УДК 517.518

© *В. С. Баженов, Н. В. Латыпова*

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ СТЕПЕНИ $2k+1$ ОТ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Рассматривается биркгофова интерполяция функции двух переменных многочленами степени $2k+1$ по совокупности двух переменных на треугольнике. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны. Оценки погрешности аппроксимации для производных функции в предложенных конечных элементах зависят только от диаметра разбиения и не зависят от углов триангуляции. Показана неулучшаемость полученных оценок погрешности аппроксимации функции и ее частных производных. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существует функция из заданного класса и существуют абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу. В данной работе для рассматриваемых интерполяционных условий предлагается набор конкретных функций, позволяющих получить соответствующие оценки погрешности для определенных частных производных.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, кусочно-полиномиальная функция, триангуляция, метод конечных элементов.

DOI: 10.20537/vm160202

Введение

Первоначально оценки погрешности аппроксимации функции и ее i-й производной имели вид CH^{n+1-i}, где H — диаметр триангуляции, n — степень интерполяционного многочлена, и этот параметр также тесно связан с классом аппроксимируемых функций (классы $W^{n+1}M$, которые будут введены ниже). При этом вопрос о том, как константа C зависит от свойств триангуляции, не рассматривался. Позже появилось условие наименьшего угла триангуляции (работы Дж. Синжа, М. Зламала, А. Женишека, Дж. Брэмбла и др.). Наиболее общие результаты такого рода принадлежат Ф. Сьярле и П. Равьяру [1], у которых в двумерном случае в максимально общей ситуации оценки погрешности аппроксимации имели вид $CH^{n+1-i}(\sin\alpha)^{-i}$, где α — наименьший угол триангуляции, а константа C уже не зависит от триангуляции.

Иногда наименьший угол, фигурирующий в оценках Сьярле–Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно). При этом выясняется, что различные типы интерполяционных процессов (Лагранжа, Эрмита, Биркгофа) по-разному реагируют на характер вырождения триангуляции. Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны.

Так, в случае лагранжевой интерполяции оценка погрешности зависит от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла триангуляции. При этом оценки ухудшаются, когда два угла стремятся к нулю. Здесь к настоящему моменту все выяснено благодаря работам М. Зламала, Ю. Н. Субботина. Кроме того, Ю. Н. Субботин [2] показал неулучшаемость этих оценок на заданном классе. Неулучшаемость понимается в том смысле, что существуют функция из заданного класса и абсолютные положительные константы, не зависящие от триангуляции, такие, что для любого невырожденного треугольника справедливы оценки снизу.

Наиболее трудным является случай эрмитовой и биркгофовой интерполяции. Здесь некоторые результаты получены Д. О. Филимоненковым, Ю. Н. Субботиным [3, 4], Н. В. Байдаковой [5, 6] и Н. В. Латыповой [7–12]. В работах [5, 7] рассматриваются интерполяционные условия биркгофова типа для построения многочленов нечетных степеней $4k+1$ и $4k+3$, позволяющие заменить наименьший угол на наибольший для старших производных, но избавиться полностью от присутствия наименьшего угла в оценках погрешности производных не удается. В [4, 6] предложены два способа интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, в оценках погрешности которых наименьший угол полностью заменяется на средний (наибольший). В работе [9] Н. В. Байдаковой удалось получить усиление оценок сверху величин погрешности аппроксимации производных третьего порядка интерполируемой функции, при этом кусочно-кубическая функция получена глобально непрерывной на всей триангулируемой области. Другими словами, оценки погрешности имеют вид: $CMH^{4-i}\,(\sin\beta)^{-\min\{2,i\}}$, где β — средний угол треугольника.

В работах [10–14] рассматриваются такие способы интерполяции типа Биркгофа соответственно многочленами второй–шестой степеней на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от углов. Показана неулучшаемость полученных оценок.

В настоящей работе аналогичные исследования проведены для биркгофовой интерполяции многочленами степени $2k+1$ и предложены такие условия интерполяции, при которых оценки погрешности аппроксимации зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от его углов. Показана неулучшаемость полученных оценок.

§ 1. Постановка задачи

В силу локальности рассматриваемых интерполяционных условий, при которых интерполяционный многочлен степени $2k+1$ будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением одного треугольника. Пусть Δ — невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами a_1, a_2, a_3, наибольшая сторона которого — отрезок $[a_1, a_2]$ длины H, и пусть d — произвольная фиксированная точка на стороне $[a_1, a_2]$. Вершины треугольника имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leqslant b$ и точка d имеет координаты $(c, 0)$, где $-a \leqslant c \leqslant b$. Обозначим через $D_\eta f(x,y) = \eta^{(1)}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta^{(2)}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ производную по направлению $\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)})$, $(\eta^{(1)})^2 + (\eta^{(2)})^2 = 1$, и пусть

$$\begin{aligned} W^{s+1}M = &\big\{ f(x,y) : D^l_{\eta_1,\ldots,\eta_l} f(x,y) \in \mathbb{C}(\Delta) \quad (0 \leqslant l \leqslant s+1) \\ &\forall\,(x,y)\in\Delta, \quad \forall\,\eta_1,\ldots,\eta_{s+1} \quad \Big| D^{s+1}_{\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}} f(x,y) \Big| \leqslant M \big\}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{C}(\Delta)$ — класс непрерывных функций на треугольнике Δ. Через $P_{2k+1}(x,y)$ обозначим многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит $2k+1$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\frac{\partial^m P_{2k+1}(a_i)}{\partial x^m} = \frac{\partial^m f(a_i)}{\partial x^m}, \quad i = 1, 2 \quad (0 \leqslant m \leqslant k); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{m+l} P_{2k+1}(d)}{\partial x^m \partial y^l} = \frac{\partial^{m+l} f(d)}{\partial x^m \partial y^l} \quad (1 \leqslant l \leqslant 2k, \quad 1 \leqslant m \leqslant 2k-l+1); \tag{2}$$

$$\frac{\partial^m P_{2k+1}(a_3)}{\partial y^m} = \frac{\partial^m f(a_3)}{\partial y^m} \quad (1 \leqslant m \leqslant 2k+1). \tag{3}$$

Положим $e(x,y) = f(x,y) - P_{2k+1}(x,y)$; $\quad e_{i,j}(x,y) = \dfrac{\partial^{i+j} e(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$; $\quad e_{i,j} = e_{i,j}(0,0)$.

§ 2. Оценки погрешности интерполяции

Теорема 1. *Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^{2k+2}M$, любого невырожденного треугольника Δ и для интерполяционного многочлена $P_{2k+1}(x,y)$, заданного условиями (1)–(3), имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^s (f(x,y) - P_{2k+1}(x,y))}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\Delta)} \leqslant C_{s-j,j} M H^{2k+2-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant s \leqslant 2k+1). \tag{4}$$

С точностью до констант, не зависящих от триангуляции, на рассматриваемом классе функций оценки погрешности (4) *неулучшаемы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши имеем

$$e(x,y)=\sum_{j=0}^{2k+1}\frac{y^j}{j!}\sum_{i=0}^{2k+1-j}e_{i,j}\frac{x^i}{i!}+R(x,y), \tag{5}$$

где $R(x,y)=\int_0^y\frac{(y-t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+2}f(x,t)}{\partial t^{2k+2}}\,dt+\sum_{i=0}^{2k+1}\frac{y^i}{i!}\int_0^x\frac{(x-u)^{2k+1-i}}{(2k+1-i)!}\frac{\partial^{2k+2}f(u,y)}{\partial u^{2k+2-i}\partial y^i}\,du.$

Далее через k_{ij} будем обозначать положительные константы, не обязательно равные, не зависящие от функции f и геометрических характеристик треугольника.

Условия (1) при $i=1,2$ определяют одномерный многочлен Эрмита, используя остаточный член которого получаем следующие оценки [15, с. 153]:

$$|e_{j,0}|\leqslant k_{j,0}Mb^{2k+2-j}\quad (0\leqslant j\leqslant 2k+1). \tag{6}$$

Рассмотрим условия (2) при $l=1$. Запишем $\dfrac{\partial e^{m+1}(c,0)}{\partial x^m\partial y}=e_{m,1}(c,0)$ в виде разложения Тейлора с остаточным членом в интегральной форме в точке $(0,0)$. Тогда

$$e_{m,1}(c,0)=\sum_{i=m}^{2k}\frac{c^{i-m}}{(i-m)!}e_{i,1}+\int_0^c\frac{(c-u)^{2k-m}}{(2k-m)!}\frac{\partial^{2k+2}f(u,0)}{\partial u^{2k+1}\partial y}\,du=0\quad (1\leqslant m\leqslant 2k).$$

В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $e_{i,1}$. Из полученной системы последовательно в обратном порядке найдем неизвестные $e_{2k,1},e_{2k-1,1}$ и т. д. Учитывая, что $|c|\leqslant b$, получим оценки вида

$$|e_{i,1}|\leqslant k_{i,1}Mb^{2k+1-i}\quad (1\leqslant i\leqslant 2k). \tag{7}$$

Аналогичным образом, используя условия (2) при $2\leqslant l\leqslant 2k$, запишем разложения $\dfrac{\partial e^{m+l}(c,0)}{\partial x^m\partial y^l}=e_{m,l}(c,0)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме в точке $(0,0)$. Тогда

$$e_{m,l}(c,0)=\sum_{i=m}^{2k+1-l}\frac{c^{i-m}}{(i-m)!}e_{i,l}+\int_0^c\frac{(c-u)^{2k+1-l-m}}{(2k+1-l-m)!}\frac{\partial^{2k+2}f(u,0)}{\partial u^{2k+2-l}\partial y^l}\,du=0\quad (1\leqslant m\leqslant 2k+1-l).$$

Будем иметь системы относительно $e_{i,l}$, из которых последовательно и в обратном порядке выразим $e_{2k+1-l,l},e_{2k-l,l}$ и т. д. Учитывая, что $|c|\leqslant b$, получим оценки вида

$$|e_{i,l}|\leqslant k_{i,l}Mb^{2k+2-l-i}\quad (2\leqslant l\leqslant 2k,\quad 1\leqslant i\leqslant 2k+1-l). \tag{8}$$

В условии (3) запишем $\dfrac{\partial e^m(0,h)}{\partial y^m}=e_{0,m}(0,h)$ в виде разложения Тейлора с остаточным членом в интегральной форме в точке $(0,0)$. Тогда

$$e_{0,m}(0,h)=\sum_{j=m}^{2k+1}\frac{h^{j-m}}{(j-m)!}e_{0,j}+\int_0^h\frac{(h-v)^{2k+1-m}}{(2k+1-m)!}\frac{\partial^{2k+2}f(0,v)}{\partial v^{2k+2}}\,dv=0\quad (1\leqslant m\leqslant 2k+1).$$

В результате получим систему относительно $e_{0,m}$. Из полученной системы в обратном порядке последовательно выразим неизвестные $e_{0,m}$. В результате получим оценки вида

$$|e_{0,m}|\leqslant k_{0,m}Mh^{2k+2-m}\quad (1\leqslant m\leqslant 2k+1). \tag{9}$$

Таким образом, неравенства (6)–(9) определяют оценки для $e_{i,j}$ при всех индексах i и j, удовлетворяющих условию $0 \leqslant i+j \leqslant 2k+1$. Подставляя полученные оценки в разложение Тейлора (5) и вычисляя соответствующие частные производные до $2k+1$ порядка по переменным x и y, получим требуемые оценки (4).

§ 3. Неулучшаемость оценок

В этом параграфе покажем, что для рассматриваемых условий интерполяции существуют константы $C^*_{i,j} > 0$, не зависящие от триангуляции, и функция $f^* \in W^{2k+2}M$ такие, что для

$$e(x,y) = f^*(x,y) - P_{2k+1}(f^*; x, y)$$

справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{\mathbb{C}(\Delta)} \geqslant C^*_{s-j,j} M H^{2k+2-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant s \leqslant 2k+1). \tag{10}$$

В качестве функции f^* для рассматриваемых интерполяционных условий возьмем набор функций

$$f_i^*(x,y) = M(x+a)^{k+1}(x-b)^{k+1} + Mx^{2k+2-i}y^i \quad (0 \leqslant i \leqslant 2k+2), \tag{11}$$

которые позволят получить соответствующие оценки снизу для определенных частных производных погрешности $e(x,y)$.

Для функции $f_1^*(x,y) = M(x+a)^{k+1}(x-b)^{k+1} + Mx^{2k+1}y$ построим соответствующий интерполяционный многочлен степени $2k+1$ по совокупности переменных

$$P_{2k+1}(f_1^*; x, y) = \sum_{j=0}^{2k+1} y^j \sum_{i=0}^{2k+1-j} p_{i,j} x^i.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции. Из условий (1) при $i = 1, 2$ имеем

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=m}^{2k+1} p_{i,0} C_i^m (-a)^{i-m} & = & 0, \\ \sum\limits_{i=m}^{2k+1} p_{i,0} C_i^m b^{i-m} & = & 0, \end{array} \right. \tag{12}$$

где $0 \leqslant m \leqslant k$, а $C_i^m = \dfrac{i!}{m!(i-m)!}$ — биномиальные коэффициенты. Определитель данной системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & (-a)^2 & \cdots & (-a)^k & (-a)^{k+1} & \cdots & (-a)^{2k+1} \\ 0 & 1 & C_2^1(-a) & \cdots & C_k^1(-a)^{k-1} & C_{k+1}^1(-a)^k & \cdots & C_{2k+1}^1(-a)^{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_k^2(-a)^{k-2} & C_{k+1}^2(-a)^{k-1} & \cdots & C_{2k+1}^2(-a)^{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & C_{k+1}^k(-a) & \cdots & C_{2k+1}^k(-a)^{k+1} \\ 1 & b & b^2 & \cdots & b^k & b^{k+1} & \cdots & b^{2k+1} \\ 0 & 1 & C_2^1 b & \cdots & C_k^1 b^{k-1} & C_{k+1}^1 b^k & \cdots & C_{2k+1}^1 b^{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_k^2 b^{k-2} & C_{k+1}^2 b^{k-1} & \cdots & C_{2k+1}^2 b^{2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & C_{k+1}^k b & \cdots & C_{2k+1}^k b^{k+1} \end{vmatrix} \tag{13}$$

и равен $(a+b)^{(k+1)^2}$ (см. [16, с. 47]), т. е. отличен от нуля. Поэтому единственным решением системы будет нулевое: $p_{i,0} = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant 2k+1$.

Тогда интерполяционный многочлен примет вид

$$P_{2k+1}(f_1^*;x,y)=\sum_{j=1}^{2k+1}y^j\sum_{i=0}^{2k+1-j}p_{i,j}x^i.$$

Используя условия (2) при $l=1$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_{i,1}$ при $1\leqslant i\leqslant 2k$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sum\limits_{i=1}^{2k}p_{i,1}C_i^1c^{i-1} & = & MC_{2k+1}^1c^{2k},\\ \sum\limits_{i=2}^{2k}p_{i,1}C_i^2c^{i-2} & = & MC_{2k+1}^2c^{2k-1},\\ & \ldots & \\ p_{2k-2,1}+C_{2k-1}^{2k-2}p_{2k-1,1}c+C_{2k}^{2k-2}p_{2k,1}c^2 & = & MC_{2k+1}^{2k-2}c^3,\\ p_{2k-1,1}+C_{2k}^{2k-1}p_{2k,1}c & = & MC_{2k+1}^{2k-1}c^2,\\ p_{2k,1} & = & MC_{2k+1}^{2k}c.\end{array}\right.$$

Из данной системы в обратном порядке последовательно будем находить коэффициенты $p_{i,1}$:

$$p_{i,1}=(-1)^iC_{2k+1}^iMc^{2k+1-i}\quad(1\leqslant i\leqslant 2k).$$

Учитывая условия (2) при $2\leqslant l\leqslant 2k$, получим системы

$$\sum_{j=i}^{2k+1-l}p_{j,l}C_j^ic^{j-i}=0,$$

определитель которых имеет вид

$$\Delta_l=\begin{vmatrix}1 & C_2^1c & C_3^1c^2 & \cdots & C_{2k+1-l}^1c^{2k-l}\\ 0 & 1 & C_3^2c & \cdots & C_{2k+1-l}^2c^{2k-l-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}\qquad(14)$$

и равен 1. А значит, решение системы — нулевое, т. е. $p_{i,l}=0$ при $2\leqslant l\leqslant 2k,\quad 1\leqslant i\leqslant 2k+1-l$.

Для условий (3) при $1\leqslant m\leqslant 2k+1$ получим систему

$$\sum_{j=i}^{2k+1}p_{0,j}C_j^ih^{j-i}=0\quad(1\leqslant i\leqslant 2k+1)\qquad(15)$$

с определителем

$$\Delta_0=\begin{vmatrix}1 & C_2^1h & C_3^1h^2 & \cdots & C_{2k+1}^1h^{2k}\\ 0 & 1 & C_3^2h & \cdots & C_{2k+1}^2h^{2k-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1.$$

А значит, решение системы — нулевое, т. е. $p_{0,j}=0\quad(1\leqslant j\leqslant 2k+1)$.

Подставляя найденные коэффициенты в $P_{2k+1}(f_1^*;x,y)$, получаем

$$e(x,y)=M(x+a)^{k+1}(x-b)^{k+1}+Mx^{2k+1}y+My\sum_{i=1}^{2k}(-1)^iC_{2k+1}^ic^{2k+1-i}x^i.$$

Преобразуя и используя формулу бинома Ньютона, получим

$$e(x,y)=M(x+a)^{k+1}(x-b)^{k+1}+My(x-c)^{2k+1}+Myc^{2k+1}.$$

Из условия $H = a + b \leqslant 2b$ следуют неравенства $\dfrac{b}{2} \geqslant \dfrac{H}{4}$ и $a + \dfrac{b}{2} \geqslant \dfrac{H}{2}$. Тогда

$$\|e(x,y)\| \geqslant \left| e\left(\frac{b}{2}, 0\right)\right| = M\left(\frac{b}{2}\right)^{k+1}\left(a+\frac{b}{2}\right)^{k+1} \geqslant M\left(\frac{H}{4}\right)^{k+1}\left(\frac{H}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2^{3k+3}} M H^{2k+2}.$$

Теперь найдем частную производную порядка m $(1 \leqslant m \leqslant 2k+1)$ по переменной x от функции $e(x,y)$ в точке $(x,0)$, используя формулу Лейбница:

$$e_{m,0}(x,0) = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\Big(M((x-b)(x+a))^{k+1}\Big) = M\sum_{i=0}^{m} C_m^i \Big((x-b)^{k+1}\Big)^{(i)}\Big((x+a)^{k+1}\Big)^{(m-i)} =$$

$$= M\sum_{i=0}^{m} C_m^i C_{k+1}^i i!(x-b)^{k+1-i} C_{k+1}^{m-i}(m-i)!(x+a)^{k+1-m+i}.$$

Тогда при $1 \leqslant m \leqslant 2k+1$

$$\left\|\frac{\partial^m e(x,y)}{\partial x^m}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^m e}{\partial x^m}\Big(\frac{b}{2},0\Big)\right| = m!M\left|\sum_{i=0}^{m} C_{k+1}^i C_{k+1}^{m-i}\Big(\frac{b}{2}\Big)^{k+1-i}\Big(a+\frac{b}{2}\Big)^{k+1-m+i}\right| \geqslant$$

$$\geqslant m!MH^{2k+2-m}\left|\sum_{i=0}^{m} C_{k+1}^i C_{k+1}^{m-i}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{3k+3-m-i}\right|.$$

Вычислив частные производные порядка m по переменной x от функции $\dfrac{\partial}{\partial y}e(x,y)$:

$$\frac{\partial^{m+1}e(x,y)}{\partial x^m \partial y} = m!C_{2k+1}^m M(x-c)^{2k+1-m} \quad (1 \leqslant m \leqslant 2k),$$

получим оценки снизу в зависимости от точки c. Если $c \geqslant \dfrac{b}{2} \geqslant \dfrac{H}{4}$, то

$$\left\|\frac{\partial^{m+1}e(x,y)}{\partial x^m \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^{m+1}e}{\partial x^m \partial y}(0,0)\right| = m!C_{2k+1}^m M c^{2k+1-m} \geqslant m!C_{2k+1}^m\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1-m} MH^{2k+1-m}.$$

Если $0 \leqslant c < \dfrac{b}{2}$, то, учитывая, что $\dfrac{b}{2} < b - c \leqslant b$, имеем

$$\left\|\frac{\partial^{m+1}e(x,y)}{\partial x^m \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^{m+1}e}{\partial x^m \partial y}(b,0)\right| > m!C_{2k+1}^m M\left(\frac{b}{2}\right)^{2k+1-m} \geqslant m!C_{2k+1}^m\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1-m} MH^{2k+1-m}.$$

Если $-a \leqslant c < 0$, то представим $c = -\varepsilon b$, где $\varepsilon > 0$.

$$\left\|\frac{\partial^{m+1}e(x,y)}{\partial x^m \partial y}\right\| \geqslant \left|\frac{\partial^{m+1}e}{\partial x^m \partial y}(b,0)\right| = m!C_{2k+1}^m M(b+\varepsilon b)^{2k+1-m} > m!C_{2k+1}^m\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1-m} MH^{2k+1-m}.$$

Откуда получаем требуемые оценки снизу для $\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}e(x,y)$ и $\dfrac{\partial^{m+1}}{\partial x^m \partial y}e(x,y)$.

Чтобы получить остальные оценки, нужно рассмотреть набор функций $f_i^*(x,y)$ последовательно при $i = 2, 3, \ldots, 2k+1$. Например, при $i = p$, имеем функцию

$$f_p^*(x,y) = M(x-b)^{k+1}(x+a)^{k+1} + Mx^{2k+2-p}y^p$$

и построим соответствующий интерполяционный многочлен степени $2k+1$ по совокупности переменных

$$P_{2k+1}(f_p^*; x, y) = \sum_{j=0}^{2k+1} y^j \sum_{i=0}^{2k+1-j} p_{i,j}x^i.$$

Коэффициенты $p_{i,j}$ найдем из условий интерполяции. Из условий (1) при $i = 1, 2$ получим систему (12) с определителем Δ вида (13) и нулевым решением, т. е. $p_{i,0} = 0$ при $0 \leqslant i \leqslant 2k+1$.

Используя условия (2) при $l = p$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_{i,p}$, где $1 \leqslant i \leqslant 2k-p+1$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2k-p+1} p_{i,p} C_i^1 c^{i-1} & = & M C_{2k-p+2}^1 c^{2k-p+1}, \\ \sum\limits_{i=2}^{2k-p+1} p_{i,1} C_i^2 c^{i-2} & = & M C_{2k-p+2}^2 c^{2k-p}, \\ & \dots & \\ p_{2k-p,p} + C_{2k-p+1}^{2k-p} p_{2k-p+1,p} c & = & M C_{2k-p+2}^{2k-p} c^2, \\ p_{2k-p+1,p} & = & M C_{2k-p+2}^{2k-p+1} c. \end{cases}$$

Из данной системы в обратном порядке последовательно будем находить коэффициенты $p_{i,p}$. В результате получим, что они имеют вид

$$p_{i,p} = (-1)^{i+p-1} C_{2k+2-p}^i M c^{2k+2-i-p} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2k-p+1).$$

Учитывая условия (2) при $l \neq p$, получим системы

$$\sum_{j=i}^{2k+1-l} p_{j,l} C_j^i c^{j-i} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant 2k-l+1)$$

с определителями вида (14), равными 1. Системы уравнений имеют нулевые решения, т. е. $p_{i,l} = 0$ при $1 \leqslant l \leqslant 2k, \quad l \neq p, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2k+1-l$.

Аналогично и для условий (3) при $1 \leqslant m \leqslant 2k+1$ получим систему (15), имеющую нулевое решение, т. е. $p_{0,j} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant 2k+1)$.

Подставляя найденные коэффициенты в $P_{2k+1}(f_p^*; x, y)$, получаем

$$e(x,y) = M(x-b)^{k+1}(x+a)^{k+1} + M x^{2k+2-p} y^p - M y^p \sum_{i=1}^{2k-p+1} (-1)^{i+p-1} C_{2k+2-p}^i c^{2k+2-i-p} x^i.$$

Преобразуя и используя формулу бинома Ньютона, получим

$$e(x,y) = M(x-b)^{k+1}(x+a)^{k+1} + (-1)^p M y^p (x-c)^{2k+2-p} + M y^p c^{2k+2-p}.$$

Вычисляя смешанные производные от функции $e(x,y)$, имеем

$$e_{m,p}(x,y) = \frac{\partial^{m+p} e(x,y)}{\partial x^m \partial y^p} = M p! m! C_{2k+2-p}^m (-1)^p (x-c)^{2k+2-p-m}.$$

Тогда при $1 \leqslant m \leqslant 2k-p+1$ можно получить оценки снизу в зависимости от c. Если $c \geqslant \dfrac{b}{2} \geqslant \dfrac{H}{4}$, то

$$\left\| \frac{\partial^{m+p} e(x,y)}{\partial x^m \partial y^p} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^{m+p} e}{\partial x^m \partial y^p}(0,0) \right| \geqslant p! m! C_{2k+2-p}^m \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+2-p-m} M H^{2k+2-p-m}.$$

Если $0 \leqslant c < \dfrac{b}{2}$, то

$$\left\| \frac{\partial^{m+p} e(x,y)}{\partial x^m \partial y^p} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^{m+p} e}{\partial x^m \partial y^p}(b,0) \right| \geqslant p! m! C_{2k+2-p}^m \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+2-p-m} M H^{2k+2-p-m}.$$

Если $-a \leqslant c < 0$, то представим $c = -\varepsilon b$, где $\varepsilon > 0$ и получим

$$\left\| \frac{\partial^{m+p} e(x,y)}{\partial x^m \partial y^p} \right\| \geqslant \left| \frac{\partial^{m+p} e}{\partial x^m \partial y^p}(b,0) \right| \geqslant p! m! C_{2k+2-p}^m \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+2-p-m} M H^{2k+2-p-m}.$$

Таким образом, получаем требуемые оценки снизу для $\dfrac{\partial^{m+p}}{\partial x^m \partial y^p} e(x,y)$.

Авторы выражают благодарность Н. В. Байдаковой за конструктивные замечания и внимательное прочтение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods // Arch. Ration. Mech. Anal. 1972. Vol. 46. № 3. P. 177–199.
2. Субботин Ю.Н. Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 148–153.
3. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
4. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 120–130.
5. Baidakova N.V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14. № 2. P. 87–107.
6. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 47–52.
7. Латыпова Н.В. Оценки погрешности аппроксимации многочленами степени $4k+3$ на треугольнике // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8. № 1. С. 203–226.
8. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. Вып. 1. С. 3–18.
9. Байдакова Н.В. Новые оценки величин погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции многочленами третьей степени на треугольнике // Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 1 (2). С. 15–19.
10. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно-параболической интерполяции на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 91–97.
11. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции кубическими многочленами от углов треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 3. С. 233–241.
12. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции многочленами четвертой степени от углов треугольника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 64–74.
13. Латыпова Н.В. Независимость оценок погрешности интерполяции многочленами пятой степени от углов треугольника // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 53–64.
14. Латыпова Н.В. Погрешности интерполяции многочленами шестой степени на треугольнике // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 79–87.
15. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.
16. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977. 288 с.

Поступила в редакцию 29.02.2016

Баженов Владимир Сергеевич, магистрант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: bazhenov 17@mail.ru

Латыпова Наталья Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: nlatypova@udm.ru

V. S. Bazhenov, N. V. Latypova

Independence of interpolation error estimates by polynomials of $2k+1$ degree on angles in a triangle

Keywords: error of interpolation, piecewise polynomial function, triangulation, finite element method.

MSC: 41A05

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

The paper considers Birkhoff-type triangle-based interpolation of two-variable function by polynomials of $2k+1$ degree by set of two variables. Similar estimates are automatically transferred to error estimates of related finite element method. The approximation error estimates of derivatives for the given finite elements depend only on the decomposition diameter, and do not depend on triangulation angles. We show that obtained approximation error estimates for a function and its partial derivatives are unimprovable. Unimprovability is understood in a following sense: there exists a function from the given class and there exist absolute positive constants independent of triangulation such that for any nondegenerate triangle estimates from below are valid. In this work, a system of specific functions is offered for interpolation conditions. These functions allow to obtain of corresponding error estimates for definite partial derivatives.

REFERENCES

1. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1972, vol. 46, no. 3, pp. 177–199.
2. Subbotin Yu.N. Multidimensional multiple polynomial interpolation, *Metody Approksim. Interpol.* (Methods of Approximation and Interpolation: Transactions), Novosibirsk: Computing Centre, Academy of Sciences of the USSR, 1981, pp. 148–152.
3. Subbotin Yu.N. Dependence of the estimates of approximation by interpolating polynomials of 5-th degree upon geometric properties of triangle, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 1992, vol. 2, pp. 110–119 (in Russian).
4. Subbotin Yu.N. A new cubic element in the FEM, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2005, suppl. 2, pp. S176–S187.
5. Baidakova N.V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle, *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1999, vol. 14, no. 2, pp. 87–107.
6. Baidakova N.V. A method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2005, suppl. 2, pp. S49–S55.
7. Latypova N.V. Error estimates of approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2002, suppl. 1, pp. S190–S213.
8. Latypova N.V. Error of interpolation by piecewise cubic polynomial on triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, pp. 3–18 (in Russian).
9. Baidakova N.V. New estimates of the error of approximation of derivatives under interpolation of a function on a triangle by polynomials of the third degree, *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1 (2), pp. 15–19 (in Russian).
10. Latypova N.V. Error of interpolation by a piecewise parabolic polynomial on a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 91–97 (in Russian).
11. Latypova N.V. Independence of error estimates of interpolation by cubic polynomials from the angles of a triangle, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 233–241 (in Russian).
12. Latypova N.V. Independence of interpolation error estimates by fourth-degree polynomials on angles in a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 64–74 (in Russian).
13. Latypova N.V. Independence of interpolation error estimates by fifth-degree polynomials on angles in a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 53–64 (in Russian).
14. Latypova N.V. Error of interpolation by sixth-degree polynomials on a triangle, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 79–87 (in Russian).
15. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii* (Computing Methods), vol. 1, Moscow: Fizmatgiz, 1962, 464 p.
16. Fadeev D.K., Sominskii I.S. *Sbornik zadach po vysshei algebre* (Collection of problems on higher algebra), Moscow: Nauka, 1977, 288 p.

Received 29.02.2016

Bazhenov Vladimir Sergeevich, Master Student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: bazhenov 17@mail.ru

Latypova Natal'ya Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: nlatypova@udm.ru