УДК 517.928.1

© *С. А. Заболоцкий*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

В работе рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения n-го порядка с младшей производной. При помощи принципа сжимающих отображений исследуется асимптотическая эквивалентность решений этих уравнений в случае экспоненциальной эквивалентности их правых частей. Полученные достаточные условия асимптотической эквивалентности решений являются продолжением и обобщением результатов, изложенных в предыдущих работах автора. Приводится результат, описывающий асимптотическое поведение всех стремящихся к нулю на бесконечности решений дифференциального уравнения второго порядка с регулярной нелинейностью типа Эмдена–Фаулера и нулевой правой частью, возникающего при исследовании квазилинейных эллиптических уравнений. На его основе описывается асимптотическое поведение решений соответствующего уравнения с ненулевой правой частью.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, асимптотическая эквивалентность.

DOI: 10.20537/vm160207

Введение

При $k > 1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ рассматриваются дифференциальные уравнения

$$y^{(n)} + \frac{a}{x^2}y + p(x)y|y|^{k-1} = f(x), \tag{0.1}$$

$$z^{(n)} + \frac{a}{x^2}z + p(x)z|z|^{k-1} = 0. \tag{0.2}$$

Предполагается, что функции $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны при $x > x_0 > 0$, $p(x) \not\equiv 0$.

При $a = 0$ уравнение (0.2) становится уравнением, которое известно как уравнение Эмдена–Фаулера:

$$z^{(n)} + p(x)z|z|^{k-1} = 0.$$

Различные свойства решений уравнения Эмдена–Фаулера были получены в работах [1–3]. Обобщения этого уравнения исследовались в работах [2–7], в том числе в работах [3,4,6–8] исследовалась асимптотическая эквивалентность решений этих уравнений. Заметим, что уравнение (0.2) при $a \neq 0$ не может быть приведено к уравнению Эмдена–Фаулера никакой заменой переменной или неизвестной функции.

Асимптотическая эквивалентность решений дифференциальных уравнений и их систем также используется при изучении вопросов, связанных с поведением решений дифференциальных уравнений с частными производными [9], и при исследовании некоторых вопросов функционального анализа [10].

§ 1. Экспоненциальная эквивалентность решений нелинейных дифференциальных уравнений

При $n \geqslant 2$, $k > 1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$ рассмотрим дифференциальные уравнения

$$y^{(n)} + \frac{a}{x^2}y + p(x)y|y|^{k-1} = e^{-\alpha x}f(x), \tag{1.1}$$

$$z^{(n)} + \frac{a}{x^2}z + p(x)z|z|^{k-1} = e^{-\alpha x}g(x). \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $f(x)$, $g(x)$ — непрерывные ограниченные функции, определенные при $x > x_0 > 0$, $p(x) \not\equiv 0$. Тогда для любого стремящегося к нулю при $x \to +\infty$ решения $y(x)$ уравнения (1.1) найдется единственное решение $z(x)$ уравнения (1.2), для которого*

$$|z(x) - y(x)| = O\left(e^{-\alpha x}\right), \quad x \to +\infty.$$

Для доказательства этой теоремы потребуется привести два утверждения.

Утверждение 1 (см. [8, с. 32–33]). *Если функция $y(x)$ и ее n-я производная $y^{(n)}(x)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$, то это справедливо и для всех младших производных $y^{(j)}(x)$, $0 < j < n$.*

Утверждение 2. *Пусть функция $y(x)$ — решение уравнения (1.1), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Тогда $y(x)$ удовлетворяет соотношению*

$$y(x) = \mathbf{J^n}\left[e^{-\alpha x}f(x) - \frac{a}{x^2}y(x) - p(x)\big[y(x)\big]^k_\pm\right], \tag{1.3}$$

где $\big[y(x)\big]^k_\pm = |y|^{k-1}y$, а $\mathbf{J}$ — оператор, переводящий стремящуюся к нулю при $x \to +\infty$ функцию $\varphi(x)$ в ее первообразную, тоже стремящуюся к нулю при $x \to +\infty$:

$$\mathbf{J}[\varphi](x) = -\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt.$$

Доказательство утверждения 2. Так как $y(x)$ — стремящееся к нулю при $x \to +\infty$ решение уравнения (1.1), то $y^{(n)}(x)$, в силу уравнения, также стремится к нулю. Значит, к функции $y(x)$ можно применить утверждение 1, из которого следует, что $y^{(j)}(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, $0 < j < n$. Интегрируя уравнение (1.1) от x до s, получим

$$y^{(n-1)}(s) - y^{(n-1)}(x) = \int_x^s \left[e^{-\alpha t}f(t) - \frac{a}{t^2}y(t) - p(t)\big[y(t)\big]^k_\pm\right]\,dt.$$

Перейдем к пределу при $s \to +\infty$, учитывая, что в силу утверждения 1 функция $y^{(n-1)}(s)$ стремится к нулю при $s \to +\infty$:

$$y^{(n-1)}(x) = -\int_x^{+\infty} \left[e^{-\alpha t}f(t) - \frac{a}{t^2}y(t) - p(t)\big[y(t)\big]^k_\pm\right]\,dt.$$

Для завершения доказательства требуется провести аналогичные операции интегрирования и перехода к пределу еще $n-1$ раз. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $y(x)$ — стремящееся к нулю при $x \to +\infty$ решение уравнения (1.1), а $M > 0$ — такая постоянная, что $\max\{|p(x)|, |f(x), |g(x)|\} \leqslant M$. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ непрерывных ограниченных функций $\eta(x) : [b, +\infty) \to [-H, H]$, где $H = \dfrac{4Mb^2}{\alpha^n b^2 - 2a}$, константа $b > \sqrt{\dfrac{2a}{\alpha^n}}$ выбирается достаточно большой для того, чтобы функции $y(x)$, $p(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ были определены на полуинтервале $[b, +\infty)$, а числа $Y = Y(b) = \sup\{|y(x)| : x \geqslant b\}$ и $e^{-\alpha b}$ были достаточно малы для выполнения неравенства

$$k\left(Y + He^{-\alpha b}\right)^{k-1} \leqslant \frac{\alpha^n}{2M}.$$

Такую константу $b > 0$ можно подобрать всегда, потому что правая часть неравенства является постоянной величиной, а левую можно сделать сколь угодно малой, так как $Y = Y(b) \to 0$ и $e^{-\alpha b} \to 0$ при $b \to +\infty$, а $k > 1$.

На пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим оператор F, заданный формулой

$$F[\eta](x) = e^{\alpha x}\mathbf{J}^n\left[p(x)\left(\left[y(x)\right]_\pm^k - \left[y(x)+\eta(x)e^{-\alpha x}\right]_\pm^k\right) + e^{-\alpha x}\left(g(x) - f(x) - \frac{a}{x^2}\eta(x)\right)\right]. \qquad (1.4)$$

Покажем, что оператор F задан корректно. В силу теоремы Лагранжа верно неравенство

$$\left|\left[a\right]_\pm^k - \left[b\right]_\pm^k\right| \leqslant k\max\{|a|,|b|\}^{k-1}|a-b|.$$

Отсюда получаем, что выражение, на которое действует оператор $\mathbf{J}^n$, не превосходит по модулю выражения

$$Mk\max\left\{|y(x)|, \left|y(x)+\eta(x)e^{-\alpha x}\right|\right\}^{k-1}\left|\eta(x)e^{-\alpha x}\right| + \frac{a}{x^2}\left|\eta(x)e^{-\alpha x}\right| + 2Me^{-\alpha x},$$

которое, в свою очередь, при $x \geqslant b$ не превосходит

$$Mk\left(Y + He^{-\alpha b}\right)^{k-1}He^{-\alpha x} + \frac{a}{b^2}He^{-\alpha x} + 2Me^{-\alpha x} \leqslant \left(M\frac{\alpha^n}{2M}H + \frac{a}{b^2}H + 2M\right)e^{-\alpha x}.$$

Так как $H = \dfrac{4Mb^2}{\alpha^n b^2 - 2a}$, можно преобразовать последнее выражение:

$$\left(\frac{\alpha^n}{2}H + \frac{a}{b^2}H + 2M\right)e^{-\alpha x} = H\alpha^n e^{-\alpha x}.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{J}$ действует на функцию, убывающую достаточно быстро для того, чтобы его можно было применить n раз. В результате получится такая функция $F[\eta](x)$, что $|F[\eta](x)| \leqslant H$. Это означает, что оператор F задан формулой (1.4) на всем пространстве $\mathcal{H}$, причем $F(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$.

Покажем, что F — сжимающее отображение, воспользовавшись аналогичными оценками. Пусть $\eta_1(x)$, $\eta_2(x) \in \mathcal{H}$. Обозначим $\delta = \sup\{|\eta_1(x) - \eta_2(x)| : x \geqslant b\}$. Тогда

$$\left|\left[y(x)+\eta_2(x)e^{-\alpha x}\right]_\pm^k - \left[y(x)+\eta_1(x)e^{-\alpha x}\right]_\pm^k\right| \leqslant k\left(Y + He^{-\alpha x}\right)^{k-1}\delta e^{-\alpha x} \leqslant \frac{\alpha^n\delta}{2M}e^{-\alpha x},$$

откуда

$$\left|F[\eta_1](x) - F[\eta_2](x)\right| \leqslant e^{\alpha x}\left|\mathbf{J}^n\left[\left(\frac{\alpha^n}{2} + \frac{a}{b^2}\right)\delta e^{-\alpha x}\right]\right| = \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b^2\alpha^n}\right)\delta < \delta.$$

Значит, F действительно является сжимающим отображением, поэтому существует единственная функция $\widehat{\eta}(x) \in \mathcal{H}$, для которой справедливо равенство $F[\widehat{\eta}](x) = \widehat{\eta}(x)$. Положим $z(x) = y(x) + \widehat{\eta}(x)e^{-\alpha x}$ и докажем, что полученная функция является решением уравнения (1.2). В силу формулы (1.3) верно равенство

$$z(x) - y(x) = \mathbf{J}^n\left[p(x)\left(\left[y(x)\right]_\pm^k - \left[z(x)\right]_\pm^k\right) - \frac{a}{x^2}\big(z(x) - y(x)\big) + e^{-\alpha x}\left(g(x) - f(x)\right)\right].$$

Правая часть этого равенства и функция $y(x)$ дифференцируемы n раз по переменной x, поэтому функция $z(x)$ также дифференцируема n раз по переменной x. Продифференцируем n раз и, учитывая, что функция $y(x)$ является решением уравнения (1.1), получим

$$z^{(n)}(x) = -p(x)\left[z(x)\right]_\pm^k - \frac{a}{x^2}z(x) + e^{-\alpha x}g(x),$$

то есть $z(x)$ — решение уравнения (1.2).

Предположим, что существует две функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$, заданные на $[c,+\infty)$, $c \geqslant b$, которые удовлетворяют теореме 1. Тогда они обе стремятся к нулю при $x \to +\infty$ и обе (в силу утверждения 2) представляются в виде

$$z_j(x) = \mathbf{J}^n\left[e^{-\alpha x}g(x) - \frac{a}{x^2}z_j(x) - p(x)\left[z_j(x)\right]_\pm^k\right], \quad j = 1, 2.$$

Обозначим $\varepsilon = \sup\left\{e^{\alpha x}|z_1(x) - z_2(x)| : x \geqslant c\right\}$, $Z = Z(c) = \sup\left\{\max\left\{|z_1(x)|, |z_2(x)|\right\} : x \geqslant c\right\}$. Число $\varepsilon < +\infty$, так как $|z_1(x) - z_2(x)| = O(e^{-\alpha x})$. Оценим модуль разности этих функций, исходя из их представления через оператор $\mathbf{J}^n$:

$$|z_1(x) - z_2(x)| \leqslant \left|\mathbf{J}^n\left[MkZ^{k-1}e^{-\alpha x}\varepsilon + \frac{a}{c^2}e^{-\alpha x}\varepsilon\right]\right| = \left(\alpha^{-n}MkZ^{k-1} + \frac{a}{c^2}\right)e^{-\alpha x}\varepsilon,$$

то есть

$$\varepsilon \leqslant \left(\alpha^{-n}MkZ^{k-1} + \frac{a}{c^2}\right)\varepsilon.$$

Константу c можно выбрать столь большой, что первый множитель в правой части будет сколь угодно малым, а это значит, что неравенство будет выполнено только при $\varepsilon = 0$. Таким образом, $z_1(x)$ и $z_2(x)$ совпадают на выбранном полуинтервале $[c, +\infty)$, а значит, по теореме существования и единственности, — на всей области определения. $\square$

Замечание 1. Очевидно, что в теореме 1 уравнения (1.1) и (1.2) можно поменять местами.

Вернемся к уравнениям (0.1) и (0.2):

$$y^{(n)} + \frac{a}{x^2}y + p(x)y|y|^{k-1} = f(x),$$

$$z^{(n)} + \frac{a}{x^2}z + p(x)z|z|^{k-1} = 0,$$

где $k > 1$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Следствие 1. *Пусть в уравнении* (0.1) *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$f(x) = O(e^{-\alpha x}), \quad \alpha > 0,$$

а $p(x)$ *— непрерывная ограниченная функция. Тогда для любого стремящегося к нулю при* $x \to +\infty$ *решения* $y(x)$ *уравнения* (0.1) *существует единственное решение* $z(x)$ *уравнения* (0.2)*, для которого*

$$|y(x) - z(x)| = O\left(e^{-\alpha x}\right), \quad x \to +\infty.$$

§ 2. Практическое применение теоремы 1

В работе [5] было исследовано асимптотическое поведение всех решений уравнения

$$y'' + \frac{a}{x^2}y - y|y|^{k-1} = 0, \quad k > 1,\ a \neq 0. \tag{2.1}$$

Среди прочего была доказана нижеследующая теорема.

Теорема 2 (см. [5, с. 110–111]). *Положим* $\beta = \dfrac{2}{k-1}$. *Пусть* $y(x)$ *— нетривиальное решение уравнения* (2.1)*, определенное в окрестности* $+\infty$. *Тогда для* $y(x)$ *верно одно из следующих утверждений:*

а) *если* $\beta^2 + \beta + a < 0$, *то* $y(x) = C|x|^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}}(1 + o(1))$, $C = \mathrm{const} \neq 0$, *при* $x \to +\infty$, *причем такое решение существует для любой* $C = \mathrm{const} \neq 0$;

б) *если* $\beta^2 + \beta + a = 0$, *то* $y(x) = \pm\left(\dfrac{\beta^2 + \frac{\beta}{2}}{x^2 \ln|x|}\right)^{\frac{\beta}{2}}(1 + o(1))$ *при* $x \to +\infty$, *причем такое решение существует;*

в) *если* $\beta^2 + \beta + a > 0$, *то* $y(x) = \pm\left(\beta^2 + \beta + a\right)^{\frac{\beta}{2}}|x|^{-\beta}(1 + o(1))$ *при* $x \to +\infty$, *причем такое решение существует.*

Таким образом, из теоремы 2, в частности, следует, что всякое решение уравнения (2.1), определенное в окрестности $+\infty$, стремится к нулю при $x \to +\infty$. Теорема 1 позволяет найти асимптотическое поведение решений уравнения

$$y'' + \frac{a}{x^2}y - y|y|^{k-1} = f(x)$$

при условии, что $f(x) = O(e^{-\alpha x})$, $\alpha = \text{const} > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bellman R. Stability theory of differential equations. New York: McGraw-Hill, 1953. 166 p.
2. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: Юнити-Дана, 2012. С. 22–288.
4. Асташова И.В. Об асимптотической эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 855.
5. Astashova I. On asymptotic behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equation // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16. № 1. P. 93–115.
6. Zabolotskiy S.A. On asymptotic equivalence of Lane–Emden type differential equations and some generalizations // Functional Differential Equations. 2015. Vol. 22. № 3–4. P. 169–177.
7. Заболоцкий С.А. Об асимптотической эквивалентности решений уравнений типа Лейна–Эмдена со степенным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 832.
8. Astashova I.V. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. Vol. 63. P. 31–38.
9. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 3. С. 45–68.
10. Reinfelds A. Asymptotic equivalence of difference equations in Banach space // Theory and Applications of Difference Equations and Discrete Dynamical Systems / Z. AlSharawi, J.M. Cushing, S. Elaydi. Springer. 2014. Vol. 102. P. 215–222.

Поступила в редакцию 17.05.2016

Заболоцкий Сергей Александрович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
E-mail: nugget13@mail.ru

S. A. Zabolotskiy

Asymptotic behaviour of solutions to nonlinear differential equations with exponentially equivalent right-hand sides

Keywords: nonlinear ordinary differential equations, asymptotic equivalence.

MSC: 34C41, 34E10

Nonlinear n-th order differential equations with lower term are considered. With the help of the contraction mapping principle an asymptotic equivalence of solutions to these equations is investigated in the case of exponentially equivalent right-hand sides. Obtained sufficient conditions for asymptotic equivalence of solutions extend and generalize results stated in previous author's papers. The result, describing the asymptotic behaviour of all tending to zero at infinity solutions to second order differential equations with regular Emden–Fowler type nonlinearity and zero right-hand side appearing while investigating quasilinear elliptic equations, is stated. On the basis of this result the asymptotic behaviour of solutions to a corresponding equation with nonzero right-hand side is described.

REFERENCES

1. Bellman R. *Stability theory of differential equations*, New York: McGraw-Hill, 1953, 166 p.
2. Kiguradze I.T., Chanturiya T.A. *Asimptoticheskie svoistva reshenii neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* (Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations), Moscow: Nauka, 1990, 432 p.
3. Astashova I.V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations, *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza* (Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis), Moscow: Unity-Dana, 2012, pp. 22–288 (in Russian).
4. Astashova I.V. On asymptotic equivalence of nonlinear differential equations, *Differ. Uravn.*, 1996, vol. 32, no. 6, p. 855 (in Russian).
5. Astashova I. On asymptotic behavior of solutions to a quasilinear second order differential equation, *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 1, pp. 93–115.
6. Zabolotskiy S.A. On asymptotic equivalence of Lane–Emden type differential equations and some generalizations, *Functional Differential Equations*, 2015, vol. 22, no. 3–4, pp. 169–177.
7. Zabolotskiy S.A. On asymptotic equivalence of solutions to Lane–Emden type equations with power coefficient, *Differ. Uravn.*, 2015, vol. 51, no. 6, p. 832 (in Russian).
8. Astashova I.V. On asymptotic equivalence of n-th order nonlinear differential equations, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2015, vol. 63, pp. 31–38.
9. Egorov Yu.V., Kondrat'ev V.A., Oleinik O.A. Asymptotic behaviour of the solutions of non-linear elliptic and parabolic systems in tube domains, *Sbornik: Mathematics*, vol. 189, no. 3, pp. 45–68 (in Russian).
10. Reinfelds A. Asymptotic equivalence of difference equations in Banach space, *Theory and Applications of Difference Equations and Discrete Dynamical Systems*, Eds.: Z. AlSharawi, J.M. Cushing, S. Elaydi, Springer, 2014, vol. 102, pp. 215–222.

Received 17.05.2016

Zabolotskiy Sergey Alexandrovich, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: nugget13@mail.ru