сети S, принадлежащих точке $\mathbf{z}_k^{(i)}$*, назовем

$$H_i(M, S_n^{(k)}) = H(M, S_n^{(k)}) \cap D_i(M, S_n^{(k)}).$$

В случае гладкой кривой Γ характерные точки типа I, принадлежащие $\mathbf{z}_k^{(i)}$, можно искать среди тех точек $\mathbf{z} \in \Gamma$, в которых касательная к Γ ортогональна к отрезку $[\mathbf{z}_k^{(i)}, \mathbf{z}]$. Характерные точки типа II могут лежать только на пересечении Γ со срединным перпендикуляром к отрезку $[\mathbf{z}_k^{(i)}, \mathbf{z}_k^{(j)}]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq i$. Характерными точки типа III могут являться только центры окружностей, описанных вокруг треугольников с вершинами в точках $\mathbf{z}_k^{(i)}, \mathbf{z}_k^{(j)}, \mathbf{z}_k^{(l)}$, где i, j, l из $\overline{1,n}$ и $j \neq i, k \neq i, j \neq k$.

На рис. 1 показаны характерные точки всех трех типов для 3-сети S_3 и множества M — круга. На нем видно, что точка $\mathbf{z}^{(1)} \in H_1(M, S_n^{(k)})$ относится к типу I, точки $\mathbf{z}^{(2)}, \mathbf{z}^{(3)} \in H_1(M, S_n^{(k)})$ относятся к типу II, а точка $\mathbf{z}^{(4)} \in H_1(M, S_n^{(k)})$ — к типу III. На рисунке указана также область Дирихле $D_1(M, S_n^{(k)})$.

В основу модернизированного итерационного алгоритма отыскания аппроксимации $\widetilde{S}_n^{(k)} =$ $= \{\widetilde{\mathbf{z}}_k^{(i)}\}_{i=1}^n$ наилучшей чебышёвской n-сети положена формула

$$\widetilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} = \mathbf{c}\big(H_i(M, S_n^{(k)})\big),\ i = \overline{1,n}. \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, что она по своей структуре близка к (2.2).

Теорема 2. *Пусть заданы множество $M \subset \mathbb{R}^2$ и n-сеть $S_n^{(k)} \subset M$. Если при некотором $1 \leqslant i \leqslant n$ имеет место равенство*

$$\widetilde{\mathbf{z}}_k^{(i)} = \mathbf{z}_k^{(i)}, \tag{2.8}$$

то выполняется

$$\mathbf{z}_k^{(i)} = \mathbf{c}\big(D_i(M, S_n^{(k)})\big) \tag{2.9}$$

и

$$r\big(H_i(M, S_n^{(k)})\big) = r\big(D_i(M, S_n^{(k)})\big). \tag{2.10}$$

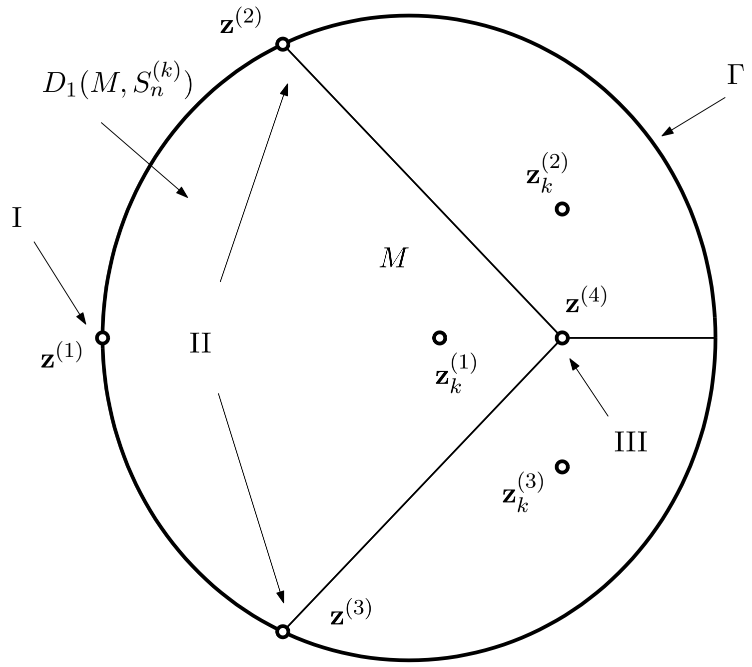

Рис. 1. Множество $H_1(M, S_n^{(k)})$ характерных точек, принадлежащих $\mathbf{z}^{(1)} \in S_n^{(k)}$ для множества M — круга с границей Γ

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathbf{m}^* \in D_i(M, S_n^{(k)})$ наиболее удаленную точку в $D_i(M, S_n^{(k)})$ от $\mathbf{z}_k^{(i)}$. Из определения области Дирихле и характерной точки следует, что точка $\mathbf{m}^*$ принадлежит множеству $H_i(M, S_n^{(k)})$. Значит,

$$h\big(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}\big) = h\big(H_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}\big).$$

Из условия (2.8) и формулы (2.2) следует, что

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{c}\big(H_i(M, S_n^{(k)})\big).$$

По построению $H_i(M, S_n^{(k)}) \subset D_i(M, S_n^{(k)})$, а значит,

$$\forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \ h\big(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}\}\big) \geqslant h\big(H_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}\}\big).$$

Отсюда

$$\forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \, h\big(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}\}\big) \geqslant r\big(H_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}\}\big) = h\big(H_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}\big) = h\big(D_i(M, S_n^{(k)}), \{\mathbf{z}_k^{(i)}\}\big).$$

В итоге получаем, что точка $\mathbf{z}_k^{(i)}$ есть чебышёвский центр компакта $D_i(M, S_n)$, что доказывает равенства (2.9) и (2.10). □

Вычисление чебышёвского центра объединения большого числа m точек, которое может встретиться в формуле (2.7), может требовать больших машинных ресурсов. Рассмотренный в работе [23] метод перебора из всех симплексов (то есть n-сетей, где число n не более чем на 1 превосходит размерность рассматриваемого пространства), составленных из точек множества, требует порядка $m^3/6$ операций. Поэтому для отыскания множества $\mathbf{c}\big(H_i(M, S_n)\big)$ разработана более экономичная схема, впервые опробованная в работе [21].

Рассмотрим нетривиальную m-сеть V, то есть множество, содержащее как минимум две несовпадающие точки. Обозначим через $\Sigma_3(V, \mathbf{v})$ множество всех троек $\{\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)}, \mathbf{v}\}$, в которых $\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)} \in V$.

Алгоритм вычисления чебышёвского центра m-сети V.

1. Среди множества V находится такая пара точек $\mathbf{v}^{(i^*)}$, $\mathbf{v}^{(j^*)}$, что

$$\|\mathbf{v}^{(i^*)}-\mathbf{v}^{(j^*)}\|=\max\{\|\mathbf{v}^{(i)}-\mathbf{v}^{(j)}\|\colon i=\overline{1,m}, j=\overline{1,m}\}.$$

Переменная k (счетчик циклов) устанавливается в $k:=1$ и записывается набор точек

$$V^{(k)}:=\{\mathbf{v}^{(i^*)},\mathbf{v}^{(j^*)}\}.$$

2. Записывается точка $\mathbf{c}^{(k)}:=(\mathbf{v}^{(i^*)}+\mathbf{v}^{(j^*)})/2$ и расстояние $r^{(k)}:=\|\mathbf{v}^{(i^*)}-\mathbf{v}^{(j^*)}\|/2$.

3. Строится массив $\{\overline{r}_i\}_{i=1}^m:=\{\|\mathbf{c}^{(k)}-\mathbf{v}^{(i)}\|\}_{i=1}^m$ расстояний от точки $\mathbf{c}^{(k)}$ до элементов множества V. Из него выбирается наибольший элемент $\overline{r}_j:=\max\limits_{i=\overline{1,m}}\overline{r}_i$.

4. Если $\overline{r}_j\leqslant r^{(k)}$, то выполняется переход к пункту 7.

5. Значение величины k увеличивается на 1: $k:=k+1$. Строятся множества $W:=\Sigma_3(V^{(k-1)},\mathbf{v}^{(j)})$ и $V^{(k)}:=V^{k-1}\cup\{\mathbf{v}^{(j)}\}$.

6. Вычисляется чебышёвский центр и чебышёвский радиус каждого из множеств $\overline{S}_3^{(i)}\in W$. Из них выбирается 3-сеть $S_3^{(k)}$ с наибольшим чебышёвским радиусом $r^{(k)}:=r(S_3^{(k)})$ и выписывается точка $\mathbf{c}^{(k)}:=\mathbf{c}(S_3^{(k)})$.

7. Переход к пункту 3.

8. Записывается значение чебышёвского центра $\mathbf{c}(V):=\mathbf{c}^{(k)}$ и чебышёвского радиуса $r(V):=r^{(k)}$ множества V.

Замечание 1. Приведенный алгоритм опирается на структуру m-сети V. В пункте 1 находится диаметр множества — пара его точек, находящихся на наибольшем расстоянии. В некоторых случаях они лежат на окружности $\partial O\big(\mathbf{c}(V),r(V)\big)$, а среднее между ними есть чебышёвский центр. Затем по ходу работы алгоритма находятся чебышёвские центры подмножеств $V^{(k)}\subseteq V$ и выполняется проверка на то, достигается ли в них минимум функции $f(\mathbf{z})=h(V,\{\mathbf{z}\})$. Если он не достигается, то рассматривается множество $V^{(k+1)}\supset V^k$, в которое включается точка, наиболее удаленная от $\mathbf{c}(V^{(k)})$ в $V^{(k)}$, а значит, подозрительная на то, что она входит в симплекс максимального чебышёвского радиуса из вложенных в V.

Важной компонентой отыскания наилучшей чебышёвской сети является генерация ее начального приближения $S_n^{(0)}$. Известно, что при росте n структура центров кругов оптимального покрытия стремится к гексагональной структуре (подробнее см. в [22, гл. III]). Поэтому при генерации точки строятся как суммы вершин некоторой шестиугольной сетки и случайного вектора с равномерным распределением.

§ 3. Примеры построения аппроксимаций оптимальных покрытий

В работах [16, 23] приведены результаты работы программного комплекса, предназначаемого для построения покрытий многоугольников различной геометрии. С применением приведенных алгоритмов разработана его модификация, позволяющая решать задачу 1 для фигур с криволинейной границей. Основными операциями в нем выступают поиск для текущего значения n-сети характерных точек множества M и вычисление новой итерации по формуле (2.7). При этом используется многократный запуск комплекса с целью отбора наилучшего решения из всех возможных.

Пример 1. Задано множество M, ограниченное кривой

$$x^4+y^4=1. \tag{3.1}$$

Требуется решить для него задачу 1 при $n=20$ и $n=24$.

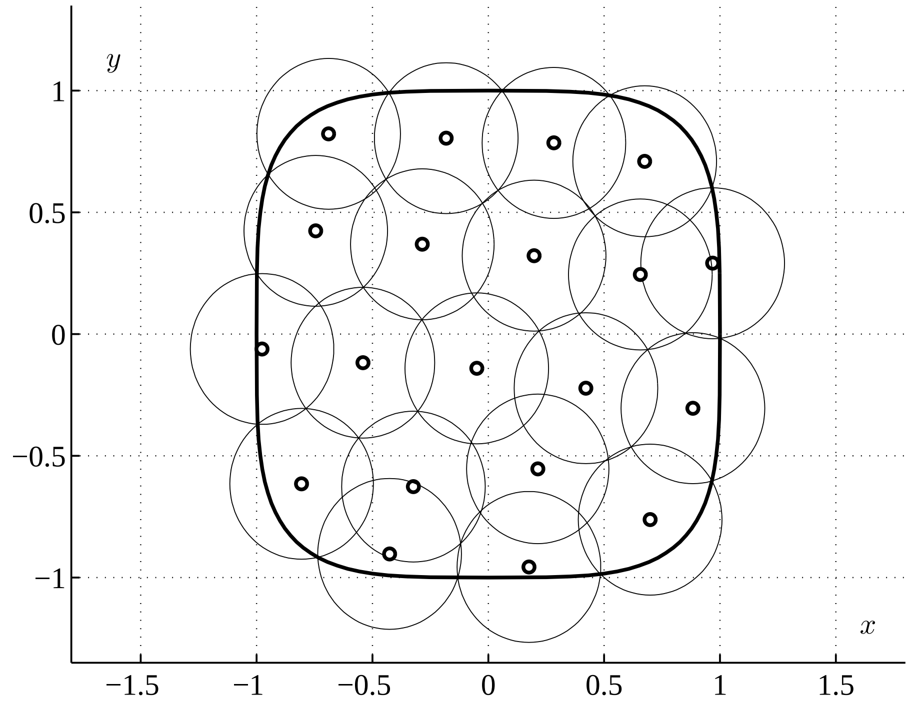

Рис. 2. Множества M, аппроксимация его наилучшей 20-сети S_{20} и набор кругов $\Xi(S_{20}, r)$ в примере 1

Заметим, что кривая (3.1) по форме занимает промежуточное положение между окружностью и квадратом. Она гладкая, но имеет четыре точки максимума кривизны и четыре точки уплощения [24]. Полученный результат: аппроксимация наилучшей 20-сети S_{20} имеет вид

$$S_{20} \approx \{(-0.7446, 0.4241), (0.1754, -0.9568), (-0.9764, -0.0611),$$

$$(0.6986, -0.7622), (0.4216, -0.2223), (-0.3232, -0.6267),$$

$$(0.2833, 0.7855), (-0.4260, -0.9030), (-0.2847, 0.3689),$$

$$(-0.6889, 0.8227), (-0.1814, 0.8049), (0.9684, 0.2911),$$

$$(-0.0496, -0.1408), (0.6563, 0.2447), (-0.8057, -0.6153),$$

$$(-0.5410, -0.1175), (0.8832, -0.3046), (0.6752, 0.7097),$$

$$(0.1976, 0.3221), (0.2135, -0.5537)\}.$$

Радиус кругов покрытия $\Xi(S_{20}, r)$ равен $r \approx 0.3101$. На рис. 2 представлены: граница Γ множества M в виде жирной линии; окружности, ограничивающие круги из $\Xi(S_{20}, r)$, — в виде тонких линий; точки чебышёвской n-сети S_{20} — в виде маркеров (кружков).

Аппроксимация наилучшей 24-сети S_{24} равна

$$S_{24} \approx \{(-0.9014, 0.0551), (-0.3368, 0.3938), (0.1479, 0.5129),$$

$$(0.8897, 0.5210), (0.2437, 0.9460), (-0.7317, -0.2664),$$

$$(-0.2335, 0.8185), (-0.4951, 0.0305), (-0.8829, -0.5929),$$

$$(-0.1170, -0.2420), (0.1775, -0.5708), (-0.6639, 0.8169),$$

$$(0.4155, -0.2218), (0.6703, -0.6510), (0.4603, 0.2521),$$

$$(0.8415, 0.0419), (-0.3445, -0.4937), (-0.7833, 0.4862),$$

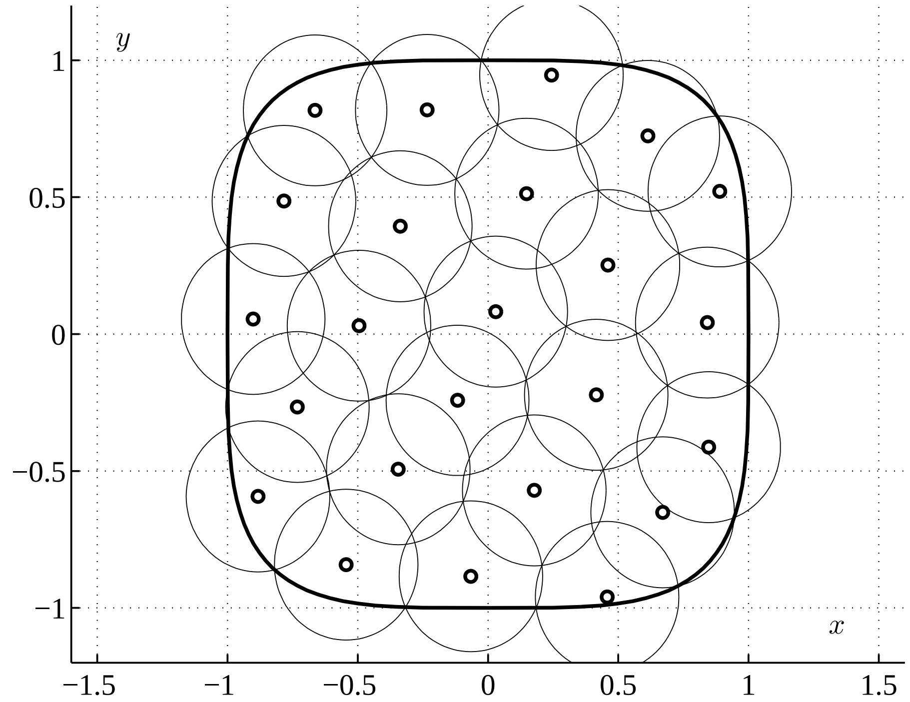

Рис. 3. Множества M, аппроксимация его наилучшей 24-сети S_{24} и набор кругов $\Xi(S_{24}, r)$ в примере 1

$$(-0.5444, -0.8420), (0.6136, 0.7238), (0.8471, -0.4129),$$

$$(-0.0657, -0.8846), (0.0296, 0.0820), (0.4572, -0.9598)\}.$$

Радиус кругов покрытия $\Xi(S_{24}, r)$ равен $r \approx 0.2755$. На рис. 3 представлены: граница Γ множества M; окружности, ограничивающие круги из $\Xi(S_{24}, r)$; точки чебышёвской n-сети S_{24}.

Пример 2. Задано множество M, ограниченное кривой

$$y^2 = x^3 - x \tag{3.2}$$

при значении переменной $x \in [-1, 0]$. Требуется решить для него задачу 1 при $n = 18$ и $n = 21$.

Заметим, что кривая (3.2) относится к классу эллиптических [25] и состоит из двух ветвей, одна из которых является неограниченной (при $x \in [1, +\infty)$). Однако рассматриваемая часть кривой замкнута и похожа по форме на овал.

Полученный результат: аппроксимация наилучшей 18-сети S_{18} имеет вид

$$S_{18} \approx \{(-0.4805, -0.2197), (-0.8403, 0.3905), (-0.6948, -0.4412),$$

$$(-0.9371, -0.1584), (-0.3236, 0.5128), (-0.7783, -0.3333),$$

$$(-0.3930, -0.0079), (-0.6756, -0.0747), (-0.3214, 0.2274),$$

$$(-0.5469, 0.3671), (-0.1021, 0.2803), (-0.8972, 0.1233),$$

$$(-0.3014, -0.4113), (-0.1701, -0.2097), (-0.5285, -0.5355),$$

$$(-0.1074, -0.0015), (-0.6218, 0.1847), (-0.6248, 0.5749)\}.$$

Радиус кругов покрытия $\Xi(S_{18}, r)$ равен $r \approx 0.1651$. На рис. 4 представлены: граница Γ множества M; окружности, ограничивающие круги из $\Xi(S_{18}, r)$; точки чебышёвской n-сети S_{18}.

Аппроксимация наилучшей 21-сети S_{21} равна

$$S_{21} \approx \{(-0.7792, -0.4036), (-0.1402, -0.1513), (-0.5882, 0.5228),$$

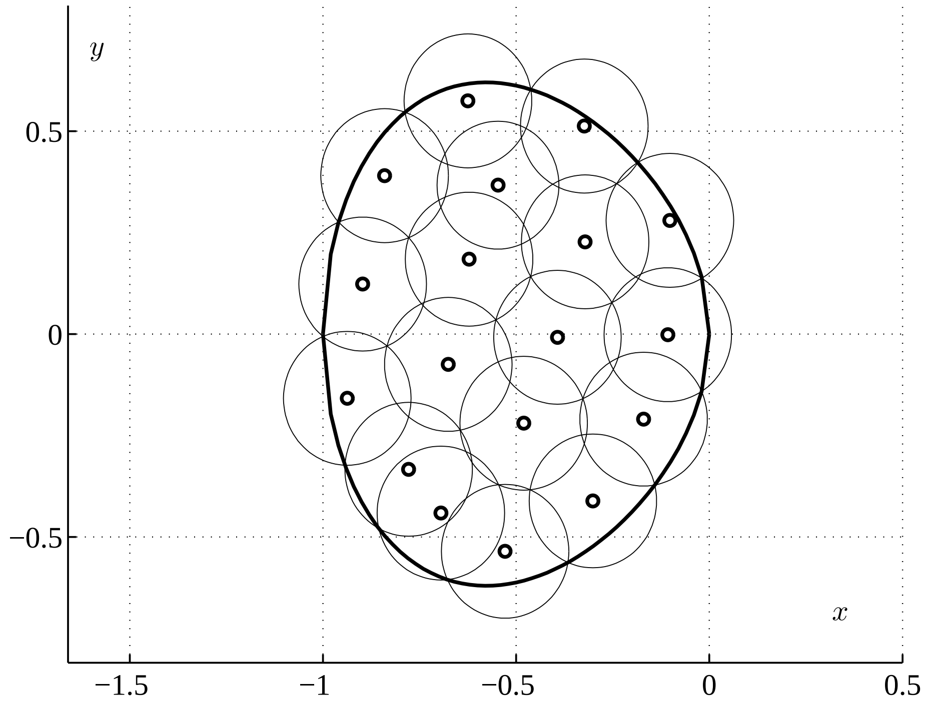

Рис. 4. Множество M, аппроксимация его наилучшей 18-сети S_{18} и набор кругов $\Xi(S_{18}, r)$ в примере 2

$$(-0.6264, -0.1508), (-0.8143, 0.4704), (-0.1605, 0.3055),$$
$$(-0.6336, -0.5811), (-0.2129, -0.3653), (-0.4192, -0.4768),$$
$$(-0.9384, -0.0072), (-0.6284, 0.2751), (-0.7209, 0.0253),$$
$$(-0.4019, 0.3079), (-0.8764, 0.2274), (-0.2689, 0.0708),$$
$$(-0.8653, -0.2307), (-0.5718, -0.3004), (-0.4848, 0.0488),$$
$$(-0.3678, -0.1911), (-0.3355, 0.5248), (-0.0317, 0.0629)\}.$$

Радиус кругов покрытия $\Xi(S_{21}, r)$ равен $r \approx 0.1491$. На рис. 5 представлены: граница Γ множества M; окружности, ограничивающие круги из $\Xi(S_{21}, r)$; точки чебышёвской n-сети S_{21}.

§ 4. Заключение

Полученные результаты свидетельствуют об эффективности разработанных алгоритмов построения аппроксимаций оптимальных покрытий плоских фигур M с криволинейной границей. При запусках программного комплекса удалось существенно сэкономить вычислительные ресурсы за счет выделения характеристических точек множества M и распределения по зонам Дирихле. Открытым остается вопрос об оценке отклонения найденных покрытий от оптимальных, но эта задача может быть решена лишь приблизительно и с учетом специфики фигуры M (подробнее см. в [26]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Ушаков В.Н., Лебедев П.Д., Матвийчук А.Р., Малев А.Г. Дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания и оценка степени нестабильности множеств в этих играх // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 277. С. 275–287.
3. Местецкий Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.

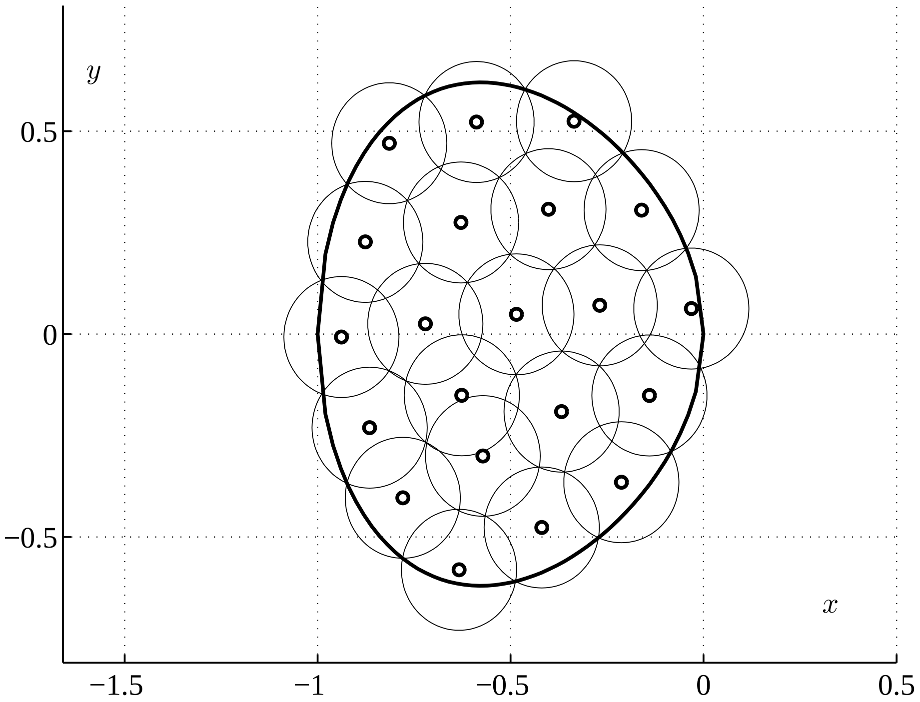

Рис. 5. Множество M, аппроксимация его наилучшей 21-сети S_{21} и набор кругов $\Xi(S_{21}, r)$ в примере 2

4. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 289. № 1. С. 38–41.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 384 с.
6. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 87–103.
7. Ушаков В.Н., Лавров Н.Г., Ушаков А.В. Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 277–286.
8. Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 291–308.
9. Гаркави А.Л. О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве // Успехи математических наук. 1960. Т. 15. Вып. 2. С. 210–211.
10. Гаркави А.Л. О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1962. Т. 26. № 1. С. 87–106.
11. Колмогоров А.Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Доклады Академии наук СССР. 1956. Т. 108. № 3. С. 385–388.
12. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. Вып 2. С. 3–86.
13. Брусов В.С., Пиявский С.А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11. № 2. С. 304–312.
14. Пиявский С.А. Об оптимизации сетей // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 1. С. 68–80.
15. Галиев Ш.И., Карпова М.А. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 4. С. 757–769.
16. Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств объединениями кругов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 88–99.
17. Bezdek K. Classical topics in discrete geometry. New York: Springer, 2010.

18. Melissen H. Densest packings of eleven congruent circles in a circle // Geometriae Dedicata. 1994. Vol. 50. Issue 1. P. 15–25.
19. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: Комкнига, 2006. 304 с.
20. Гаркави А.Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 6. С. 139–145.
21. Ушаков В.Н., Лебедев П.Д. Алгоритмы построения оптимального покрытия множеств в трехмерном евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 276–288.
22. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: ГИФМЛ, 1958. 365 с.
23. Лебедев П.Д., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
24. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2003. 432 с.
25. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
26. Кротов В.Ф., Пиявский С.А. Достаточные условия оптимальности в задачах об оптимальных покрытиях // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1968. № 2. С. 10–17.

Поступила в редакцию 15.04.2016

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, профессор, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: pleb@yandex.ru

V. N. Ushakov, P. D. Lebedev
Algorithms of optimal set covering on the planar $\mathbb{R}^2$

Keywords: disk covering, best Chebyshev net, Chebyshev center, Dirichlet zone, characteristic points, closed curve.

MSC: 05B40

The problem of optimal covering of planar convex sets with a union of a given number n of equal disks is studied. Criterion of optimality is a minimization of disks' radius, which gives an opportunity to reduce the optimization problem to a construction of the best Chebyshev n-net of a convex set. Numerical methods based on dividing the set into Dirichlet zones and finding characteristic points are suggested and proved in the present paper. One of the main elements of the methods is a Chebyshev center calculation for a compact convex set. Stochastic algorithms for generating an initial position of the n-net points are presented. Modeling of some examples is computed and visualization of the constructed covering is realized.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
2. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Matviychuk A.R., Malev A.G. Differential games with fixed terminal time and estimation of the instability degree of sets in these games, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 277, issue 1, pp. 266–277.
3. Mestetskii L.M. *Nepreryvnaya morfologiya binarnykh izobrazhenii: figury, skelety, tsirkulyary* (Continuous morphology of binary images: figures, skeletons, circulars), Moscow: Fizmatlit, 2009, 288 p.
4. Kurzhanskii A.B., Filippova T.F. Description of the set of viable trajectories of a differential inclusion, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 1, pp. 38–41 (in Russian).
5. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* (Evaluation of a phase state of dynamical systems), Moscow: Nauka, 1988, 384 p.

6. Ushakov V.N., Matviychuk A.R., Lebedev P.D. Defect of stability in game-pursuit problem, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 87–103 (in Russian).
7. Ushakov V.N., Lavrov N.G., Ushakov A.V. Construction of solutions in an approach problem of a stationary control system, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 277–286 (in Russian).
8. Ushakov V.N., Lakhtin A.S., Lebedev P.D. Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 222–238.
9. Garkavi A.L. Existence of the best net and the best width for set in a Banach space, *Usp. Mat. Nauk*, 1960, vol. 15, issue 2, pp. 210–211 (in Russian).
10. Garkavi A.L. On the optimal net and best cross-section of a set in a normed space, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 87–106 (in Russian).
11. Kolmogorov A.N. On some asymptotic characteristics of completely bounded metric spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol. 108, no. 3, pp. 385–388 (in Russian).
12. Kolmogorov A.N., Tikhomirov V.M. ε-entropy and ε-capacity of sets in function spaces, *American Mathematical Society Translations: Series 2*, 1961, vol. 17, pp. 227–364.
13. Brusov V.S., Piyavskii S.A. A computational algorithm for optimally covering a plane region, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, vol. 11, issue 2, pp. 17–27.
14. Piyavskii S.A. On optimization of networks, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1968, no. 1, pp. 68–80 (in Russian).
15. Galiev Sh.I., Karpova M.A. Optimization of multiple covering of a bounded set with circles, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, issue 4, pp. 721–732.
16. Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Algorithms of the best approximations of the flat sets by the union of circles, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 88–99 (in Russian).
17. Bezdek K. *Classical topics in discrete geometry*, New York: Springer, 2010.
18. Melissen H. Densest packings of eleven congruent circles in a circle, *Geometriae Dedicata*, 1994, vol. 50, issue 1, pp. 15–25.
19. Hausdorff F. *Teoriya mnozhestv* (Set theory), Moscow: Komkniga, 2006, 304 p.
20. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set, *Usp. Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, issue 6, pp. 139–145.
21. Ushakov V.N., Lebedev P.D. Algorithms for the construction of an optimal cover for sets in three-dimensional Euclidean space, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 276–288 (in Russian).
22. Tot L.F. *Raspolozheniya na ploskosti, na sfere i v prostranstve* (Dispositions in a plane, on a sphere and in space), Moscow: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1958, 365 p.
23. Lebedev P.D., Ushakov A.V. Approximating sets on a plane with optimal sets of circles, *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, issue 3, pp. 485–493.
24. Rashevskii P.K. *Kurs differentsial'noi geometrii* (Course of differential geometry), Moscow: Editorial URSS, 2003, 432 p.
25. Akhiezer N.I. *Elementy teorii ellipticheskikh funktsii* (Elements of elliptic functions theory), Moscow: Nauka, 1970, 304 p.
26. Krotov V.F., Piyavskii S.A. Sufficient conditions of optimality in problems of optimal covering, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1968, no. 2, pp. 10–17 (in Russian).

Received 15.04.2016

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Professor, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: pleb@yandex.ru