

УДК 51-72

© *И. Г. Низовцева, П. К. Галенко, Д. В. Александров, С. В. Вихарев, Е. А. Титова, И. С. Сухачёв*

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ПРОФИЛЕ ФАЗОВОГО ПОЛЯ: ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕНА–КАНА¹

Для нахождения решений гиперболического уравнения Аллена–Кана использован метод первого интеграла, который следует из известной теоремы Гильберта о нулях. Получены точные аналитические решения в виде бегущей волны, определяющие полный класс решений гиперболического уравнения Аллена–Кана. Показано, что в этом классе существует два подкласса решений: подкласс непрерывных решений и подкласс разрывных решений с сингулярностью в начале координат. Такая неединственность решений ставит вопрос об устойчивом аттракторе, то есть о решении бегущей волны, к которому будут стремиться нестационарные состояния, определяемые гиперболическим уравнением Аллена–Кана. Найденные решения включают в себя как частный случай полученные ранее решения для параболического уравнения Аллена–Кана в виде конечного числа \tanh -функций.

Ключевые слова: бегущая волна, уравнение Аллена–Кана, метод первого интеграла, теорема о разделении.

DOI: 10.20537/vm160211

Введение

Уравнение Аллена–Кана в частных производных [1, 2] было предложено для антифазного движения границ и далее нашло применение в широком спектре математических и физических прикладных задач. Например, задачи о росте кристалла [3], об упорядочении фаз [4], о движении границ по средней кривизне [5], о сегментации изображений [6] и о динамике популяций [7] могут быть описаны при помощи уравнения Аллена–Кана или его модификаций. Будучи полезным инструментом, наряду с моделями фазового поля [3, 8] уравнение Аллена–Кана является основой для математического описания задач со свободной границей в процессах фазового перехода [9].

В настоящей работе рассматривается гиперболическое уравнение Аллена–Кана, которое применяется в областях высокоскоростных фазовых переходов [10]. Справедливость моделей гиперболического типа в теории быстрых фазовых переходов была подтверждена результатами молекулярно-динамического моделирования эффекта захвата примеси быстро движущимися фронтами кристаллизации [11] и аналитическим выводом уравнений фазового поля с использованием грубозеренного осреднения микроскопических уравнений [12].

Уравнения в частных производных могут быть проанализированы в классе аналитических решений в виде бегущих волн [13]. Для гиперболического уравнения Аллена–Кана решение в виде бегущей волны в частном виде \tanh -функции было рассмотрено в работах [14, 15]. К настоящему времени полный набор решений в виде бегущей волны для гиперболического уравнения Аллена–Кана отсутствует. Поэтому основной целью настоящей работы является получение набора решений для гиперболического уравнения Аллена–Кана в виде бегущих волн в аналитическом виде. С этой целью мы используем метод первого интеграла [16, 17] как один из наиболее

¹ Авторы благодарят за поддержку настоящей работы: конкурсный центр Минобразования России (гранты Е06–1.0–5, Е07–1.0–100), Министерство образования и науки Российской Федерации (проект № 315), Правительство Российской Федерации (контракт № 02.А03.21.0006, акт 211), РФФИ (гранты 06–01–00014, 14–29–10282, 16–08–00932), Совет по грантам Президента РФ (МК-3124.2015.5, SP-3122.2015.5) и Фонд Александра фон Гумбольдта (ID 1160779).

удобных и универсальных на сегодня способов для получения решений в виде бегущих волн. Полученные решения проверены на существование \tanh -функций.

§ 1. Гиперболическое уравнение Аллена–Кана

В соответствии с результатами работы [10] гиперболическое уравнение для параметра порядка ϕ задается следующим образом:

$$\tau_R \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi - M_\phi \frac{df(\phi)}{d\phi}, \quad (1.1)$$

где t — время, D — коэффициент диффузии для параметра порядка ϕ , M_ϕ — мобильность поля ϕ и τ_R — время релаксации $\partial\phi/\partial t$. Простейший случай перехода из нестабильного состояния в стабильное описывается при помощи плотности свободной энергии $f(\phi)$:

$$f(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2, \quad (1.2)$$

которая определяет бистабильную систему. Понятие бистабильности подразумевает существование пространственно однородных и стабильных состояний $\phi = \pm 1$, которые являются решениями уравнения $d\phi/dt = -M_\phi df(\phi)/d\phi = M_\phi(\phi - \phi^3) = 0$. Подставляя плотность свободной энергии (1.2) в уравнение движения (1.1), получаем уравнение

$$\tau_R \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi + M_\phi(\phi - \phi^3), \quad (1.3)$$

которое является гиперболическим уравнением Аллена–Кана. Вводя безразмерное время релаксации $\tau = \tau_R M_\phi$, безразмерную координату $x' = x \sqrt{M_\phi/D}$ и безразмерное время $t' = M_\phi t$, введем новую переменную $\xi = x' - ct'$ для системы координат с началом при $\phi = 1/2$, движущейся с постоянной скоростью: $c = \text{const}$. Таким образом, уравнение (1.3) приобретает следующий вид в одномерном пространстве:

$$(1 - \tau c^2) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + c \frac{d\phi}{d\xi} + \phi - \phi^3 = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) имеет тривиальные постоянные решения: $+1$, -1 и 0 . Наша цель состоит в получении нетривиальных решений в виде бегущих волн для уравнения (1.4), которое представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) вида $Q(\phi, \phi', \phi'', \dots) = 0$, где штрих обозначает производную по ξ . Решение этого ОДУ может быть записано в виде $\phi_i(x, t) = F(\xi)$, где $i = 1, \dots, m$. Теперь введем новую независимую переменную $X(\xi) = F(\xi)$ и ее производную $Y(\xi) = X'(\xi)$. В соответствии с методом первого интеграла [16] $X(\xi)$ и $Y(\xi)$ представляют собой нетривиальные решения для (1.4):

$$\frac{dX(\xi)}{d\xi} = Y(\xi), \quad (1.5)$$

$$(1 - \tau c^2) Y'(\xi) = X^3(\xi) - X(\xi) - cY(\xi). \quad (1.6)$$

§ 2. Теорема о делении и метод первого интеграла

Метод первого интеграла [16] позволяет определить решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ЧДУ) и имеет широкое применение в течение последнего десятилетия [17, 19, 20, 22]. В соответствии с этим методом решение уравнения (1.4) может быть выражено через $X(\xi)$ и $Y(\xi)$ при помощи следующего многочлена:

$$q[X(\xi), Y(\xi)] = \sum_{i=0}^m a_i(X) Y^i = 0. \quad (2.1)$$

Многочлен (2.1) представляет собой первый интеграл уравнений (1.5) и (1.6) в соответствии с теоремой о делении² в предположении, что $a_i(X)$ — это многочлены от X и $a_m(X) \neq 0$. Этот первый интеграл сводит (1.4) к интегрируемому ОДУ первого порядка, которое должно иметь точное аналитическое решение.

В (2.1) мы рассматриваем $X(\xi)$ и $Y(\xi)$ как две независимые функции в комплексной плоскости $C(X, Y)$, таким образом, $dY/dX = 0$. В соответствии с теоремой о делении [16, 18] существование многочлена $g(X) + h(X)Y$ определяет производную, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\xi} &= \frac{\partial q}{\partial X} \frac{dX}{d\xi} + \frac{\partial q}{\partial Y} \frac{dY}{d\xi} = \frac{\partial q}{\partial X} Y + \frac{\partial q}{\partial Y} \frac{X^3 - X - cY}{1 - \tau c^2} = \\ &= [g(X) + h(X)Y] \sum_{i=0}^m a_i(X) Y^i \end{aligned}$$

в комплексной плоскости $C(X, Y)$. Из последнего выражения легко видеть, что

$$\frac{\partial q}{\partial X} = \sum_{i=0}^m \frac{da_i}{dX} Y^i + \sum_{i=0}^m i a_i Y^{i-1} \frac{\partial Y}{\partial X} = \sum_{i=0}^m \frac{da_i}{dX} Y^i \tag{2.2}$$

Применяя теорему о делении к выражению (2.2), мы определяем коэффициенты a_i для решения (2.1) как

$$\sum_{i=0}^2 \frac{da_i}{dX} Y^{i+1} + \sum_{i=0}^2 i a_i Y^{i-1} \frac{X^3 - X - cY}{1 - \tau c^2} = g(X) \sum_{i=0}^2 a_i(X) Y^i + h(X) Y \sum_{i=0}^2 a_i(X) Y^i. \tag{2.3}$$

Теперь уравнение (2.3) может быть представлено как

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 Y^1 + \dot{a}_1 Y^2 + \dot{a}_2 Y^3 + a_1 \frac{X^3}{1 - \tau c^2} - a_1 \frac{X}{1 - \tau c^2} - a_1 \frac{cY}{1 - \tau c^2} + \\ + 2a_2 Y \frac{X^3}{1 - \tau c^2} - 2a_2 Y \frac{X}{1 - \tau c^2} - 2a_2 Y \frac{cY}{1 - \tau c^2} = g(X) a_0 + g(X) a_1 Y + \\ + g(X) a_2 Y^2 + h(X) Y a_0 + h(X) Y^2 a_1 + h(X) a_2 Y^3, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где точки обозначают производные d/dX . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Y^i ($i = 0, 1, 2, 3$) в (2.4), получаем

$$Y^3: \quad \dot{a}_2(X) = h(X) a_2(X), \tag{2.5}$$

$$Y^2: \quad \dot{a}_1(X) = 2a_2(X) \frac{c}{1 - \tau c^2} + g(X) a_2(X) + h(X) a_1(X), \tag{2.6}$$

$$Y^1: \quad \dot{a}_0(X) = 2a_2(X) \frac{X - X^3}{1 - \tau c^2} + a_1(X) \frac{c}{1 - \tau c^2} + g(X) a_1(X) + h(X) a_0(X), \tag{2.7}$$

$$Y^0: \quad a_1(X) \frac{X^3 - X}{1 - \tau c^2} = g(X) a_0(X). \tag{2.8}$$

Ввиду того что $a_i(X)$ представляют собой полиномы, из (2.5) следует, что $a_2(X) \equiv \text{const}$ и $h(X) = 0$. Принимая далее значение $a_2(X) = 1$, уравнения (2.5)–(2.8) можем записать в виде

$$a_2(X) = 1, \tag{2.9}$$

$$\dot{a}_1(X) = 2 \frac{c}{1 - \tau c^2} + g(X), \tag{2.10}$$

$$\dot{a}_0(X) = a_1(X) \frac{c}{1 - \tau c^2} - 2 \frac{X^3 - X}{1 - \tau c^2} + g(X) a_1(X), \tag{2.11}$$

$$a_1(X) \frac{X^3 - X}{1 - \tau c^2} = g(X) a_0(X). \tag{2.12}$$

Таким образом, система уравнений (2.9)–(2.12) определяет выражения для коэффициентов $a_i(X)$, входящих в уравнение (2.1).

²Теорема о делении была сформулирована в [16] как частный случай теоремы Гильберта о нулях [18].

§ 3. Решения вида бегущей волны

При нахождении решений уравнения (1.4) необходимо отметить следующие условия. Во-первых, скорость c перемещения поля ϕ не может превосходить максимальную скорость распространения возмущений в этом поле. Это физическое ограничение накладывает условие в виде следующего неравенства: $1 - \tau c^2 > 0$. Во-вторых, решение уравнения (1.4) будем искать для двух алгебраически возможных случаев: $\mathbf{deg}[g(X)] = 0$ и $\mathbf{deg}[g(X)] = 1$. Эти случаи можно получить из анализа уравнений (2.4)–(2.8).

3.1. Случай 0: $\mathbf{deg}[g(X)] = 0$. Принимая $\mathbf{deg}[g(X)] = 0$, сначала преобразуем систему (2.9)–(2.12) так, что $g(X) = A_1$ и $a_1(X) = 2cX/(1 - \tau c^2) + A_1X + A_0$. С учетом этих выражений интеграл (2.11) есть

$$a_0(X) = -\frac{X^4}{2(1 - \tau c^2)} + \frac{X^2}{1 - \tau c^2} \left(1 + \frac{c^2}{1 - \tau c^2} + \frac{3}{2}A_1c + \frac{1 - \tau c^2}{2}A_1^2 \right) + X \left(\frac{A_0c}{1 - \tau c^2} + A_0A_1 \right) + d, \quad (3.1)$$

где d — это константа интегрирования.

Подставляя $a_0(X)$ из (3.1) в (2.4) и умножая результат на $(1 - \tau c^2)^2$, получаем

$$\begin{aligned} & -dA_1 - \left[A_0(1 - \tau c^2) + A_0A_1(1 - \tau c^2)c + (1 - \tau c^2)^2A_0A_1^2 \right] X - \\ & - \left[2c + 2A_1 - 2A_1\tau c^2 + \frac{3}{2}A_1^2c(1 - \tau c^2) + \frac{1}{2}(1 - \tau c^2)^2A_1^3 \right] X^2 + \\ & + \left(2c + \frac{3A_1}{2} - \frac{3A_1\tau c^2}{2} \right) X^4 + A_0(1 - \tau c^2)X^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях X , получаем

$$X^4: \quad 2c + \frac{3}{2}A_1(1 - \tau c^2) = 0, \quad (3.3)$$

$$X^3: \quad A_0(1 - \tau c^2) = 0, \quad (3.4)$$

$$X^2: \quad 2c + 2A_1(1 - \tau c^2) + A_1c^2 + \frac{3}{2}A_1^2c(1 - \tau c^2) + \frac{1}{2}(1 - \tau c^2)^2A_1^3 = 0, \quad (3.5)$$

$$X^1: \quad A_0(1 - \tau c^2) + A_0A_1c(1 - \tau c^2) + (1 - \tau c^2)^2A_0A_1^2 = 0, \quad (3.6)$$

$$X^0: \quad dA_1 = 0. \quad (3.7)$$

Скорость c может быть определена из выражения $-3A_1/4 = c/(1 - \tau c^2)$, которое непосредственно следует из (3.3) с учетом того, что $A_0 \equiv 0$ ввиду (3.4). В этом случае выражение (3.5) дает решения $A_1 = 0$ или $A_1 = \pm 2\sqrt{2}/\sqrt{1 - \tau c^2}$. Используя вновь (3.3) для полученного корня $A_1 \neq 0$, определим скорость $c = \mp 3\sqrt{2}/(2\sqrt{1 + 9\tau/2})$, которая показывает, что профиль ϕ может перемещаться в положительном или отрицательном направлении относительно оси ξ .

Как результат приведенных преобразований, запишем полный набор параметров

$$A_1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \tau c^2}}, \quad A_0 = 0, \quad c = \mp \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{1 + 9\tau/2}}, \quad d = 0. \quad (3.8)$$

Возвратимся теперь к коэффициентам $a_2(X)$, $a_1(X)$ и $a_0(X)$, входящим в уравнения (2.9)–(2.12). Используя c и A_1 из (3.8), получаем из выражения (3.1) два коэффициента:

$$a_0(X) = -\frac{2 + 9\tau}{4}X^4 + \frac{2 + 9\tau}{4}X^2, \quad a_1(X) = \mp \sqrt{2 + 9\tau}X.$$

Для коэффициента $a_2(X)$ вновь используем $a_2(X) = 1$ ввиду того, что $h(X) = 0$. Полученные коэффициенты $a_i(X)$ совместно с уравнением (2.1) представляют окончательный набор выражений для Y_k в виде выражения $Y^2 \mp \sqrt{2 + 9\tau}XY - (2 + 9\tau)X^4/4 + (2 + 9\tau)X^2/4 = 0$, которое

Таблица 1. Счетчики знаков Q , A и B для решений (3.10), (3.11), (3.27) и (3.28)

Номер решения, $k = 1..8$	Q	A	B
Решение $k = 1$	+1	+1	+1
Решение $k = 2$	+1	-1	+1
Решение $k = 3$	+1	+1	-1
Решение $k = 4$	+1	-1	-1
Решение $k = 5$	-1	+1	+1
Решение $k = 6$	-1	-1	+1
Решение $k = 7$	-1	+1	-1
Решение $k = 8$	-1	-1	-1

дает

$$Y_k(\xi) = \frac{\sqrt{2+9\tau}}{2} (\pm X(\xi) \pm X^2(\xi)), \quad k = 1..4. \tag{3.9}$$

Тогда, используя выражение (1.5), можно получить набор решений $X_k(\xi)$ в виде

$$X_k(\xi) = \frac{A}{B + \exp\left[\frac{\sqrt{2+9\tau}}{2}\xi Q + c_0\right]}, \quad k = 1..8, \tag{3.10}$$

где c_0 — произвольная константа. Принимая во внимание скорость c из (3.8), перепишем решение для $\phi_k(x, t)$ в виде

$$\phi_k(x, t) = \frac{A}{B + \exp\left[Q\left(\frac{\sqrt{2+9\tau}}{2}x - \frac{3}{2}t\right) + c_0\right]}, \quad k = 1..8. \tag{3.11}$$

Таким образом, случай $\mathbf{deg}[g(X)] = 0$ рассмотрен.

3.2. Случай 1: $\mathbf{deg}[g(X)] = 1$. Преобразуем систему (2.9)–(2.12), принимая теперь $\mathbf{deg}[g(X)] = 1$, что означает $g(X) = A_1X + B_0$ и $A_1 \neq 0$. Таким образом, коэффициенты $a_i(X)$ многочлена (2.1) должны быть определены отличной от предыдущего случая системой уравнений: а именно, уравнение (2.10) приводит к выражению

$$\dot{a}_1(X) = 2\frac{c}{1-\tau c^2} + A_1X + B_0,$$

интегрируя которое получаем

$$a_1(X) = 2\frac{c}{1-\tau c^2}X + \frac{1}{2}A_1X^2 + B_0X + A_0. \tag{3.12}$$

Тогда, используя уравнение (2.11), запишем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(X) &= a_1(X) \frac{c}{1-\tau c^2} - 2\frac{X^3 - X}{1-\tau c^2} + g(X) a_1(X) = \\ &= A_0B_0 + \frac{A_0c}{1-\tau c^2} - \frac{2}{1-\tau c^2}X^3 + \left(\frac{5c}{2(1-\tau c^2)} + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{2}B_0\right)X^2 + \\ &+ \left(B_0^2 + \frac{3B_0c}{1-\tau c^2} - \frac{2}{1-\tau c^2} + 2\left(\frac{c}{1-\tau c^2}\right)^2 + A_0A_1\right)X, \end{aligned} \tag{3.13}$$

интеграл которого есть

$$\begin{aligned} a_0(X) &= \left[-\frac{1}{2(1-\tau c^2)} + \frac{1}{8}A_1^2\right]X^4 + \left[\frac{5A_1c}{6(1-\tau c^2)} + \frac{1}{2}A_1B_0\right]X^3 + \\ &+ \left[\frac{c^2}{(1-\tau c^2)^2} + \frac{2+3B_0c}{2(1-\tau c^2)} + \frac{1}{2}B_0^2 + \frac{1}{2}A_1A_0\right]X^2 + \left[\frac{cA_0}{1-\tau c^2} + A_0B_0\right]X + d. \end{aligned} \tag{3.14}$$

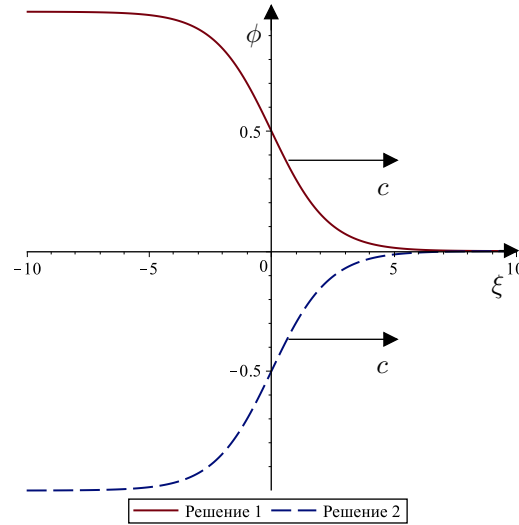


Рис. 1. Бегущие волны в виде гладкого непрерывного профиля параметра порядка ϕ , как следует из решений (3.11) и (3.28). Значения счетчиков знаков A , B и Q взяты из таблицы 1 для решений 1 и 2. Движение ϕ -профиля происходит по направлению оси ξ

Подставляя $a_1(X)$ и $a_0(X)$ из (3.12) и (3.14) соответственно в (3.1), приходим к следующей системе для X^n :

$$X^5: \frac{A_1}{(1 - \tau c^2)} = \frac{1}{8} A_1^3, \tag{3.15}$$

$$X^4: \frac{2c}{(1 - \tau c^2)^2} + \frac{3B_0}{2(1 - \tau c^2)} = \frac{5}{8} A_1^2 B_0 + \frac{5A_1^2 c}{6(1 - \tau c^2)}, \tag{3.16}$$

$$X^3: \frac{A_0}{1 - \tau c^2} - \frac{A_1}{2(1 - \tau c^2)} = \frac{5A_1 B_0 c}{6(1 - \tau c^2)} + \frac{A_1 c^2}{(1 - \tau c^2)^2} + \frac{A_1 + \frac{3}{2} A_1 B_0 c}{1 - \tau c^2} + A_1 B_0^2 + \frac{1}{2} A_1^2 A_0, \tag{3.17}$$

$$X^2: -\frac{2c}{(1 - \tau c^2)^2} - \frac{B_0}{1 - \tau c^2} = \frac{B_0 c^2}{(1 - \tau c^2)^2} + \frac{2B_0 + 3B_0^2 c}{2(1 - \tau c^2)} + \frac{1}{2} B_0^3 + \frac{1}{2} A_1 A_0 B_0 + \frac{c A_0 A_1}{1 - \tau c^2} + A_0 A_1 B_0, \tag{3.18}$$

$$X^1: -\frac{A_0}{1 - \tau c^2} = \frac{c A_0 B_0}{1 - \tau c^2} + A_0 B_0^2 + A_1 d, \tag{3.19}$$

$$X^0: dB_0 = 0. \tag{3.20}$$

Уравнения (3.15)–(3.20) определяют $d = 0$ и $A_1 = \pm 2\sqrt{2}/\sqrt{1 - \tau c^2}$, поэтому получим

$$X^4: \frac{2c}{(1 - \tau c^2)^2} + \frac{3B_0}{2(1 - \tau c^2)} = \frac{5}{8} A_1^2 B_0 + \frac{5A_1^2 c}{6(1 - \tau c^2)},$$

$$c = -\frac{3}{4} B_0 (1 - \tau c^2). \tag{3.21}$$

Умножая (3.19) на $1 - \tau c^2$, определяем $A_0 [cB_0 + B_0^2 (1 - \tau c^2) + 1] = 0$, что дает $A_0 = 0$ ввиду условия $B_0^2 (1 - \tau c^2) + 4 > 0$. Переписывая уравнения для второй и третьей степеней X и принимая во внимание $B_0 \neq 0$, окончательный набор решений для $\mathbf{deg}[g(X)] = 1$ есть

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \tau c^2}}, \quad B_0 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \tau c^2}}, \quad c = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{1 + 9\tau/2}}, \quad d = 0. \tag{3.22}$$

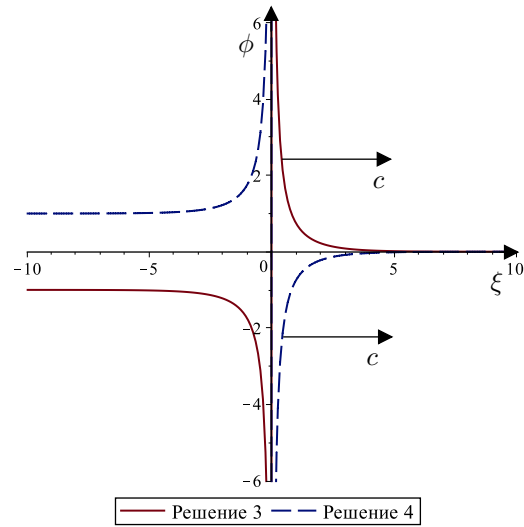


Рис. 2. Бегущие волны для параметра порядка ϕ с разрывом в точке $\xi = 0$, как следует из решений (3.11) и (3.28). Значения счетчиков знаков A , B и Q взяты из таблицы 1 для решений 3 и 4. Движение ϕ -профиля происходит по направлению оси ξ

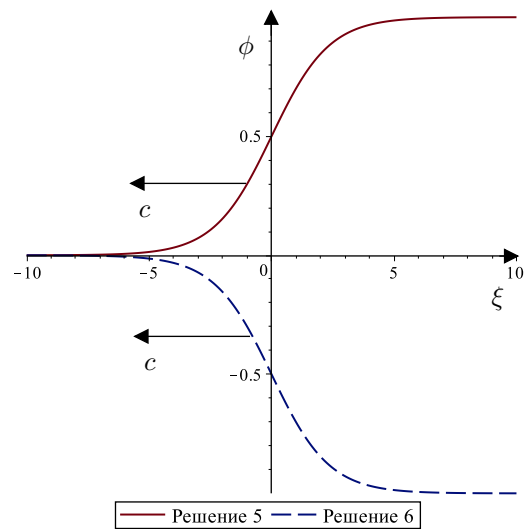


Рис. 3. Бегущие волны в виде гладкого непрерывного профиля параметра порядка ϕ , как следует из решений (3.11) и (3.28). Значения счетчиков знаков A , B и Q взяты из таблицы 1 для решений 5 и 6. Движение ϕ -профиля происходит против направления оси ξ

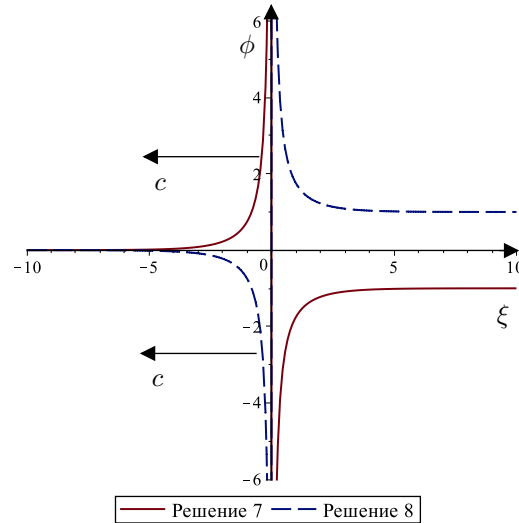


Рис. 4. Бегущие волны для параметра порядка ϕ с разрывом в точке $\xi = 0$, как следует из решений (3.11) и (3.28). Значения счетчиков знаков A , B и Q взяты из таблицы 1 для решений 7 и 8. Движение ϕ -профиля происходит против направления оси ξ

Теперь, принимая во внимание уравнения (3.12), (3.14) и (3.22), коэффициенты a_i могут быть окончательно получены в виде

$$a_0(X) = \frac{1}{2(1 - \tau c^2)} X^4 - \frac{1}{1 - \tau c^2} X^3 + \frac{1}{2(1 - \tau c^2)} X^2, \tag{3.23}$$

$$a_1(X) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \tau c^2}} X^2 \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \tau c^2}} X, \tag{3.24}$$

$$a_2(X) = 1, \quad \text{поскольку } h(X) = 0. \tag{3.25}$$

С учетом (2.1) выражения (3.23)–(3.25) приводят к квадратному уравнению относительно Y_k , которое имеет следующее решение:

$$Y_k(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \tau c^2}} [\pm X(\xi) \pm X^2(\xi)], \quad k = 1..4. \tag{3.26}$$

Теперь решения для X из (1.5) и (3.26) есть

$$X_k(\xi) = \frac{A}{B + \exp\left[\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1 - \tau c^2}} \xi Q + c_0\right]}, \quad k = 1..8, \tag{3.27}$$

где c_0 — константа интегрирования, а счетчики знаков A , B и Q определены в таблице 1. Принимая во внимание скорость c из (3.22), решение в виде бегущей волны можем записать как

$$\phi_k(x, t) = \frac{A}{B + \exp\left[Q\left(\frac{\sqrt{2+9\tau}}{2} x' - \frac{3}{2} t'\right) + c_0\right]}, \quad k = 1..8. \tag{3.28}$$

Таким образом, случай $\mathbf{deg}[g(X)] = 1$ рассмотрен.

§ 4. Обсуждение результатов

Бегущие волны (3.11) и (3.28) показаны графически на рис. 1–4, которые построены при значении времени релаксации $\tau = 0.5$. Видно, что весь набор из 8 решений разбивается на 2 класса по 4 решения в каждом. Первый класс из 4 решений представлен гладкими непрерывными профилями ϕ и соответствует решениям 1, 2, 5 и 6 из таблицы 1 (см. рис. 1 и 3). Второй класс из 4 решений представлен ϕ -профилями с разрывом в точке $\xi = 0$, что соответствует решениям 3, 4, 7 и 8 из таблицы 1 (см. рис. 2 и 4).

При нулевом времени релаксации $\tau \rightarrow 0$, решения (3.11) и (3.28) для гиперболического уравнения (1.3) приобретают вид бегущих волн:

$$\phi_k(x, t) = \frac{A}{B + \exp\left[Q\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}t'\right) + c_0\right]}, \quad k = 1..8, \quad (4.1)$$

для которых счетчики знаков A , B и Q также определены в таблице 1. Отметим, что решения (4.1) включают в себя решения для параболического уравнения Аллена–Кана, найденные ранее в [21, 22].

Из решений (3.11) и (3.28) необходимо специально выделить класс бегущих волн, имеющих профиль ступеньки (кинка). А именно, согласно определению коэффициентов A , B и Q из таблицы 1 решения 1, 2, 5 и 6 переписываются для нулевой константы интегрирования $c_0 = 0$ в следующем унифицированном виде:

$$\phi_k(x, t) = \frac{i}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{j\xi}{\delta}\right) \right], \quad k = 1, 2, 5, 6, \quad \text{при } i = \pm 1, j = \pm 1, \quad (4.2)$$

где ступенька движется по направлению или против направления координаты $\xi = x' - ct'$ с постоянной скоростью c и характерной шириной δ (имеющей смысл корреляционной длины фазового поля (см. работы [14, 15] и литературные ссылки в них)):

$$c = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{1+9\tau/2}}, \quad \delta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+9\tau/2}}. \quad (4.3)$$

Выражения (4.2) и (4.3) — это \tanh -профили (функции гиперболического тангенса) для параметра порядка ϕ , показанные графически на рис. 1 и 3. Таким образом, мы показали и подтвердили, что точные решения гиперболического уравнения Аллена–Кана (1.3) в виде бегущей волны описываются функцией гиперболического тангенса так, как это было предположено при выводе отдельных частных решений [14, 15].

При нулевом времени релаксации $\tau \rightarrow 0$ гиперболическое уравнение (1.3) преобразуется в параболическое ЧДУ, а бегущие волны (4.2) и (4.3) записываются в виде

$$\phi_k(x, t) = \frac{i}{2} \left[1 \pm \tanh\left(j\frac{x' - 3\sqrt{2}t'/2}{2\sqrt{2}}\right) \right], \quad k = 1, 2, 5, 6, \quad \text{при } i = \pm 1, j = \pm 1. \quad (4.4)$$

Отметим, что одно из решений уравнения (4.4) было ранее использовано в работе [23] для анализа численных решений параболического уравнения Аллена–Кана.

Поскольку полученные \tanh -функции (4.2) представляют собой только один из двух наборов решений уравнения (1.4), то появляется вопрос об устойчивости этого решения как глобального аттрактора. Его решение требует особого внимания в связи с численным моделированием и экспериментальным изучением процессов высокоскоростных фазовых превращений [24]. Оно может быть получено из анализа задачи в постановке Коши. Действительно, общее решение (1.4) преобразуется в классическую задачу Коши при помощи следующей подстановки $d\phi/d\xi = h(\phi)$:

$$(1 - \tau c^2)h(\phi)\frac{dh}{d\phi} + ch(\phi) + \phi - \phi^3 = 0, \quad h = h_0, \quad \phi = \phi_0, \quad (4.5)$$

где

$$\xi(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{h(\tilde{\phi})}, \quad \xi = \xi_0, \quad \phi = \phi_0, \quad (4.6)$$

а индекс 0 обозначает граничные величины соответствующих неизвестных. В результате ответ на вопрос «Будет ли бегущая волна, описанная (4.2) и (4.3), устойчивым аттрактором для нестационарных решений уравнения (1.4)?» следует из анализа обобщенного решения уравнений (4.5) и (4.6). Такой анализ может быть предметом дальнейшего изучения гиперболического уравнения Аллена–Кана.

§ 5. Выводы

Метод первого интеграла [16] применен для анализа уравнения Аллена–Кана гиперболического типа. В результате анализа получены аналитические решения типа бегущих волн. Общий набор из 8 решений делится на 2 класса, каждый из которых представлен 4 решениями. Первый класс решений представлен гладкими непрерывными профилями $\phi(\xi)$. Второй класс решений представлен $\phi(\xi)$ -профилями с разрывом каждого профиля в начале координат $\xi = 0$. Эти два класса решений включают как частные случаи решения уравнения Аллена–Кана параболического типа.

Показано, что первый класс решений описывается функциями гиперболического тангенса, дающими профили параметра порядка $\phi(\xi)$ в виде ступеньки (кинка). Это подтверждает корректность использования частных решений, предложенных при решении задач о высокоскоростном движении границ раздела фаз и о неравновесных эффектах [14, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cahn J.W., Allen S.M. A microscopic theory of domain wall motion and its experimental verification in Fe-Al alloy domain growth kinetics // *J. Phys. Colloq.* 1977. Vol. 38 (C7). P. 51–54.
2. Allen S.M., Cahn J.W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening // *Acta Metall.* 1979. Vol. 27. P. 1085–1095.
3. Wheeler A., Boettinger W.J., McFadden G.B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45. № 10. P. 7424–7240.
4. Gouyet J.F. Generalized Allen–Cahn equations to describe far-from-equilibrium order-disorder dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51. № 3. P. 1695–1710.
5. Fife P.C., Lacey A.A. Motion by curvature in generalized Cahn–Allen models // *J. Stat. Phys.* 1994. Vol. 77. № 1–2. P. 173–181.
6. Beneš M., Chalupecký V., Mikula K. Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation // *Applied Numerical Mathematics.* 2004. Vol. 51. P. 187–205.
7. Alfaro M., Hilhorst D. Generation of interface for an Allen–Cahn equation with nonlinear diffusion // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2010. Vol. 5. P. 1–12.
8. Caginalp G., Chen X. Phase field equations in the singular limit of sharp interface problems // *IMA Volume of Mathematics and Its Applications.* 1992. Vol. 43. P. 1–28.
9. Bates P.W., Chen F. Spectral analysis and multidimensional stability of traveling waves for nonlocal Allen–Cahn equation // *J. Math. Anal. Appl.* 2002. Vol. 273. P. 45–57.
10. Galenko P., Jou D. Diffuse-interface model for rapid phase transformations in nonequilibrium systems // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. P. 046125–1–13.
11. Yang Y., Humadi H., Buta D., Laird B.B., Sun D., Hoyt J.J., Asta M. Atomistic simulations of nonequilibrium crystal-growth kinetics from alloy melts // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107. P. 025505–1–4.
12. Jou D., Galenko P. Coarse graining for the phase-field model of fast phase transitions // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88. P. 042151–1–8.
13. Field R.J., Burger M. (Eds.) *Oscillations and traveling waves in chemical systems.* New York: Wiley, 1985. 681 p.
14. Galenko P.K., Abramova E.V., Jou D., Danilov D.A., Lebedev V.G., Herlach D.M. Solute trapping in rapid solidification of a binary dilute system: A phase-field study // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84. P. 041143–1–17.
15. Salhoumi A., Galenko P.K. Gibbs–Thomson condition for the rapidly moving interface in a binary system // *Physica A.* 2016. Vol. 447. P. 161–171.

16. Feng Zh. The first-integral method to study the Burgers–Korteweg-de Vries equation // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35. P. 343–349.
17. Lu B., Zhang H-Q., Xie F.-D. Traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations by using the first integral method // Applied Mathematics and Computations. 2010. Vol. 216. P. 1329–1336.
18. Bourbaki N. Commutative algebra. Springer, 1998, 625 p.
19. Feng Zh., Wang X. The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg-de Vries equation // Physics Letters A. 2003. Vol. 308. P. 173–178.
20. Ahmed Ali A.H., Raslan K.R. New solutions for some important partial differential equations // International Journal of Nonlinear Science. 2007. Vol. 4. P. 109–117.
21. Wazwaz A.-M. The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations // Applied Mathematics and Computation. 2004. Vol. 154. № 3. P. 713–723.
22. Taşcan F., Bekir A. Travelling wave solutions of Cahn–Allen equation by using first integral method // Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 207. № 1. P. 279–282.
23. Choi J.-W., Lee H.G., Jeong D., Kim J. An unconditionally gradient stable numerical method for solving the Allen–Cahn equation // Physica A. 2009. Vol. 388. P. 1791–1803.
24. Herlach D.M., Galenko P.K., Holland-Moritz D. Metastable solids from undercooled melts. Amsterdam: Elsevier, 2007. 432 p.

Поступила в редакцию 23.05.2016

Низовцева Ирина Геннадьевна, к. ф.-м. н., научный сотрудник, лаборатория математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.

E-mail: nizovtseva.irina@gmail.com

Галенко Пётр Константинович, д. ф.-м. н., профессор, физико-астрономический факультет, Университет Фридриха Шиллера, 07743, Германия, г. Йена, Лёбдерграбен штрассе, 32.

E-mail: Peter.Galenko@uni-jena.de

Александров Дмитрий Валерьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, лаборатория многомасштабного математического моделирования, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Dmitri.Alexandrov@urfu.ru

Вихарев Сергей Викторович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория комбинаторной алгебры, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.

E-mail: sergey@viharev.com

Титова Екатерина Александровна, аспирант, лаборатория математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.

E-mail: ekatitova@mail.ru

Сухачёв Илья Сергеевич, магистрант, лаборатория математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.

E-mail: lifeandfree@gmail.com

I. G. Nizovtseva, P. K. Galenko, D. V. Alexandrov, S. V. Viharev, E. A. Titova, I. S. Sukhachev

Traveling waves in a profile of phase field: exact analytical solutions of a hyperbolic Allen–Cahn equation

Keywords: traveling wave, Allen–Cahn equation, first integral method, division theorem.

MSC: 00A79, 35L70

To obtain solutions of the hyperbolic Allen–Cahn equation, the first integral method, which follows from well-known Hilbert Null-theorem, is used. Exact analytical solutions are obtained in a form of traveling

waves, which define complete class of the hyperbolic Allen–Cahn equation. It is shown that two subclasses of solutions exist within this complete class. The first subclass exhibits continual solutions and the second subclass is represented by solutions with singularity at the origin of coordinate system. Such non-uniqueness of solutions stands a question about stable attractor, i. e., about the traveling wave to which non-stationary solutions may attract. The obtained solutions include earlier solutions for the parabolic Allen–Cahn equation in a form of finite number of tanh-functions.

REFERENCES

1. Cahn J.W., Allen S.M. A microscopic theory of domain wall motion and its experimental verification in Fe-Al alloy domain growth kinetics, *J. Phys. Colloq.*, 1977, vol. 38 (C7), pp. 51–54.
2. Allen S.M., Cahn J.W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening, *Acta Metall.*, 1979, vol. 27, pp. 1085–1095.
3. Wheeler A., Boettinger W.J., McFadden G.B. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys, *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, no. 10, pp. 7424–7440.
4. Gouyet J.F. Generalized Allen–Cahn equations to describe far-from-equilibrium order-disorder dynamics, *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 1695–1710.
5. Fife P.C., Lacey A.A. Motion by curvature in generalized Cahn–Allen models, *J. Stat. Phys.*, 1994, vol. 77, no. 1-2, pp. 173–181.
6. Beneš M., Chalupický V., Mikula K. Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation, *Applied Numerical Mathematics*, 2004, vol. 51, pp. 187–205.
7. Alfaro M., Hilhorst D. Generation of interface for an Allen–Cahn equation with nonlinear diffusion, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, vol. 5, pp. 1–12.
8. Caginalp G., Chen X. Phase field equations in the singular limit of sharp interface problems, *IMA Volume of Mathematics and Its Applications*, 1992, vol. 43, pp. 1–28.
9. Bates P.W., Chen F. Spectral analysis and multidimensional stability of traveling waves for nonlocal Allen–Cahn equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 273, pp. 45–57.
10. Galenko P., Jou D. Diffuse-interface model for rapid phase transformations in nonequilibrium systems, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, pp. 046125–1–13.
11. Yang Y., Humadi H., Buta D., Laird B.B., Sun D., Hoyt J.J., Asta M. Atomistic simulations of nonequilibrium crystal-growth kinetics from alloy melts, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, pp. 025505–1–4.
12. Jou D., Galenko P. Coarse graining for the phase-field model of fast phase transitions, *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, pp. 042151–1–8.
13. Field R.J., Burger M. (Eds.) *Oscillations and traveling waves in chemical systems*, New York: Wiley, 1985, 681 p.
14. Galenko P.K., Abramova E.V., Jou D., Danilov D.A., Lebedev V.G., Herlach D.M. Solute trapping in rapid solidification of a binary dilute system: A phase-field study, *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 84, pp. 041143–1–17.
15. Salhoumi A., Galenko P.K. Gibbs–Thomson condition for the rapidly moving interface in a binary system, *Physica A*, 2016, vol. 447, pp. 161–171.
16. Feng Zh. The first-integral method to study the Burgers–Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2002, vol. 35, pp. 343–349.
17. Lu B., Zhang H-Q., Xie F.-D. Traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations by using the first integral method, *Applied Mathematics and Computations*, 2010, vol. 216, pp. 1329–1336.
18. Bourbaki N. *Commutative Algebra*, Springer, 1998, 625 p.
19. Feng Zh., Wang X. The first integral method to the two-dimensional Burgers–Korteweg-de Vries equation, *Physics Letters A*, 2003, vol. 308, pp. 173–178.
20. Ahmed Ali A.H., Raslan K.R. New solutions for some important partial differential equations, *International Journal of Nonlinear Science*, 2007, vol. 4, pp. 109–117.
21. Wazwaz A.-M. The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2004, vol. 154, no. 3, pp. 713–723.
22. Taşcan F., Bekir A. Travelling wave solutions of Cahn–Allen equation by using first integral method, *Applied Mathematics and Computation*, 2009, vol. 207, no. 1, pp. 279–282.
23. Choi J.-W., Lee H.G., Jeong D., Kim J. An unconditionally gradient stable numerical method for solving the Allen–Cahn equation, *Physica A*, 2009, vol. 388, pp. 1791–1803.
24. Herlach D.M., Galenko P.K., Holland-Moritz D. *Metastable solids from undercooled melts*, Amsterdam: Elsevier, 2007, 432 p.

Nizovtseva Irina Gennad'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Mathematical Modeling of Physical and Chemical Processes in Multiphase Media, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: nizovtseva.irina@gmail.com

Galenko Petr Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Physics and Astronomy, Friedrich Schiller University, Jena, 07743, Germany.

E-mail: Peter.Galenko@uni-jena.de

Alexandrov Dmitri Valer'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Laboratory of Multi-Scale Mathematical Modeling, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: Dmitri.Alexandrov@urfu.ru

Vikharev Sergei Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Combinatorial Algebra, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: sergey@viharev.com

Titova Ekaterina Alexandrovna, Post-Graduate Student, Laboratory of Mathematical Modeling of Physical and Chemical Processes in Multiphase Media, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: ekatitova@mail.ru

Sukhachev Il'ya Sergeevich, Master Student, Laboratory of Mathematical Modeling of Physical and Chemical Processes in Multiphase Media, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: lifeandfree@gmail.com