МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

УДК 517.926, 517.977

© *А. А. Козлов*

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГЛОБАЛЬНОЙ СКАЛЯРИЗУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Управление в системе (1) строится в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$ с измеримой и ограниченной матричной функцией $U(t)$, $t \geqslant 0$. Для замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

введено понятие равномерной глобальной квазидостижимости, которое является ослаблением равномерной глобальной достижимости — свойства системы (2), позволяющего за счет выбора функции $U(t)$, $t \geqslant 0$, для матрицы Коши $X_U(t,s)$ этой системы обеспечить выполнение равенств $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ при фиксированном $T > 0$ и произвольных $k \in \mathbb{N}$, $\det H_k > 0$. Доказано, что из равномерной глобальной квазидостижимости системы (2) следует глобальная скаляризуемость этой системы, то есть существование для произвольной наперед заданной локально интегрируемой и интегрально ограниченной скалярной функции $p = p(t)$, $t \geqslant 0$, такой измеримой и ограниченной матричной функции $U = U(t)$, $t \geqslant 0$, при которой система (2) асимптотически эквивалентна системе скалярного типа $\dot{z} = p(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$.

Ключевые слова: линейная управляемая система, показатели Ляпунова, глобальная скаляризуемость.

DOI: 10.20537/vm160208

Пусть дана линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов A и B. Замыкая эту систему при помощи управления u, заданного в виде линейной обратной связи

$$u = U(t)x, \tag{2}$$

где U — некоторая измеримая и ограниченная $(m \times n)$-матрица, получим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

коэффициенты которой также локально интегрируемы и интегрально ограничены.

Напомним некоторые необходимые нам в дальнейшем определения.

Определение 1 (см. [1, с. 247], [2, с. 153–154]). Линейное пребразование $z = L(t)y$ с обратимой абсолютно непрерывной матричной функцией $L = L(t)$, определенной на положительной полуоси со значениями во множестве $(n \times n)$-матриц и удовлетворяющей для всех $t \geqslant 0$ оценке

$$\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \sup_{t \geqslant 0} \int_t^{t+1} \|\dot{L}(\tau)\|\, d\tau < \infty, \tag{4}$$

называется *преобразованием Ляпунова* (здесь $\|\cdot\|$ — спектральная (операторная) норма матриц).

[1] Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

Определение 2 (см. [3]). Линейные системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами $\dot{y} = C(t)y$, $t \geqslant 0$, и $\dot{z} = D(t)z$, $t \geqslant 0$, связанные преобразованием Ляпунова, называются *асимптотически эквивалентными* (*по Богданову*).

Определение 3 (см. [4], [5, с. 325]). Линейная система вида

$$\dot{z} = p(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

со скалярной локально интегрируемой и интегрально ограниченной функцией $p = p(t)$, $t \geqslant 0$, называется *системой скалярного типа*.

Определение 4 (см. [4], [5, с. 326]). Будем говорить, что система (3) *глобально скаляризуема*, если для произвольной наперед заданной локально интегрируемой и интегрально ограниченной на положительной полуоси скалярной функции $p = p(t)$, $t \in [0, +\infty)$, существует такое измеримое и ограниченное матричное управление $U = U(t)$, $t \geqslant 0$, что система (3) с этим управлением асимптотически эквивалентна (по Богданову) системе (5).

Замечание 1. Поскольку изначально определения 3 и 4 формулировались для систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами и таким же управлением U, то в работах [4] и [5, с. 326] скалярная функция $p = p(t)$, $t \geqslant 0$, в этих определениях принадлежала пространству кусочно-непрерывных и ограниченных на положительной полуоси функций.

Наличие свойства глобальной скаляризуемости у линейных систем (3) (как с кусочно-непрерывными и ограниченными, так и с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами) позволяет успешно решать (см., напр., [4], [5, с. 326–340], [6–11]) задачи управления [5, с. 182] различными асимптотическими инвариантами [5, с. 46–80] системы (3). Напомним, что асимптотическими (ляпуновскими) инвариантами линейных однородных систем n-го порядка называются величины (свойства), относящиеся к этим системам, которые не меняются под действием преобразований Ляпунова. Асимптотическими инвариантами являются, например, свойства устойчивости, асимптотической устойчивости, правильности, приводимости и т. п.; полный спектр показателей Ляпунова, центральные, особые и экспоненциальные показатели, коэффициенты неправильности и т. п.

Пусть зафиксирован какой-либо асимптотический инвариант ι. Задача глобального управления этим асимптотическим инвариантом [5, с. 182] заключается в нахождении такого измеримого и ограниченного управления (2), что система (3) с этим управлением будет иметь любое возможное наперед заданное значение этого инварианта. Так, например, рассматривая в данной задаче в качестве асимптотического инварианта ι полный спектр показателей Ляпунова, получим [5, с. 183–185] *задачу глобального управления показателями Ляпунова*, т. е. задачу о построении для системы (1) обратной связи (2), обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = \overline{1, n}$, при произвольных заранее заданных вещественных числах $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$; здесь $\lambda_1(A + BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A + BU)$ — полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы (3). Рассматривая в качестве асимптотического инварианта свойство правильности системы (3), будем иметь [5, с. 330] *задачу глобальной управляемости правильности* этой системы и т. д.

Задача управления показателями Ляпунова и другими асимптотическими характеристиками общих (непериодических) нестационарных линейных систем впервые была сформулирована Е. Л. Тонковым. Задачи такого рода, а также бо́льшая часть известных на сегодняшний день результатов, полученных по их решению (включая также и вопросы о глобальной скаляризуемости систем (3)), содержатся в монографии [5].

Изначально задача глобальной скаляризуемости изучалась для систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами. Так, в работе [4] была установлена глобальная скаляризуемость систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами и кусочно равномерно непрерывной [5, с. 264] матрицей B при условии равномерной полной управляемости [12, 13] соответствующей линейной управляемой системы (1).

Для случая системы (3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами решение задачи о глобальной скаляризуемости в общем виде пока не найдено. Здесь получены лишь отдельные результаты. В частности, В. А. Зайцевым для линейной системы (1) с вышеуказанными коэффициентами было предложено [14] собственное обобщение свойства равномерной полной управляемости, на основании которого им была установлена [11] глобальная скаляризуемость системы (3) с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами, когда соответствующая ей линейная управляемая система (1) была представлена в форме Хессенберга. Кроме того, А. А. Козловым и И. В. Инц в статье[2] доказана глобальная скаляризуемость двумерной линейной системы (3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами при условии равномерной полной управляемости соответствующей системы (1). Последнее утверждение было установлено на основании введенного в той же статье понятия равномерной глобальной квазидостижимости системы (3).

Пусть M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой, т. е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{M}_n \doteq \mathrm{M}_{nn}$; $\mathrm{R}_n \subset \mathrm{M}_n$ — множество всех верхнетреугольных $(n \times n)$-матриц с положительными диагональными элементами. Для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ через $\mathcal{M}_n(r,\rho)$ и $\mathcal{R}_n(r,\rho)$ обозначим соответственно множества матриц $\mathcal{M}_n(r,\rho) := \{H \in \mathrm{M}_n : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}$ и $\mathcal{R}_n(r,\rho) := \{H \in \mathrm{R}_n : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}$. Пусть $X_U(t,s) \in \mathrm{M}_n$, $t,s \geqslant 0$, — матрица Коши системы (3) с управлением U; $X(t,s) := X_0(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, — матрица Коши системы (3) с нулевым управлением.

Определение 5 (см. [KI]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством:
1) *T-равномерной глобальной квазидостижимости относительно неограниченного множества* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, что для всякого $t_0 \geqslant 0$ найдется ортогональная матрица $F = F(t_0, r, \rho) \in \mathrm{M}_n$, при которой для произвольной матрицы $H \in \mathcal{R}_n(r,\rho)$ существует измеримое и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0,\ t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta(r,\rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (3) выполнение равенства

$$X_U(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0) F H F^{-1};$$

2) *T-равномерной глобальной квазидостижимости*, если она T-равномерно глобально квазидостижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;
3) *равномерной глобальной квазидостижимости*, если она T-равномерно глобально квазидостижима при некотором $T > 0$.

Равномерная глобальная квазидостижимость является ослаблением свойства равномерной глобальной достижимости (см. ниже определение 6 и пример 1). Последнее свойство используется в работах [4–11, 15–22] для доказательства глобальной управляемости различных асимптотических инвариантов линейных систем (3). Кроме того, наличие свойства равномерной глобальной достижимости у системы (3) является (см., например, [20, теорема 2], [5, теорема 25.3]) также и достаточным условием глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов [22] этой системы.

Определение 6 (см. [20], [5, с. 253]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством
1) *T-равномерной глобальной достижимости относительно неограниченного множества* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ найдется такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $H \in \mathcal{M}_n(r,\rho)$ и всякого $t_0 \geqslant 0$ существует измеримое и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta(r,\rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (3) выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0) H$;

[2][KI] Козлов А.А., Инц И.В. О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. (В печати).

2) *T-равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;
3) *равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима при некотором $T > 0$.

Замечание 2. Заметим, что определение 6 несколько отлично по форме от эквивалентных ему определений равномерной глобальной достижимости, сформулированных в [5, с. 253] и [20].

Покажем, что свойство равномерной глобальной квазидостижимости является более слабым по сравнению со свойством равномерной глобальной достижимости. Очевидно, имеет место включение $\mathcal{R}_n(r,\rho) \subset \mathcal{M}_n(r,\rho)$. Поэтому если система (3) равномерно глобально достижима, то для нее выполнено и свойство равномерной глобальной квазидостижимости, так как можно выбрать $F = E$. Теперь на конкретном примере убедимся, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Рассмотрим линейную управляемую систему (1) при $m = n = 2$, $A(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv E$. В этом случае замкнутая система (3) имеет вид

$$\dot{x} = U(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Предположим, что в системе (6) измеримое и ограниченное на положительной полуоси управление $U(t)$ при каждом $t \geqslant 0$ принимает значения во множестве $\mathbb{U}$ верхнетреугольных матриц. Из примера 25.2 работы [5, с. 260–263] следует, что данная система не является равномерно глобально достижимой относительно множества $\mathbb{U}$. С другой стороны, в том же примере было также установлено, что для произвольной матрицы $H \in \mathcal{R}_2(r,\rho)$ найдется управление $U \in \mathbb{U}$, обеспечивающее для матрицы Коши системы (6) с этим управлением при любом $k = 0, 1, \ldots$ равенство $X_U(k{+}1,k) = H$ и, значит, $X_U(k{+}1,k) = E \cdot H \cdot E^{-1}$. Последнее же соотношение означает 1-равномерную глобальную квазидостижимость системы (6) относительно множества $\mathbb{U}$.

Из результатов статьи [KI] (см. теоремы 1, 2 и следствие 1) вытекает, что для двумерных линейных дифференциальных систем (3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерная глобальная квазидостижимость является достаточным условием глобальной скаляризуемости этих систем. Оказывается, что такое же утверждение справедливо и для систем (3) произвольной размерности n фазового пространства, в чем и заключается основной результат настоящей работы, т. е. имеет место

Теорема 1. *Пусть система* (3) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости. Тогда эта система является глобально скаляризуемой.*

Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем. Всюду далее будем считать, что для системы (3) число $T > 0$ из определения 5 равномерной глобальной квазидостижимости зафиксировано. Тогда из свойства интегральной ограниченности [1, с. 252] матриц A и B вытекает существование таких вещественных чисел $a, b \geqslant 1$, что для всех $t \geqslant 0$ выполняются оценки $\displaystyle\int_t^{t+T} \|A(\tau)\|\,d\tau \leqslant a < +\infty$, $\displaystyle\int_t^{t+T} \|B(\tau)\|\,d\tau \leqslant b < +\infty$. Зафиксируем также числа a и b.

Замечание 3. Применяя лемму Гронуолла–Беллмана [2, с. 108 – 109], а также определение величины a, нетрудно установить, что при любых $t, s \geqslant 0$ таких, что $|t - s| \leqslant T$, для матрицы Коши $X(t,s)$ выполняется оценка

$$\|X(t,s)\| \leqslant \exp(a). \tag{7}$$

Прежде чем переходить к доказательству основной теоремы, установим следующую лемму.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

Лемма 1. *Если система* (3) *равномерно глобально квазидостижима, то при любых числах* $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *существуют такие ортогональные матрицы* $F_k = F((k-1)T, r, \rho) \in \in \mathrm{M}_n$, *что, какова бы ни была последовательность матриц* $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_n(r,\rho)$, *найдется измеримое и ограниченное управление* $U = U(t)$, $t \in [0, +\infty)$, *при котором для всякого* $k \in \mathbb{N}$ *выполняются равенства* $X_U(kT, (k-1)T) = X(kT, (k-1)T)F_k H_k F_k^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные числа $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$. Поскольку система (3) обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости, то для всякого $k \in \mathbb{N}$ построим ортогональные $(n \times n)$-матрицы $F_k := F((k-1)T, r, \rho)$ и для любой фиксированной последовательности матриц $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_n(r,\rho)$ найдем измеримые и ограниченные матричные управления $U_k = U_k(t)$, $t \in [(k-1)T, kT]$, удовлетворяющие оценке $\|U_k(t)\| \leqslant \theta(r,\rho) = \theta$, при которых выполняется равенство $X_{U_k}(kT, (k-1)T) = X(kT, (k-1)T)F_k H_k F_k^{-1}$. Положим $U(t) \equiv U_k(t)$ при всех $t \in [(k-1)T, kT)$, $k \in \mathbb{N}$. В силу измеримости и ограниченности управлений U_k на своих областях определения, выбранное матричное управление U также измеримо и ограничено при всех $t \geqslant 0$, причем для любого $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [(k-1)T, kT]$ справедлива равномерная по $k \in \mathbb{N}$ оценка $\|U(t)\| = \|U_k(t)\| \leqslant \theta$. Кроме того, для матрицы Коши системы (3) с выбранным управлением U при каждом $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $X_U(kT, (k-1)T) = X_{U_k}(kT, (k-1)T) = X(kT, (k-1)T)F_k H_k F_k^{-1}$. Лемма 1 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1 будем проводить в соответствии с подходом, описанным в работах [4], [5, с. 325–328], [KI]. Пусть система (3) обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости. Возьмем любую локально интегрируемую и интегрально ограниченную скалярную функцию $p : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Пусть $\mathsf{p} := \sup\{\int_t^{t+T} |p(\tau)|\, d\tau,\ t \geqslant 0\}$. Положим $\rho := \exp(-n(\mathsf{p} + a))$ и $r := 1 + \exp(\mathsf{p} + a)$. Тогда в силу очевидных неравенств $\mathsf{p} \geqslant 0$ и $a \geqslant 1$, вытекающих из определения величин a и p, выполняются соотношения $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$. На основании леммы 1 для всякого натурального числа k найдутся такие ортогональные матрицы $F_k := F((k-1)T, r, \rho) \in \mathrm{M}_n$, что для любой последовательности матриц $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_n(r,\rho)$ существует измеримое и ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in [0, +\infty)$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (3) с этим управлением равенства $X_U(kT, (k-1)T) = X(kT, (k-1)T)F_k H_k F_k^{-1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Для определенных выше чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ произведем выбор последовательности матриц $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_n(r,\rho)$. По теореме о QR-разложении [23, с. 139], при всяком $k \in \mathbb{N}$ для обратимой матрицы $(F_{k+1}^{-1} \cdot X(kT, (k-1)T) \cdot F_k) \in \mathrm{M}_n$ найдутся ортогональная матрица $Q_k \in \mathrm{M}_n$ и верхняя треугольная матрица $R_k \in \mathrm{M}_n$ с положительными диагональными элементами такие, что выполняется равенство $F_{k+1}^{-1} \cdot X(kT, (k-1)T) \cdot F_k = Q_k R_k$, из которого следуют соотношения $X(kT, (k-1)T)F_k R_k^{-1} F_k^{-1} = F_{k+1} Q_k F_k^{-1}$ и $R_k = Q_k^{-1} F_{k+1}^{-1} X(kT, (k-1)T)F_k$. Отсюда, ввиду формулы (7) замечания 3, ортогональности матриц F_k и Q_k, а также верхнетреугольности матриц $R_k^{\pm 1}$, $k = 1, 2, \ldots$, при всяком $k \in \mathbb{N}$ для модулей диагональных элементов $r_{ii}^{(k)}$ и $1/r_{ii}^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$, соответственно матриц R_k и R_k^{-1} получим не зависящие от k оценки

$$
\begin{aligned}
|r_{ii}^{(k)}| &\leqslant \|R_k\| \leqslant \|Q_k^{-1}\| \cdot \|F_{k+1}^{-1}\| \cdot \|X(kT, (k-1)T)\| \cdot \|F_k\| \leqslant \exp(a), \\
|1/r_{ii}^{(k)}| &\leqslant \|R_k^{-1}\| \leqslant \|Q_k\| \cdot \|F_{k+1}\| \cdot \|X((k-1)T, kT)\| \cdot \|F_k^{-1}\| \leqslant \exp(a),
\end{aligned} \tag{8}
$$

и, ввиду положительности этих элементов, $\exp(-a) \leqslant 1/r_{ii}^{(k)} \leqslant \exp(a)$. Тогда, применяя верхнетреугольность матриц R_k^{-1}, $k \in \mathbb{N}$, для всякого $k \in \mathbb{N}$ имеем соотношения

$$
\det R_k^{-1} = \prod\nolimits_{i=1}^{n} (r_{ii}^{(k)})^{-1} \geqslant \exp(-na). \tag{9}
$$

При любых $s, t \geqslant 0$ обозначим через $\varphi(t,s)$ функцию $\varphi(t,s) := \exp \int_s^t p(\tau)\, d\tau$. Тогда для функции $\varphi(t,s)$ при всех $t, s \geqslant 0$ выполняются соотношения $\varphi(t,s) = \varphi^{-1}(s,t)$, $\varphi(t,s) = \varphi(t,\tau) \cdot \cdot \varphi(\tau, s)$ и неравенство $\exp(-\mathsf{p}) \leqslant \varphi(kT, (k-1)T) \leqslant \exp(\mathsf{p})$, верное при всяком $k \in \mathbb{N}$.

При каждом $k = 1, 2, \ldots$ определим матрицы $H_k \in \mathrm{M}_n$, полагая $H_k := \varphi(kT, (k-1)T) \cdot R_k^{-1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу определения последовательности матриц $\{R_k^{-1}\}_{k=1}^{\infty}$ и очевидной положительности функции $\varphi(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, при всяком $k \in \mathbb{N}$ матрица $H_k \in \mathrm{M}_n$ — верхняя треугольная с положительными диагональными элементами, причем, ввиду неравенств (8) и (9), а также свойств функции $\varphi(t, s)$, для ее нормы $\|H_k\|$ и определителя $\det H_k$ получим не зависящие от $k \in \mathbb{N}$ оценки

$$\|H_k - E\| \leqslant 1 + \|H_k\| \leqslant 1 + \varphi(kT, (k-1)T) \cdot \|R_k^{-1}\| \leqslant 1 + \exp(\mathsf{p}) \cdot \exp(a) = 1 + \exp(\mathsf{p} + a) = r,$$

$$\det H_k = \det(\varphi(kT, (k-1)T) \cdot R_k^{-1}) = (\varphi(kT, (k-1)T))^n \cdot \det R_k^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \exp(-n\mathsf{p}) \cdot \exp(-na) = \exp(-n(a + \mathsf{p})) = \rho,$$

которые показывают, что выбранная последовательность матриц $H_k \in \mathrm{M}_n$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежит множеству матриц $\mathcal{R}_n(r, \rho)$ и поэтому удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда существует такое измеримое и ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in [0, +\infty)$, обеспечивающее при всех $k \in \mathbb{N}$ для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) с этим управлением равенства

$$X_U(kT, (k-1)T) = X(kT, (k-1)T) \cdot F_k \cdot H_k \cdot F_k^{-1} =$$
$$= \varphi(kT, (k-1)T) \cdot X(kT, (k-1)T) \cdot F_k \cdot R_k^{-1} \cdot F_k^{-1} =$$
$$= \varphi(kT, (k-1)T) \cdot F_{k+1} \cdot Q_k \cdot F_k^{-1}.$$

При всяком $s = 1, \ldots, k$ перемножая матрицы Коши $X_U(sT, (s-1)T)$, получим равенства

$$X_U(kT, 0) = X_U(kT, (k-1)T) \cdot X_U((k-1)T, (k-2)T) \cdot \ldots \cdot X_U(T, 0) =$$
$$= \varphi(kT, (k-1)T) \cdot \varphi((k-1)T, (k-2)T) \cdot \ldots \cdot \varphi(T, 0) \cdot$$
$$\cdot (F_{k+1} Q_k F_k^{-1}) \cdot (F_k Q_{k-1} F_{k-1}^{-1}) \cdot \ldots \cdot (F_2 Q_1 F_1^{-1}) =$$
$$= \varphi(kT, 0) \cdot F_{k+1} \cdot Q_k \cdot Q_{k-1} \cdot \ldots \cdot Q_1 \cdot F_1^{-1} =: \varphi(kT, 0) \cdot \widetilde{Q}_k.$$

Здесь матрица $\widetilde{Q}_k$ является ортогональной, поскольку представляет собой произведение ортогональных матриц.

Установим, что при всяком $t \geqslant 0$ матричная функция $L(t) := \varphi(0, t) X_U(t, 0)$ является матрицей Ляпунова [1, с. 247], т. е. она является такой абсолютно непрерывной матричной функцией, для которой выполняется неравенство (4). Поскольку $\varphi(0, t)$ и $X_U(t, 0)$ являются при всех $t \geqslant 0$ абсолютно непрерывными функциями, то очевидно, что и функция $L(t)$, $t \geqslant 0$, является абсолютно непрерывной как произведение абсолютно непрерывных функций. Осталось показать, что для функции $L(t)$ при любом $t \geqslant 0$ имеет место неравенство (4). Поскольку $U = U(t)$ — ограниченная для всех $t \geqslant 0$ матричная функция, то существует величина $\theta > 0$, при которой справедлива оценка $\|U(t)\| \leqslant \theta$, $t \in [0, +\infty)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [(k-1)T, kT]$, ввиду определений матрицы Коши $X_U(t, s)$, функции $\varphi(t, s)$, величин a, b, p, θ, а также ортогональности матриц $\widetilde{Q}_k^{\pm 1}$, выполняются соотношения

$$\|L(t)\| = \|\varphi(0, t) \cdot X_U(t, kT) \cdot X_U(kT, 0)\| \leqslant |\varphi(0, t)| \cdot \|X_U(t, kT)\| \cdot \|X_U(kT, 0)\| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(0, kT)| \cdot |\varphi(kT, t)| \cdot \exp\left(\int_{kT}^{t} \|A(\tau) + B(\tau)U(\tau)\|\, d\tau\right) \cdot |\varphi(kT, 0)| \cdot \|\widetilde{Q}_k\| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(kT, t)| \cdot \exp\left(\int_{(k-1)T}^{kT} \|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|\, \|U(\tau)\|\, d\tau\right) \cdot 1 \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(kT, (k-1)T) \cdot \exp\left(a + \theta \cdot \int_{(k-1)T}^{kT} \|B(\tau)\|\, d\tau\right) \leqslant \exp(\mathsf{p} + a + b\theta) =: l < +\infty, \qquad (10)$$

$$\|L^{-1}(t)\| = \|\varphi(t, 0) \cdot X_U(0, kT) \cdot X_U(kT, t)\| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi(t,0)|\cdot|\varphi(0,kT)|\cdot\|\widetilde{Q}_k^{-1}\|\cdot\|X_U(kT,t)\|\leqslant|\varphi(t,kT)|\cdot 1\cdot\|X_U(kT,t)\|\leqslant$$
$$\leqslant\varphi(kT,kT)\cdot\exp(a+b\theta)=\exp(a+b\theta)\leqslant l<+\infty. \qquad (11)$$

Ввиду определения числа T найдется $q\in\mathbb{N}$, при котором выполняется неравенство $qT\geqslant 1$. Зафиксируем такое q. На основании определения матрицы Коши $X_U(t,s)$ и функции $\varphi(t,s)$, $t,s\geqslant 0$, имеют место равенства

$$\dot L(t)=\varphi(0,t)\dot X_U(t,0)+\dot\varphi(0,t)X_U(t,0)=(A(t)+B(t)U(t)-\ p(t)E)L(t),$$

из которых ввиду определений величин T, a, b, θ, p и l получим оценки

$$\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+1}\|\dot L(\tau)\|\,d\tau=\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+1}\|(A(\tau)+B(\tau)U(\tau)-p(\tau)E)L(\tau)\|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+qT}\|(A(\tau)+B(\tau)U(\tau)-p(\tau)E)L(\tau)\|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant q\cdot\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+T}\|(A(\tau)+B(\tau)U(\tau)-p(\tau)E)L(\tau)\|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant q\cdot l\cdot\left(\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+T}\|(A(\tau)\|\,d\tau+\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+T}\|B(\tau)\|\cdot\|U(\tau)\|\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\sup_{t\geqslant0}\int_t^{t+T}(|p(\tau)|\cdot\|E\|)\ d\tau\right)\leqslant(a+b\theta+\mathsf{p})ql<+\infty,$$

устанавливающие интегральную ограниченность $\|\dot L(t)\|$ для любых $t\in[0,+\infty)$. Тогда из последних оценок, а также формул (10) и (11) следует выполнение неравенства (4). Поэтому абсолютно непрерывная функция $L(t)=\varphi(0,t)X_U(t,0)$ является матрицей Ляпунова.

Применим ляпуновское преобразование $x=L(t)z$ к системе (3) с найденным управлением $U=U(t)$, $t\in[0,+\infty)$. Тогда справедливы соотношения

$$\dot z=(L^{-1}(t)x)^{\cdot}=-L^{-1}(t)\dot L(t)L^{-1}(t)x+L^{-1}(t)\dot x=$$
$$=-L^{-1}(t)(\dot\varphi(0,t)\cdot X_U(t,0)+\varphi(0,t)\cdot\dot X_U(t,0))L^{-1}(t)x+L^{-1}(t)\dot x=$$
$$=-L^{-1}(t)(-p(t)\varphi(0,t)\cdot X_U(t,0)+\varphi(0,t)\cdot(A(t)+B(t)U(t))\,X_U(t,0))L^{-1}(t)x+L^{-1}(t)\dot x=$$
$$=-L^{-1}(t)(A(t)+B(t)U(t)-p(t)E)\cdot(\varphi(0,t)\cdot X_U(t,0))\cdot L^{-1}(t)x+L^{-1}(t)\dot x=$$
$$=-L^{-1}(t)(A(t)+B(t)U(t)-p(t)E)x+L^{-1}(t)(A(t)+B(t)U(t))x=$$
$$=L^{-1}(t)p(t)x=p(t)L^{-1}(t)x=p(t)z,$$

которые показывают асимптотическую эквивалентность системы (3) с найденным управлением U и скалярной системы (5) с наперед заданной локально интегрируемой и интегрально ограниченной функцией $p=p(t)$, $t\geqslant 0$. Теорема 1 доказана. □

Применяя теорему для случая $p(t)\equiv 0$, $t\in[0,+\infty)$, установим следующее утверждение.

Следствие 1. *Если система* (3) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами обладает свойством равномерной глобальной квазидостижимости, то существует такое измеримое и ограниченное управление* $U:[0,+\infty]\to\mathrm{M}_n$, *что система* (3) *с этим управлением асимптотически эквивалентна системе с нулевой правой частью, т. е. системе вида*

$$\dot y=0,\quad y\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 480 с.
3. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.
4. Попова С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
5. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
6. Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1048–1054.
7. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
8. Козлов А.А., Макаров Е.К. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 621–627.
9. Козлов А.А. Об управлении полной совокупностью ляпуновских инвариантов линейных систем в невырожденном случае // Труды Института математики НАН Беларуси. 2007. Т. 15. № 2. С. 33–37.
10. Козлов А.А., Инц И.В., Бурак А.Д. Глобальная управляемость отдельных асимптотических инвариантов двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Молодежь в науке – 2013: Приложение к журналу «Весцi Нацыянальнай акадэмii навук». Ч. 2. Сер. физико-математических наук. 2014. С. 37–45.
11. Зайцев В.А. Равномерная полная управляемость и глобальное управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 3. С. 318–337.
12. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
13. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
14. Зайцев В.А. Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 2. С. 157–179.
15. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 60-67.
16. Козлов А.А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1319–1335.
17. Козлов А.А., Бурак А.Д. Об управлении характеристическими показателями трехмерных линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами // Веснiк Вiцебскага Дзяржаўнага ўнiверсiтэта. 2013. № 5 (77). С. 11–31.
18. Tonkov E.L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2000. Suppl. 1. P. S228–S253.
19. Зайцев В.А. Глобальная ляпуновская приводимость двумерных управляемых систем с кусочно постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2002. № 1. С. 3–12.
20. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. № 1. С. 31–62.
21. Зайцев В.А. Достижимость и ляпуновская приводимость линейных управляемых систем // Оптимизация, управление, интеллект: Сб. статей. ИДСТУ СО РАН. Иркутск, 2005. № 2 (10). С. 76–84.
22. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
23. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

Поступила в редакцию 04.04.2016

Козлов Александр Александрович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: kozlovaa@tut.by

A. A. Kozlov

On the sufficient condition of global scalarizability of linear control systems with locally integrable coefficients

Keywords: linear control system, Lyapunov exponents, global scalarizability.

MSC: 34D08, 34H05, 93C15

We consider a linear time-varying control system with locally integrable and integrally bounded coefficients

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

We construct control of the system (1) as a linear feedback $u = U(t)x$ with measurable and bounded function $U(t)$, $t \geqslant 0$. For the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

a definition of uniform global quasi-attainability is introduced. This notion is a weakening of the property of uniform global attainability. The last property means existence of matrix $U(t)$, $t \geqslant 0$, ensuring equalities $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ for the state-transition matrix $X_U(t,s)$ of the system (2) with fixed $T > 0$ and arbitrary $k \in \mathbb{N}$, $\det H_k > 0$. We prove that uniform global quasi-attainability implies global scalarizability. The last property means that for any given locally integrable and integrally bounded scalar function $p = p(t)$, $t \geqslant 0$, there exists a measurable and bounded function $U = U(t)$, $t \geqslant 0$, which ensures asymptotic equivalence of the system (2) and the system of scalar type $\dot{z} = p(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$.

REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
2. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Moscow State University, 1990, 624 p.
3. Bogdanov Yu.S. About the asymptotically equivalent linear differential systems, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 6, pp. 707–716 (in Russian).
4. Popova S.N. Global reducibility of linear control systems to systems of scalar type, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 43–49.
5. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
6. Popova S.N. On global controllability of the Lyapunov exponents for linear systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 8, pp. 1072–1078.
7. Popova S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 12, pp. 1713–1723.
8. Kozlov A.A., Makarov E.K. On the control of Lyapunov exponents of linear systems in the non-degenerate case, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 5, pp. 636–642.
9. Kozlov A.A. A control procedure for total set of Lyapunov invariants for linear systems in nondegenerate case, *Trudy Inst. Mat.*, 2007, vol. 15, no. 2, pp. 33–37 (in Russian).
10. Kozlov A.A., Ints I.V., Burak A.D. Global controllability of a separate asymptotic invariants of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi, Ser. Fiz.-Mat. Navuk, Suppl.*, 2014, pp. 37–45 (in Russian).

11. Zaitsev V.A. Uniform complete controllability and global control over asymptotic invariants of linear systems in the Hessenberg form, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 318–337 (in Russian).
12. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
13. Tonkov E.L. A criterion for uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
14. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of linear systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 157–179 (in Russian).
15. Makarov E.K., Popova S.N. Global controllability of central exponents of linear systems, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 56–63.
16. Kozlov A.A. On the control of Lyapunov exponents of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 10, pp. 1375–1392.
17. Kozlov A.A., Burak A.D. About control over characteristic exponents of three-dimensional linear differential systems with a discontinuous and fast oscillated coefficients, *Vest. Vitseb. Dzyarzh. Univ.*, 2013, no. 5 (77), pp. 11–31 (in Russian).
18. Tonkov E.L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, suppl. 1, pp. S228–S253.
19. Zaitsev V.A. Global Lyapunov reducibility of two-dimensional control systems with piecewise constant coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2002, no. 1, pp. 3–12 (in Russian).
20. Zaitsev V.A. Global attainability and global reducibility of two- and tree-dimensional linear control systems with constant coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, no. 1, pp. 31–62 (in Russian).
21. Zaitsev V.A. Attainability and Lyapunov reducibility of linear control systems, *Optimizatsiya, upravlenie, intellekt: sbornik statei* (Optimization, control, intelligence: Transactions), Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 2005, no. 2 (10), pp. 76–84 (in Russian).
22. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107.
23. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.

Received 04.04.2016

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: kozlovaa@tut.by