УДК 517.925.44

© *Т. А. Корчемкина*

О НЕПРОДОЛЖАЕМЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматриваются дифференциальные уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с регулярной нелинейностью и ограниченным отрицательным потенциалом, зависящим от независимой переменной, решения и его производной. Приведены результаты о существовании асимптот у нетривиальных решений и оценки расстояний до асимптот решений справа и слева от начальной точки, показана непрерывная зависимость положений асимптот нетривиальных решений от начальных данных. Также доказано существование решений уравнения с произвольной наперед заданной областью определения.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, второй порядок, уравнение Эмдена–Фаулера, непрерывная зависимость положения асимптот, заданная область определения.

DOI: 10.20537/vm160209

Введение

Рассматривается уравнение

$$y'' - p(x,\, y,\, y')\; |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 1. \tag{0.1}$$

Предполагается, что функция $p(x,\, y,\, y')$ непрерывна по совокупности переменных, равномерно по x липшицева по последним двум аргументам и удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \leqslant p(x,\, y,\, y') \leqslant M < \infty. \tag{0.2}$$

В [1] И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией в случае $p = p(x)$ были изучены свойства решений уравнения (0.1), а также приведена асимптотическая классификация максимально продолженных решений. Оценки расстояний до асимптот решений для нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка в случае $p \equiv p_0$ получены Э. Митидиери и С. И. Похожаевым в [2]. Непродолжаемые решения уравнений типа Эмдена–Фаулера высокого порядка изучались И. В. Асташовой в [3]. Результат о существовании решений уравнений типа Эмдена–Фаулера третьего порядка с произвольной наперед заданной областью определения доказан И. В. Асташовой в [4]. Существование решений с заданной областью определения уравнения (0.1) в случае $p = p(x)$ было доказано В. А. Кондратьевым и В. А. Никишкиным в [5].

§ 1. Предварительные результаты

С использованием методов, изложенных в работах [6, часть 1] и [7], для нетривиальных решений уравнения (0.1) были получены следующие оценки расстояний до асимптоты.

Лемма 1 (см. [7]). *Пусть функция $p(x,\, y,\, y')$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам (0.2) и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда существует такая константа $\mu = \mu(m, k) > 0$, что любое нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (0.1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условию $y(x_0)\, y'(x_0) > 0$ или $y(x_0) = 0$, имеет вертикальную асимптоту $x = x^* > x_0$, причем*

$$x^* - x_0 \leqslant \bigl(\mu\, |y'(x_0)|\bigr)^{-\frac{k-1}{k+1}}\,.$$

Если же нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\,y'(x_0)<0$ или $y(x_0)=0$, то $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x=x_*<x_0$, причем

$$x_0-x_*\leqslant\big(\mu\,|y'(x_0)|\big)^{-\frac{k-1}{k+1}}\,.$$

Лемма 2 (см. [7]). *Пусть функция $p(x,\,y,\,y')$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам* (0.2) *и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда существует такая константа $\nu=\nu(m,k)>0$, что любое максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения* (0.1), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условию $y(x_0)\,y'(x_0)>0$, имеет вертикальную асимптоту $x=x^*>x_0$, причем*

$$x^*-x_0\leqslant(\nu\,|y(x_0)|)^{-\frac{k-1}{2}}\,.$$

Если же $y(x)$ в некоторой точке x_0 удовлетворяет условию $y(x_0)\,y'(x_0)<0$, то $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x=x_*<x_0$, причем

$$x_0-x_*\leqslant(\nu\,|y(x_0)|)^{-\frac{k-1}{2}}\,.$$

Кроме того, существует такая константа $\eta=\eta(M,k)\ >\ 0$, что любое нетривиальное максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения (0.1), *в некоторой точке x_0 удовлетворяющее условию $y'(x_0)=0$, имеет вертикальные асимптоты $x=x^*>x_0$ и $x=x_*<x_0$, причем*

$$(\eta\,|y(x_0)|)^{-\frac{k-1}{2}}\leqslant x^*-x_0\leqslant(\nu\,|y(x_0)|)^{-\frac{k-1}{2}}\,,$$
$$(\eta\,|y(x_0)|)^{-\frac{k-1}{2}}\leqslant x_0-x_*\leqslant(\nu\,|y(x_0)|)^{-\frac{k-1}{2}}\,.$$

Замечание 1. Из лемм 1 и 2 следует, что любое нетривиальное решение уравнения (0.1), имеющее в некоторой точке нуль либо экстремум, имеет вертикальную асимптоту и слева, и справа от этой точки. Следовательно, любое такое решение определено на конечном интервале.

§ 2. Непрерывная зависимость положений асимптот от начальных данных

Покажем непрерывную зависимость положения асимптоты от начальных данных, пользуясь методами, изложенными в [4, 7].

Теорема 1. *Пусть функция $p(x,\,y,\,y')$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам* (0.2) *и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\widetilde{x}_0-x_0|<\delta$, $|z_0-y_0|<\delta$, $|z_1-y_1|<\delta$, $y_0\geqslant0$ и $y_1\geqslant0$ и не равны одновременно нулю, $z_0\geqslant0$ и $z_1\geqslant0$ и не равны одновременно нулю, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (0.1) *с начальными данными*

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0,\\ y'(x_0)=y_1 \end{cases}\tag{2.1}$$

и

$$\begin{cases} z(\widetilde{x}_0)=z_0,\\ z'(\widetilde{x}_0)=z_1 \end{cases}\tag{2.2}$$

соответственно имеют вертикальные асимптоты $x=x_1^*>x_0$ и $x=x_2^*>\widetilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_2^*-x_1^*|<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение задачи Коши (2.1). Для произвольного $\varepsilon>0$ существует значение

$$\widetilde{y}_1>\frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}},$$

где $\mu = \mu(m, k)$ — константа из леммы 1. Поскольку $y'(x) \to +\infty$ при $x \to x_1^*$, существует такая точка x_0', что $y'(x_0') = \widetilde{y}_1 > 0$, и тогда

$$(\mu\,\widetilde{y}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем

$$\widetilde{\delta} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{y}_1 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\right) > 0.$$

Тогда

$$\widetilde{\delta} < \widetilde{y}_1 - \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{y}_1 - \widetilde{\delta} > \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\mu\left(\widetilde{y}_1 - \widetilde{\delta}\right)\right)^{\frac{k-1}{k+1}} > \frac{2}{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\mu\left(\widetilde{y}_1 - \widetilde{\delta}\right)\right)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\widetilde{z}(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (0.1) с такими начальными данными $\widetilde{z}(x_0') = \widetilde{z}_0$, $\widetilde{z}'(x_0') = \widetilde{z}_1$, что $|\widetilde{z}_0 - y(x_0')| < \widetilde{\delta}$, $|\widetilde{z}_1 - \widetilde{y}_1| < \widetilde{\delta}$. Тогда, в силу леммы 1, решение $\widetilde{z}$ имеет вертикальную асимптоту $x = \widetilde{x}^* > x_0'$.

Так как $\widetilde{y}_1 - \widetilde{\delta} < \widetilde{z}_1 < \widetilde{y}_1 + \widetilde{\delta}$, то

$$(\mu\,\widetilde{z}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$|x_1^* - \widetilde{x}^*| \leqslant |x_1^* - x_0'| + |\widetilde{x}^* - x_0'| \leqslant (\mu\,\widetilde{y}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} + (\mu\,\widetilde{z}_1)^{-\frac{k-1}{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Рассмотрим $z(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (0.1) с начальными данными (2.2). В силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий для любого $\widetilde{\delta}$ существует такое δ, что если $|\widetilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|y_0 - z_0| < \delta$, $|y_1 - z_1| < \delta$, то $|y(x_0') - z(x_0')| < \widetilde{\delta}$, $|y'(x_0') - z'(x_0')| < \widetilde{\delta}$, причем $z(x)$ можно продолжить до x_0'. Тогда, в силу полученной выше оценки и леммы 1, получаем, что $z(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x_2^* > x_0' > \widetilde{x}_0$, причем $|x_1^* - x_2^*| < \varepsilon$.

Таким образом, непрерывная зависимость положения вертикальной асимптоты от начальных данных при условии их неотрицательности доказана. $\square$

В силу того, что при при заменах $x \mapsto -x$ и $y(x) \mapsto -y(x)$ уравнение (0.1) переходит в уравнение того же типа, справедливы следующие теоремы о непрерывной зависимости положений асимптот от начальных данных:

Теорема 2. *Пусть функция $p(x, y, y')$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам (0.2) и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\widetilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geqslant 0$ и $y_1 \leqslant 0$ и не равны одновременно нулю, $z_0 \geqslant 0$ и $z_1 \leqslant 0$ и не равны одновременно нулю, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (0.1) с начальными данными (2.1) и (2.2) соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = x_{1*} < x_0$ и $x = x_{2*} < \widetilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.*

Теорема 3. *Пусть функция $p(x, y, y')$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам (0.2) и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\widetilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leqslant 0$ и $y_1 \geqslant 0$ и не равны одновременно нулю, $z_0 \leqslant 0$ и $z_1 \geqslant 0$ и не равны одновременно нулю, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (0.1) с начальными данными (2.1) и (2.2) соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = x_{1*} < x_0$ и $x = x_{2*} < \widetilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.*

Теорема 4. *Пусть функция $p(x,\, y,\, y')$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам* (0.2) *и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 таких, что $|\widetilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leqslant 0$ и $y_1 \leqslant 0$ и не равны одновременно нулю, $z_0 \leqslant 0$ и $z_1 \leqslant 0$ и не равны одновременно нулю, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (0.1) *с начальными данными* (2.1) *и* (2.2) *соответственно имеют вертикальные асимптоты $x = x_1^* > x_0$ и $x = x_2^* > \widetilde{x}_0$ соответственно, причем $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.*

Замечание 2. Теоремы 1 и 4 утверждают непрерывную зависимость положений правых асимптот решений, соответственно положительных и отрицательных вблизи правых границ их областей определения. Теоремы 2 и 3 утверждают непрерывную зависимость положений левых асимптот решений, соответственно положительных и отрицательных вблизи левых границ их областей определения. Таким образом, с учетом замечания 1 можно говорить о непрерывной зависимости положений обеих (и левой, и правой) асимптот нетривиальных решений, имеющих в некоторой точке нуль или экстремум.

§ 3. Существование решений с заданной областью определения

С использованием факта непрерывной зависимости положений асимптот от начальных данных докажем существование максимально продолженных решений уравнения (0.1) с произвольной наперед заданной областью определения.

Теорема 5. *Пусть функция $p(x,\, y,\, y')$ удовлетворяет неравенствам* (0.2) *и условию Липшица по последним двум аргументам. Тогда для любых конечных значений x_* и $x^* > x_*$ существует решение уравнения* (0.1)*, определенное на $(x_*,\, x^*)$ и имеющее вертикальные асимптоты $x = x_*$ и $x = x^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим область $\Delta = \{(u, v) \in (-1, 1) \times (-1, 1)\colon u < v\}$ и отображение $\Gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \Delta$, переводящее пару начальных данных $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ в пару $(\operatorname{th} x_*,\, \operatorname{th} x^*) \in \Delta$, где x_* и x^* — соответственно левая и правая границы области определения максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения (0.1), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = 0$. В силу замечания 1 нетривиальные максимально продолженные решения с такими начальными данными определены на конечном интервале, следовательно, $\Gamma(\mathbb{R}^2) \subset \Delta$. Также в силу замечания 2 и непрерывности функции $\operatorname{th} x$ отображение Γ, построенное таким образом, непрерывно по каждому из своих аргументов.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\Gamma(\mathbb{R}^2) \supset \Delta$. Действительно, справедливость этого вложения означает, что у любой точки $(u,\, v) \in \Delta$ существует прообраз в $\mathbb{R}^2$, то есть для любых конечных значений $x_* < x^*$ существует решение уравнения (0.1), имеющее экстремум, определенное на $(x_*,\, x^*)$ и имеющее вертикальные асимптоты $x = x_*$ и $x = x^*$.

Итак, пусть $(u_0, v_0) \in \Delta$, то есть $-1 < u_0 = \operatorname{th} x_* < v_0 = \operatorname{th} x^* < 1$. Построим замкнутый контур $L \subset \mathbb{R}^2$ так, чтобы его образ $\Gamma(L) \subset \Delta$ проходил строго вокруг $(u_0,\, v_0)$.

Пусть $x_1 = \frac{x_* + x^*}{2}$, а $y_0 > 0$ выбрано достаточно большим, чтобы замыкание области определения соответствующего решения $y_1(x)$ уравнения (0.1) с начальными данными $y_1(x_1) = y_0$, $y'(x_1) = 0$ лежало в интервале $(x_*,\, x^*)$. Этого можно добиться, так как в силу леммы 2 расстояние от точки экстремума x_1 до вертикальных асимптот слева $x = x_{*1}$ и справа $x = x_1^*$ можно оценить следующим образом:

$$x_1^* - x_1 \leqslant (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}}, \qquad x_1 - x_{*1} \leqslant (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}},$$

где $\nu = \nu(m, k)$ — положительная константа. Подобрав достаточно большое $y_0 > 0$, мы получим

$$x_1^* \leqslant x_1 + (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}} < x^*, \qquad x_{*1} \geqslant x_1 - (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}} > x_*,$$

то есть вложение замыкания $[x_{*1}, x_1^*]$ области определения решения $y_1(x)$ в интервал (x_*, x^*).

Таким образом, $x_* < x_{*1} < x_1^* < x^*$, поэтому в силу монотонности функции $\operatorname{th} x$ точка $(u_1, v_1) = \Gamma(x_1,\, y_0)$ лежит правее и ниже точки (u_0, v_0), то есть $u_1 > u_0$, $v_1 < v_0$.

Далее, рассмотрим точку $(x_*,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и соответствующее ей решение $y_2(x)$ уравнения (0.1) с начальными данными $y_2(x_*) = y_0$, $y_2'(x_*) = 0$. Отметим, что в силу выбора значений y_0 и $x_1 > x_*$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$x_2^* \leqslant x_* + (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}} < x_1 + (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}} < x^*.$$

Таким образом, $x_2^* < x^*$, и поскольку решение определено в точке x_*, то $x_{*2} < x_*$, значит, точка $(u_2, v_2) = \Gamma(x_*,\, y_0)$ лежит левее и ниже точки (u_0, v_0), то есть $u_2 < u_0$, $v_2 < v_0$.

Зададим первый отрезок в виде

$$L_1 = \{(x_t,\, y_0) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \quad x_t = x_1 + t\,(x_* - x_1) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Его образ $\Gamma(L_1)$ соединяет точку (u_1, v_1) с точкой (u_2, v_2). Кроме того, в силу выбора y_0 и монотонности функции $\operatorname{th} x$ кривая $\Gamma(L_1)$ проходит строго ниже точки (u_0, v_0).

Теперь рассмотрим точку $(x_1,\, z_0) \in \mathbb{R}^2$ и соответствующее ей решение $y_3(x)$ уравнения (0.1) с начальными данными $y_3(x_1) = z_0 > 0$, $y_3'(x_1) = 0$, где z_0 выбрано достаточно маленьким, чтобы решение $y_3(x)$ было продолжаемо на весь отрезок $[x_*, x^*]$. Этого можно добиться в силу следующих оценок, полученных в лемме 2:

$$x_3^* - x_1 \geqslant (\eta\, z_0)^{-\frac{k-1}{2}}, \qquad x_1 - x_{*3} \geqslant (\eta\, z_0)^{-\frac{k-1}{2}}.$$

Подобрав достаточно маленькое $z_0 > 0$, получим

$$x_3^* \geqslant x_1 + (\eta\, z_0)^{-\frac{k-1}{2}} > x^*, \qquad x_{*3} \leqslant x_1 - (\eta\, z_0)^{-\frac{k-1}{2}} < x_*.$$

Таким образом, $x_{*3} < x_* < x^* < x_3^*$, а значит, $u_3 < u_0$, $v_3 > v_0$ и точка $(u_3,\, v_3) = \Gamma(x_1, z_0)$ лежит левее и выше точки $(u_0,\, v_0)$.

Зададим второй отрезок как

$$L_2 = \{(x_*,\ y_t) : 1 \leqslant t \leqslant 2\}, \qquad y_t = y_0 + (t-1)\,(z_0 - y_0) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Образ $\Gamma(L_2)$ проходит строго левее точки $(u_0,\, v_0)$ в силу того, что соответствующие решения определены в точке x_*.

Третий отрезок зададим следующим образом:

$$L_3 = \{(x_t,\ z_0) : 2 \leqslant t \leqslant 3\}, \qquad x_t = x_* + (t-2)\,(x_1 - x_*) \quad \text{при} \quad 2 \leqslant t \leqslant 3.$$

Образ $\Gamma(L_3)$ проходит строго левее точки $(u_0,\, v_0)$ в силу монотонности функции $\operatorname{th} x$ и выбора z_0, и, следовательно, образ объединения отрезков $\Gamma(L_2 \cup L_3)$ соединяет точки $(u_2,\, v_2)$ и $(u_3,\, v_3)$ и проходит строго левее точки $(u_0,\, v_0)$.

Рассмотрим последнюю точку, $(x^*,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$, и соответствующее ей решение $y_4(x)$ уравнения (0.1) с начальными данными $y_4(x^*) = y_0$, $y_4'(x^*) = 0$. Отметим, что в силу выбора значений y_0 и $x_1 < x^*$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$x_{*4} \geqslant x^* - (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}} > x_1 - (\nu\, y_0)^{-\frac{k-1}{2}} > x_*.$$

Таким образом, $x_{*4} > x_*$, и поскольку решение определено в точке x^*, то $x_4^* > x^*$, и точка $(u_4, v_4) = \Gamma(x^*,\, y_0)$ лежит правее и выше точки (u_0, v_0), то есть $u_4 > u_0$, $v_4 > v_0$.

Зададим четвертый отрезок в виде

$$L_4 = \{(x_t,\, z_0) : 3 \leqslant t \leqslant 4\}, \qquad x_t = x_1 + (t-3)\,(x^* - x_1) \quad \text{при} \quad 3 \leqslant t \leqslant 4,$$

образ которого $\Gamma(L_4)$ проходит строго выше точки (u_0, v_0) в силу монотонности функции $\operatorname{th} x$ и выбора z_0.

Пятый отрезок:

$$L_5 = \{(x^*,\ y_t) : 4 \leqslant t \leqslant 5\}, \qquad y_t = z_0 + (t-4)\,(y_0 - z_0) \quad \text{при} \quad 4 \leqslant t \leqslant 5.$$

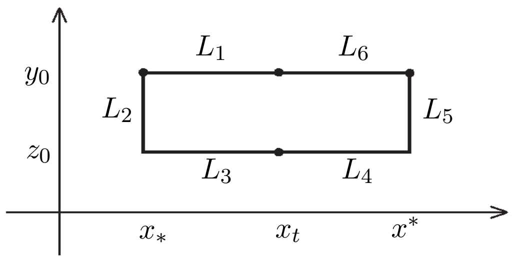
Образ $\Gamma(L_5)$ проходит строго выше точки $(u_0,\, v_0)$ в силу того, что соответствующие решения определены в точке x^*, и, следовательно, образ объединения отрезков $\Gamma(L_4 \cup L_5)$ соединяет точки (u_3, v_3) и (u_4, v_4) и проходит строго выше точки $(u_0,\, v_0)$.

Наконец, зададим шестой отрезок в виде

$$L_6 = \{(x_t,\ y_0) : 5 \leqslant t \leqslant 6\}, \qquad x_t = x^* + (t-5)\,(x_1 - x^*) \quad \text{при} \quad 5 \leqslant t \leqslant 6,$$

образ которого $\Gamma(L_6)$ соединяет точку (u_4, v_4) с точкой (u_1, v_1) и проходит строго правее точки (u_0, v_0) в силу выбора y_0.

Рассмотрим контур $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \cup L_6$.



Этот контур по построению является стягиваемым в точку в пространстве $\mathbb{R}^2$. При отображении Γ контур L переходит в замкнутый контур в области Δ, который, как показано выше, обходит точку $(u_0,\, v_0)$. В силу непрерывности Γ контур $\Gamma(L)$ — также стягиваемый в точку в $\Gamma(\mathbb{R}^2)$, что было бы невозможно, если бы $(u_0,\, v_0)$ не принадлежала множеству $\Gamma(\mathbb{R}^2)$.

Таким образом, $(u_0,\, v_0) \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$, а это означает, что в $\mathbb{R}^2$ существует прообраз точки $(u_0, v_0) = (\operatorname{th} x_*, \operatorname{th} x^*)$ при отображении Γ, и, следовательно, для любых значений x_* и $x^* > x_*$ существует решение уравнения (0.1), определенное на (x_*, x^*) и имеющее вертикальные асимптоты $x = x_*$ и $x = x^*$.

Теорема доказана. □

Замечание 3. Из доказательства теоремы следует, что для любых конечных x_* и $x^* > x_*$ существует именно положительное знакопостоянное максимально продолженное решение, определенное на интервале $(x_*,\, x^*)$ и имеющее на этом интервале экстремум. Аналогичным образом доказывается существование такого отрицательного знакопостоянного решения. Таким образом, существует по крайней мере два максимально продолженных решения, определенных на интервале $(x_*,\, x^*)$, для любых конечных x_* и x^*.

Перейдем к рассмотрению решений, определенных на полубесконечных интервалах.

Определение 1 (см. [1]). Решение уравнения (0.1) называется *кнезеровским на* $(x_0, +\infty)$, если оно удовлетворяет условию $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ при $x > x_0$.

Определение 2. Решение уравнения (0.1) называется *кнезеровским при убывании аргумента на* $(-\infty, x_0)$, если оно удовлетворяет условию $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ при $x < x_0$.

В работе [1] И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурией была обоснована справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. *Для любого $x_* \in \mathbb{R}$ существует кнезеровское решение уравнения* (0.1)*, имеющее слева вертикальную асимптоту $x = x_*$, определенное на интервале* $(x_*,\, +\infty)$ *и стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.*

Утверждение 2. *Для любого $x^* \in \mathbb{R}$ существует кнезеровское (при убывании аргумента) решение уравнения* (0.1)*, имеющее справа вертикальную асимптоту $x = x^*$, определенное на интервале $(-\infty, x^*)$ и стремящееся к нулю при $x \to -\infty$.*

С учетом того, что уравнение (0.1) имеет тривиальное решение, которое определено на всей числовой прямой, общей формулировкой для полученных выше результатов может служить следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть функция $p(x, y, y')$ непрерывна, равномерно по x липшицева по последним двум аргументам и удовлетворяет неравенствам* (0.2)*. Тогда для любых значений x_* и x^*, $-\infty \leqslant x_* < x^* \leqslant +\infty$, существует максимально продолженное решение уравнения* (0.1)*, определенное на (x_*, x^*).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
2. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2001. Т. 234. С. 3–383.
3. Astashova I. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden–Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. 2014. Article ID 174. 8 p.
4. Astashova I. Uniform estimates and existence of solutions with prescribed domain to nonlinear third-order differential equation // Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. New York: Springer, 2013. Vol. 47. P. 227–237.
5. Кондратьев В.А., Никишкин В.А. О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)y^k$ // Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. Саранск, 1980. С. 131–141.
6. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: Юнити-Дана, 2012. С. 22–288.
7. Дулина К.М., Корчемкина Т.А. О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения: Сборник трудов конференции. М.: МЭСИ, 2014. С. 19–27.

Поступила в редакцию 18.05.2016

Корчемкина Татьяна Александровна, студентка, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
E-mail: krtaalex@gmail.com

T. A. Korchemkina

On non-extensible solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with negative potential

Keywords: nonlinear differential equations, second-order, Emden–Fowler equations, continuous dependence of asymptote position, prescribed domain.

MSC: 34A99

Second-order Emden–Fowler type differential equations with regular nonlinearity and bounded negative potential depending on an independent variable, the solution and its first derivative are considered. The results on the existence of asymptotes of nontrivial solutions and estimates of the distance from the initial point to left and right asymptotes positions are given. Continuous dependence of the positions of left and right asymptotes of nontrivial solutions is obtained. The existence of a non-extensible solution with prescribed domain is proved.

REFERENCES

1. Kiguradze I.T., Chanturiya T.A. *Asimptoticheskie svoistva reshenii neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations), Moscow: Nauka, 1990, 432 p.
2. Mitidieri E., Pohozhaev S.I. A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2001, vol. 234, pp. 1–362.
3. Astashova I. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden–Fowler type differential equation, *Boundary Value Problems*, 2014, Article ID 174, 8 p.
4. Astashova I. Uniform estimates and existence of solutions with prescribed domain to nonlinear third-order differential equation, *Differential and Difference Equations with Applications*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, New York: Springer, 2013, vol. 47, pp. 227–237.
5. Kondrat'ev V.A., Nikishkin V.A. On the positive solutions of the equation $y'' = p(x)y^k$, *Nekotorye voprosy kachestvennoi teorii differentsial'nykh uravnenii i teorii upravleniya dvizheniem* (Some problems of the qualitative theory of differential equations and the theory of motion control), Saransk, 1980, pp. 131–141 (in Russian).
6. Astashova I.V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations, *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza* (Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis), Moscow: Unity-Dana, 2012, pp. 22–288 (in Russian).
7. Dulina K.M., Korchemkina T.A. On existence of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with prescribed domain, *Proceedings of the International Conference "Qualitative theory of differential equations and applications"*, Moscow State University of Economics, Statistics, and Informatics, 2014, pp. 19–27 (in Russian).

Received 18.05.2016

Korchemkina Tat'yana Aleksandrovna, Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: krtaalex@gmail.com