УДК 517.929.2

© *И. Н. Банщикова*

ПРИМЕР ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА [1]

Рассматривается дискретная линейная однородная система

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с вполне ограниченной матрицей $A(\cdot)$ и полным спектром показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой вполне ограниченной на $\mathbb{N}$ $n \times n$-матрицы $R(\cdot)$, удовлетворяющей оценке $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$, для полного спектра показателей Ляпунова $\lambda_1(AR) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(AR)$ возмущенной системы

$$z(m+1) = A(m)R(m)z(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

справедливо неравенство $\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(AR)| < \varepsilon$. В работе построен пример системы вида (1) с неустойчивыми показателями Ляпунова.

Ключевые слова: линейная система с дискретным временем, показатели Ляпунова, возмущения коэффициентов.

DOI: 10.20537/vm160203

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $\mathbb{R}^{n \times n}$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в $\mathbb{R}^{n \times n}$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Для произвольной функции $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ положим $\|F\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|F(m)\|$.

Множество всех упорядоченных по возрастанию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n_\leqslant$. Для произвольного набора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_\leqslant$ и любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\mu) \doteq \Big\{ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_\leqslant : |\mu_j - \nu_j| < \varepsilon \ \forall j = 1, \ldots, n \Big\},$$

то есть $\mathcal{O}_\varepsilon(\mu)$ — это ε-окрестность набора μ во множестве $\mathbb{R}^n_\leqslant$.

Основным объектом исследований является линейная однородная система с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Будем предполагать, что матрица коэффициентов $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ системы (1) *вполне ограничена* [1], то есть при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое $c > 0$, что

$$\|A\|_\infty + \|A^{-1}\|_\infty \leqslant c.$$

Заметим, что

$$\|A\|_\infty + \|A^{-1}\|_\infty \geqslant \|A(1)\| + \|A^{-1}(1)\| \geqslant \|A(1)\| + \|A(1)\|^{-1} \geqslant 2,$$

поэтому $c \geqslant 2$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16–01–00346).

Пусть $X(m,s)$ — матрица Коши системы (1), то есть такое отображение $X : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, что для каждого решения $x(\cdot)$ этой системы имеет место равенство

$$x(m) = X(m,s)x(s) \quad \text{для всех } m\in\mathbb{N},\ s\in\mathbb{N}.$$

Тогда [2, с. 13–14]

$$X(m,s) = \begin{cases} \prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l) & \text{при } m > s,\\ E & \text{при } m = s,\\ X^{-1}(s,m) & \text{при } m < s.\end{cases}$$

Здесь и всюду ниже полагаем $\prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l) = A(m-1)A(m-2)\cdot\ldots\cdot A(s)$, то есть матрицы перемножаются в порядке убывания индекса.

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln\|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), то есть множество всех $\lambda\in\mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ. Известно [2, с. 51–52], что множество Λ состоит не более чем из n различных чисел и расположено на отрезке $[-\ln c, \ln c]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p\}$, где $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_p$, $p\leqslant n$. Показатель Ляпунова тривиального решения системы (1) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j\in\{1,\ldots,p\}$ рассмотрим множество E_j всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j. Множество E_0 считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда [2, с. 54] каждое из множеств E_j является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $E_0\subset E_1\subset\ldots\subset E_p$ и неравенства

$$0 = \dim E_0 < \dim E_1 < \ldots < \dim E_p = n.$$

Положим

$$n_j = \dim E_j - \dim E_{j-1}, \quad j = 1,\ldots,p.$$

Назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j. Отметим, что $n_1+\ldots+n_p = n$. Набор n чисел $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p,\ldots,\Lambda_p$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* [2, с. 57] системы (1). В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A) = \big(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)\big),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A)\leqslant\lambda_2(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A)\in\mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Для системы (1) рассмотрим возмущенную систему

$$z(m+1) = A(m)R(m)z(m), \quad m\in\mathbb{N}, \quad z\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Матрицу $R(\cdot)$ будем называть *мультипликативным возмущением* системы (1), а саму систему (2) — *мультипликативно возмущенной* по отношению к системе (1). Нас будет интересовать вопрос о поведении показателей Ляпунова системы (2) под действием возмущений $R(\cdot)$. Отметим, что если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ этой системы вполне ограничена, то ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то приходим к следующему определению.

Определение 1 (см. [3]). Мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Множество всех допустимых мультипликативных возмущений системы (1) будем обозначать $\mathcal{R}$. Подмножество множества $\mathcal{R}$, состоящее из возмущений, удовлетворяющих оценке $\|R(\cdot) - E\|_\infty < \delta$ с произвольным $\delta > 0$, обозначим $\mathcal{R}_\delta$.

Пусть $\lambda(AR) = \big(\lambda_1(AR), \dots, \lambda_n(AR)\big) \in \mathbb{R}^n_\leqslant$ — полный спектр показателей Ляпунова допустимо мультипликативно возмущенной системы (2).

Определение 2 (см. [3]). Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого возмущения $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$ выполнено включение $\lambda(AR) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Отметим, что введеннное понятие является переносом на системы с дискретным временем аналогичного понятия для систем с непрерывным временем [5,6], но для систем с непрерывным временем рассматриваются аддитивные возмущения матрицы коэффициентов системы. Если аддитивный подход применить к системе (1), то получим следующие определения.

Определение 3 (см. [3]). Система

$$z(m+1) = \big(A(m) + Q(m)\big)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

называется *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (1). Матрица $Q(\cdot)$ при этом называется *аддитивным возмущением* системы (1). Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ называется *допустимым* для системы (1), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Полный спектр показателей Ляпунова произвольной допустимо аддитивно возмущенной системы (3) обозначаем

$$\lambda(A+Q) = \big(\lambda_1(A+Q), \dots, \lambda_n(A+Q)\big) \in \mathbb{R}^n_\leqslant.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех допустимых для системы (1) аддитивных возмущений; $\mathcal{Q}_\delta$ — подмножество множества $\mathcal{Q}$, состоящее из возмущений $Q(\cdot)$, для которых $\|Q\|_\infty < \delta$.

Определение 4 (см. [3, 4]). Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого возмущения $Q(\cdot) \in \mathcal{Q}_\delta$ выполнено включение $\lambda(A+Q) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Теорема 1. *Определения* 2 *и* 4 *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из [3, лемма 2].

Эффект неустойчивости показателей Ляпунова при малых аддитивных возмущениях матрицы коэффициентов линейной системы с непрерывным временем был установлен О. Перроном в работе [7] (см. также [6, с. 23–24], [8, с. 194–195]). Ниже на основании примера Перрона системы с непрерывным временем и неустойчивыми показателями Ляпунова сконструирован соответствующий пример системы с дискретным временем, при этом возмущение матрицы коэффициентов системы (1) построено мультипликативным.

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

с матрицей коэффициентов

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & e^{(m+1)\sin\ln(m+1) - m\sin\ln m - 2a} \end{pmatrix},$$

где параметр a принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Рассмотрим решения $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$ системы (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$x^j(1) = e_j,\ \ j = 1, 2.$$

Тогда при всех $m > 1$

$$x^1(m) = X(m,1)e_1 = \prod_{l=1}^{m-1} A(l)e_1 = \prod_{l=1}^{m-1} e^{-a}e_1 = \begin{pmatrix} e^{-a(m-1)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2(m) = X(m,1)e_2 = \prod_{l=1}^{m-1} A(l)e_2 = \prod_{l=1}^{m-1} e^{(l+1)\sin\ln(l+1) - l\sin\ln l - 2a}e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{m\sin\ln m - 2a(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя характеристические показатели Ляпунова решений $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$, получим

$$\lambda[x^1] = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\ln\left|e^{-a(m-1)}\right| = -a,$$

$$\lambda[x^2] = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\ln\left|e^{m\sin\ln m - 2a(m-1)}\right| =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \frac{m\sin\ln m - 2a(m-1)}{m} = \varlimsup_{m\to\infty} \sin\ln m + \lim_{m\to\infty} \frac{-2a(m-1)}{m} = \varlimsup_{m\to\infty} \sin\ln m - 2a.$$

Для вычисления $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \sin\ln m$ рассмотрим последовательности $t_k = e^{(2k+1/2)\pi}$ и $m_k = [t_k] + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$1 \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \sin\ln m \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sin\ln m_k = \varlimsup_{k\to\infty} \sin\bigl(\ln t_k + \ln(m_k/t_k)\bigr) =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \Bigl(\sin\ln t_k \cos\ln(m_k/t_k) + \cos\ln t_k \sin\ln(m_k/t_k)\Bigr) = \varlimsup_{k\to\infty} \cos\ln(m_k/t_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \cos\ln(m_k/t_k) = \cos\ln\bigl(\lim_{k\to\infty} m_k/t_k\bigr) = \cos\ln 1 = 1.$$

Таким образом, $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \sin\ln m = 1$, и $\lambda[x^2] = 1 - 2a$.

Из условия $a < 1$ вытекает, что $\lambda[x^1] < \lambda[x^2]$, поэтому полный спектр показателей Ляпунова системы (4) состоит из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[x^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[x^2] = 1 - 2a.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = e^{-t\sin\ln t}, \quad t \geqslant 1.$$

Тогда матрицу $A(\cdot)$ системы (4) можно записать в виде

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем произвольное $\gamma > 0$ и рассмотрим мультипликативное возмущение

$$R(m) = \{r_{ij}(m)\}_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\frac{e^{-am}}{\varphi(m)}\displaystyle\int_m^{m+1} \varphi(\tau)\,d\tau & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Докажем, что оно является допустимым. Для этого рассмотрим свойства функции

$$f(t) = t\sin\ln t, \quad t \geqslant 1.$$

Так как
$$\left|f'(t)\right| = |\sin\ln t + \cos\ln t| = \left|\sqrt{2}\sin\bigl(\ln t + \pi/4\bigr)\right| \leqslant \sqrt{2}, \quad t \geqslant 1,$$
то для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\widehat{\tau} \in [m, m+1]$, в силу теоремы Лагранжа, выполнено неравенство
$$|f(m) - f(\widehat{\tau})| = |m\sin\ln m - \widehat{\tau}\sin\ln\widehat{\tau}| \leqslant \max_{t\in[m,m+1]} |f'(t)| \cdot |m - \widehat{\tau}| \leqslant \sqrt{2}.$$

Воспользуемся полученным результатом для оценки величины $\frac{1}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau$. В силу теоремы о среднем для определенного интеграла найдется $\widehat{\tau} \in [m, m+1]$ такое, что
$$\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(\widehat{\tau}),$$
поэтому
$$\frac{1}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{\varphi(\widehat{\tau})}{\varphi(m)} = e^{m\sin\ln m - \widehat{\tau}\sin\ln\widehat{\tau}} = e^{f(m)-f(\widehat{\tau})} \leqslant e^{|f(m)-f(\widehat{\tau})|} \leqslant e^{\sqrt{2}}.$$
Из неравенства, связывающего спектральную и максимальную столбцовую норму матрицы [9, с. 378], получаем
$$\|R(m)\| \leqslant \sqrt{2}\bigl(1 + |r_{21}(m)|\bigr) = \sqrt{2}\Bigl(1 + \gamma\frac{e^{-am}}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\bigl(1 + \gamma e^{-am}e^{\sqrt{2}}\bigr) \leqslant \sqrt{2}\bigl(1 + \gamma e^{\sqrt{2}}\bigr), \quad m \in \mathbb{N}.$$
Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\|R^{-1}(m)\| = \|R(m)\|$. Следовательно, выбранная функция $R(\cdot)$ является вполне ограниченной и поэтому принадлежит множеству $\mathcal{R}$ допустимых мультипликативных возмущений.

Далее,
$$\|R(m) - E\| = \gamma\frac{e^{-am}}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau \leqslant \gamma e^{-am}e^{\sqrt{2}} \leqslant \gamma e^{-a+\sqrt{2}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$
Заметим, что если $\gamma < \delta e^{a-\sqrt{2}}$, то $\|R(\cdot) - E\|_\infty < \delta$, то есть $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$.

Рассмотрим допустимо мультипликативную возмущенную по отношению к (4) систему
$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$
Матрица коэффициентов этой системы имеет вид
$$A(m)R(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma\frac{e^{-am-2a}}{\varphi(m+1)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y(m,s)$ — матрица Коши системы (6). Тогда для каждого решения $y(\cdot)$ этой системы и произвольного $m \in \mathbb{N}$
$$y(m+1) = Y(m+1,1)y(1) = \prod_{l=1}^{m} A(l)R(l)y(1) =$$
$$= A(m)R(m)A(m-1)R(m-1)\ldots A(2)R(2)A(1)R(1)y(1) =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma\frac{e^{-am-2a}}{\varphi(m+1)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma\frac{e^{-a(m-1)-2a}}{\varphi(m)}\int_{m-1}^{m}\varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(m-1)e^{-2a}}{\varphi(m)} \end{pmatrix}\ldots$$

$$\ldots\begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma\frac{e^{-a-2a}}{\varphi(2)}\displaystyle\int_1^2\varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(1)e^{-2a}}{\varphi(2)}\end{pmatrix}y(1)=\begin{pmatrix} e^{-ma} & 0 \\ \gamma\frac{e^{-(2m+1)a}}{\varphi(m+1)}\displaystyle\int_1^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau & \frac{e^{-2ma}}{\varphi(m+1)}\end{pmatrix}y(1).$$

Следовательно, решения системы (6) с начальными условиями $y^1(1)=e_1$, $y^2(1)=e_2$ имеют вид

$$y^1(m)=\begin{pmatrix}y_1^1(m)\\ y_2^1(m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-a(m-1)} \\ \gamma\frac{e^{-(2m-1)a}}{\varphi(m)}\displaystyle\int_1^m\varphi(\tau)\,d\tau\end{pmatrix},\quad y^2(m)=\begin{pmatrix}y_1^2(m)\\ y_2^2(m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{-2(m-1)a}}{\varphi(m)}\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $y^2(m)\equiv x^2(m)$, поэтому

$$\lambda[y^2]=\lambda[x^2]=1-2a.$$

Найдем показатель Ляпунова решения $y^1(\cdot)$. С этой целью рассмотрим функцию

$$\psi(t)=\frac{e^{-2at}}{\varphi(t)}\int_1^t\varphi(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant 1.$$

Вновь возьмем последовательности

$$t_k\doteq e^{(2k+1/2)\pi},\quad m_k\doteq[t_k]+1,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\varphi(t_k)=e^{-t_k\sin\ln t_k}=e^{-t_k}.$$

Отметим, что $\varphi(\tau)>0$ при всех $\tau\geqslant 1$ и $[t_ke^{-\pi},t_ke^{-2\pi/3}]\subset[1,t_k]\subset[1,m_k)$, поэтому

$$\int_1^{m_k}\varphi(\tau)\,d\tau>\int_1^{t_k}\varphi(\tau)\,d\tau>\int_{t_ke^{-\pi}}^{t_ke^{-2\pi/3}}\varphi(\tau)\,d\tau\geqslant t_k\left(e^{-2\pi/3}-e^{-\pi}\right)\min_{\tau\in[t_ke^{-\pi},t_ke^{-2\pi/3}]}\varphi(\tau).$$

Найдем минимальное значение функции $\varphi(\cdot)$ на отрезке

$$J_k\doteq[t_ke^{-\pi},t_ke^{-2\pi/3}]=[e^{(2k-1/2)\pi},e^{(2k-1/6)\pi}].$$

Так как

$$\varphi'(t)=-e^{-t\sin\ln t}(\sin\ln t+\cos\ln t)=-\sqrt{2}e^{-t\sin\ln t}\sin(\ln t+\pi/4),\tag{7}$$

то отрезок J_k содержит единственную критическую точку $e^{(2k-1/4)\pi}$ функции $\varphi(\cdot)$, в которой производная функции меняет знак с «$+$» на «$-$». Следовательно, минимальное значение функции достигается на одном из концов отрезка J_k. Сравнивая значения функции $\varphi(\cdot)$ на концах отрезка, получаем, что это минимальное значение достигается в левом конце $\tau_k\doteq e^{(2k-1/2)\pi}$, при этом

$$\min_{t\in J_k}\varphi(t)=\varphi(\tau_k)=e^{\tau_k}=e^{t_ke^{-\pi}}.$$

Тогда

$$\int_1^{m_k}\varphi(\tau)\,d\tau>t_k\left(e^{-2\pi/3}-e^{-\pi}\right)e^{t_ke^{-\pi}}.$$

Из равенства (7) получаем, что функция $\varphi(\cdot)$ убывает на отрезке $\left[e^{(2k-1/4)\pi},e^{(2k+3/4)\pi}\right]$, который содержит в себе отрезок $[t_k,m_k]$, поэтому $\varphi(t_k)>\varphi(m_k)$. Кроме того, $m_k\leqslant t_k+1$. Следовательно,

$$\psi(m_k)=\frac{e^{-2am_k}}{\varphi(m_k)}\int_1^{m_k}\varphi(\tau)\,d\tau>\frac{e^{-2a(t_k+1)}}{\varphi(t_k)}\int_1^{m_k}\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{e^{-2a(t_k+1)}}{e^{-t_k}}\int_1^{m_k}\varphi(\tau)\,d\tau>e^{-2a}e^{(1-2a)t_k}t_k\left(e^{-2\pi/3}-e^{-\pi}\right)e^{t_ke^{-\pi}}=$$

$$= e^{-2a}t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_k}.$$

Тогда

$$y_2^1(m_k) = \gamma e^a \psi(m_k) > \gamma e^{-a} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_k},$$

поэтому

$$\lambda[y^1] \geqslant \lambda[y_2^1] \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m_k^{-1} \ln |y_2^1(m_k)| \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln t_k + \big(1 - 2a + e^{-\pi}\big)t_k}{m_k} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln t_k + \big(1 - 2a + e^{-\pi}\big)t_k}{t_k} \cdot \frac{t_k}{m_k} = 1 - 2a + e^{-\pi}.$$

Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(AR)$ возмущенной системы (6) состоит из чисел

$$\lambda_1(AR) = \lambda[y^2] = 1 - 2a, \quad \lambda_2(AR) = \lambda[y^1] \geqslant 1 - 2a + e^{-\pi},$$

а спектр $\lambda(A)$ невозмущенной системы (4) — из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[x^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[x^2] = 1 - 2a.$$

Возьмем $\varepsilon = (1 - a)/2 > 0$. Для любого $\delta > 0$ найдется допустимое мультипликативное возмущение $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$ вида (5), где $\gamma < \delta e^{a-\sqrt{2}}$, такое, что

$$|\lambda_1(AR) - \lambda_1(A)| = \lambda_1(AR) - \lambda_1(A) = 1 - 2a + a = 1 - a > \varepsilon.$$

Следовательно, $\lambda(AR) \notin \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$. Это означает, что показатели Ляпунова системы (4) неустойчивы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
3. Банщикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 15–26.
4. Czornik A. Perturbation theory for Lyapunov exponents of discrete linear systems. Kraków: AGH University of Science and Technology Press, 2012. 110 p.
5. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
6. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 319 с.
7. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Z., 1930. Bd. 31. S. 748–766.
8. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 1992. 240 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Поступила в редакцию 01.05.2016

Банщикова Ирина Николаевна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ассистент, кафедра высшей математики, Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 11.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

I. N. Banshchikova

An example of a linear discrete system with unstable Lyapunov exponents

Keywords: discrete time-varying linear system, Lyapunov exponents, perturbations of coefficients.

MSC: 39A06, 39A30

We consider a discrete time-varying linear system

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

where $A(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{N}$, i.e., $\sup_{m\in\mathbb{N}}\big(\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|\big) < \infty$. Let $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ be the Lyapunov spectrum of the system (1). It is called stable if for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for every completely bounded $n \times n$-matrix $R(\cdot)$, $\sup_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$, the inequality

$$\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(AR)| < \varepsilon$$

holds. We construct an example of the system (1) with unstable Lyapunov spectrum.

REFERENCES

1. Demidovich V.B. On a criterion of stability for difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).
2. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.
3. Banshchikova I.N., Popova S.N. On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'ut. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 15–26 (in Russian).
4. Czornik A. *Perturbation theory for Lyapunov exponents of discrete linear systems*, Kraków: AGH University of Science and Technology Press, 2012, 110 p.
5. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96.
6. Izobov N.A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova* (Introduction to the theory of Lyapunov exponents), Minsk: Belarusian State University, 2006, 319 p.
7. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Math. Z.*, 1930, bd. 31, s. 748–766 (in German).
8. Adrianova L.Ya. *Vvedenie v teoriyu lineinykh sistem differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of linear systems of differential equations), St. Petersburg: Saint Petersburg State University, 1992, 240 p.
9. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.

Received 01.05.2016

Banshchikova Irina Nikolaevna, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Assistant Lecturer, Department of Higher Mathematics, Izhevsk State Agricultural Academy, ul. Studencheskaya, 11, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru