УДК 512.761.5

© *Е. А. Асташов*

О КЛАССИФИКАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ, ЭКВИВАРИАНТНО ПРОСТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП [1]

Рассматривается задача классификации ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений конечной циклической группы $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 3$, на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, с точностью до эквивариантных автоморфизмов $\mathbb{C}^n$. В случае согласованных скалярных действий группы доказано, что при $n \geqslant 2$ эквивариантно простых ростков не существует. Этот результат обобщается на случаи, когда действие группы по нескольким переменным в $\mathbb{C}^n$ совпадает с действием группы в $\mathbb{C}$. Кроме того, доказано, что в случае несогласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$ всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков A_{3k+1}, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Ключевые слова: классификация особенностей, простые особенности, действие группы, эквивариантные функции.

DOI: 10.20537/vm160201

Введение

Настоящая работа посвящена классификации ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений конечной циклической группы $G = \mathbb{Z}_m$ на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, с точностью до эквивариантных автоморфизмов $\mathbb{C}^n$.

Перечислим некоторые работы, в которых рассматривались частные случаи этой задачи.

В работе [1] дается хорошо известная классификация простых особенностей в неэквивариантном случае (то есть в случае, когда оба действия группы G тривиальны).

В работе [2] дается классификация простых особенностей на многообразии с краем. Эта классификация эквивалентна классификации простых особенностей, инвариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по первой координате:

$$(-1) \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (-z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

В работе [3, раздел 3] дается классификация простых нечетных особенностей, то есть особенностей, эквивариантно простых относительно нетривиальных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. В частности, доказано, что при $n \geqslant 3$ таких особенностей не существует вовсе.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем: в случае согласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 2$ эквивариантно простых ростков не существует (теорема 1). Этот результат обобщается на случаи, когда действие группы по нескольким переменным в $\mathbb{C}^n$ совпадает с действием группы в $\mathbb{C}$ (теорема 2). Кроме того, доказано, что в случае несогласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$ всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков $A_{3k+1}, k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (теорема 3).

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть заданы представления произвольной абелевой группы G на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Функция $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется *инвариантной* относительно первого из этих представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $f(\lambda \cdot \mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$. Функция $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется *эквивариантной* относительно пары заданных представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16–01–00409.

имеет место равенство $g(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \lambda \cdot g(\mathbf{z})$. (Символом «$\cdot$» обозначаются соответствующие действия элемента группы на элемент пространства $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}$.) Эти понятия естественным образом переносятся на ростки функций, а также на ростки диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$.

Обозначим через $\mathcal{O}_n^G$ кольцо инвариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, через $\mathcal{O}_n^{GG}$ — множество эквивариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, а через $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо эквивариантных ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Множество $\mathcal{O}_n^{GG}$ имеет структуру модуля над кольцом $\mathcal{O}_n^G$. Кольцо $\mathcal{D}_n^{GG}$ действует на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$.

Эквивариантный росток функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем *эквивариантно простым* относительно заданных представлений группы G, если при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве r-струй эквивариантных ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит и это число остается ограниченным при $r \to \infty$.

Два эквивариантных ростка $f, g\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем $\mathcal{R}^{GG}$*-эквивалентными,* если существует эквивариантный росток диффеоморфизма $\Phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to \to (\mathbb{C}^n, 0)$, для которого $g = f \circ \Phi$ (обозначение: $f \sim_{\mathcal{R}^{GG}} g$). Через $\mathcal{D}_n^{GG} g$ будем обозначать орбиту элемента g при действии группы эквивариантных диффеоморфизмов $\mathcal{D}_n^{GG}$ на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$.

Все вышеупомянутые понятия, очевидно, зависят не только от самой группы G, но и от ее действий на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, хотя обозначения никакой информации о действиях группы в себе не содержат; о каких действиях идет речь, будет в каждом случае ясно из контекста.

§ 2. Скалярные действия группы $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 3$

Пусть группа $G = \mathbb{Z}_m$ действует на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$ скалярно:

$$\sigma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_1, \ldots, \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_n\right); \quad \sigma \cdot z = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z \tag{2.1}$$

($\sigma \in \mathbb{Z}_m$— каноническая образующая; $z_i \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$).

При $m = 2$ классификация особенностей, эквивариантно простых относительно представлений (2.1), дается в работе [3, раздел 3]. В остальных случаях имеет место следующий результат.

Теорема 1. *При $m \geqslant 3$ и $n = 1$ росток g является эквивариантно простым относительно представлений* (2.1) *тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-эквивалентен одному из следующих ростков:*

$$A_{mk} : x \mapsto x^{mk+1},\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

При $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 2$ не существует ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно представлений (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. В этом случае любой росток, эквивариантный относительно представлений (2.1), представим в виде линейной комбинации мономов $\sum\limits_{s \geqslant s_0} a_s x^{ms+1}$ и $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-эквивалентен своему младшему моному x^{ms_0+1}. При этом достаточно малая окрестность орбиты такого ростка в пространстве r-струй эквивариантных ростков $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ при $r \geqslant ms_0 + 1$ пересекается лишь с конечным числом других орбит, а именно с орбитами ростков x^{ms+1}, где $1 \leqslant s < s_0$. Кроме того, различные ростки вида (2.2) попарно $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-неэквивалентны, поскольку имеют разную кратность критической точки в нуле. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Теперь рассмотрим случай $n \geqslant 2$. Моном $z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ эквивариантен относительно представлений (2.1) тогда и только тогда, когда $k_1 + \ldots + k_n \equiv 1 \mod m$. Отсюда, в частности, следует, что m-струя эквивариантно простого ростка будет нулевой. Но классификация форм степени 4 и выше при $n \geqslant 2$ содержит модули (их доставляет, например, двойное отношение четырех точек на проективной прямой). Отсюда следует второе утверждение теоремы. $\square$

§ 3. Нескалярные действия группы $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 3$

Теорема 1 допускает обобщение на некоторые случаи нескалярного действия группы $\mathbb{Z}_m$. А именно, пусть группа $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 3$, действует на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$ по формулам

$$\begin{aligned}\sigma\cdot(z_1,\ldots,z_n) &= \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)z_1,\ldots,\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)z_j,\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)^{p_1}z_{j+1},\ldots,\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)^{p_{n-j}}z_n\right),\\ \sigma\cdot z &= \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)z,\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ — каноническая образующая, $z_i \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$; $2 \leqslant j \leqslant n$; $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \not\equiv 1 \mod m$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Не существует ростков функций* $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, *эквивариантно простых относительно представлений* (3.1).

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство второго утверждения теоремы 1. В этом случае модули при классификации эквивариантных ростков с особенностью в нуле возникают из-за того, что такие ростки не содержат мономов степени ниже $m+1$ от переменных $z_1, \ldots, z_j$.

Замечание 1. Утверждения теорем 1 и 2 останутся верными, если в формулах (2.1) и (3.1) всюду заменить $\exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$ на $\exp\left(\dfrac{2\pi ik}{m}\right)$, где НОД$(k, m) = 1$: такое изменение действий группы соответствует замене канонической образующей группы $\mathbb{Z}_m$ на любую другую образующую этой группы.

§ 4. Еще один случай скалярного действия группы $\mathbb{Z}_3$

Пусть группа $G = \mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\sigma\cdot(x,y) = \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)x,\ \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)y\right);\quad \sigma\cdot z = \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)z \tag{4.1}$$

($\sigma \in \mathbb{Z}_3$— каноническая образующая; $x, y, z \in \mathbb{C}$).

В этом случае классификация эквивариантно простых особенностей дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть* $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — *росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений* (4.1). *Росток g является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он* $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$*-эквивалентен одному из следующих ростков:*

$$A_{3k+1} : (x, y) \mapsto x^{3k+2} + y^2,\ k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами (s, t). Моному $x^{s_0}y^{t_0}$ будем сопоставлять точку (s_0, t_0) в этом пространстве. Точки (s, t), соответствующие при таком сопоставлении мономам ростков $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантных относительно представлений (4.1), лежат на прямых вида $s + t = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Заметим, что эквивариантно простой росток g обязательно должен содержать мономы, для которых соответствующие точки лежат на прямой $s + t = 2$. В самом деле, если росток не содержит таких мономов, то его 4-струя — нулевая. Но тогда росток не может быть эквивариантно простым, поскольку классификация форм степени 5 от двух переменных содержит модули.

Предположим сначала, что эквивариантно простой росток g содержит по крайней мере два монома, для которых соответствующие точки лежат на прямой $s + t = 2$, либо что его 2-струя содержит только моном xy. Тогда с помощью линейных замен координат в $\mathbb{C}^2$ (которые эквивариантны относительно представлений (4.1)) 2-струю ростка можно привести к виду x^2+y^2. По теореме о конечной определенности (см. [4, раздел 2]), такой росток будет $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$-эквивалентен своей 2-струе.

Предположим теперь, что 2-струя эквивариантно простого ростка g содержит ровно один моном степени 2, причем только от одной переменной (без ограничения общности можно считать, что это моном y^2). Рассмотрим в $\mathbb{R}^2_{(s,t)}$ прямую $s+t=2$, проходящую через точки $(0,2)$ и $(2,0)$. Будем поворачивать эту прямую против часовой стрелки вокруг точки $(0,2)$ до тех пор, пока на ней не появятся другие точки, соответствующие мономам ростка g. Это может быть либо точка вида $(3k+2,0)$, $k\in\mathbb{N}$, либо точка вида $(3l+1,1)$, $l\in\mathbb{N}$ (в последнем случае на той же прямой будет лежать и точка $(6l+2,0)$, также соответствующая эквивариантному моному). В обоих случаях с помощью эквивариантной замены координат в $\mathbb{C}^2$ можно добиться того, что из мономов, соответствующих точкам на прямой, росток g будет содержать только мономы y^2 и x^{3k+2}, причем с единичными коэффициентами (во втором случае нужно взять $k=2l$). Тогда, по теореме о конечной определенности, росток g будет $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$-эквивалентен ростку y^2+x^{3k+2}. Если же при повороте прямой вплоть до горизонтального положения мы не встретим точек, соответствующих мономам ростка g, то этот росток будет иметь вид $y^2\cdot f(x,y)$, где f — многочлен с ненулевым свободным членом, инвариантный относительно первого из представлений (4.1). Тогда с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x}=x$, $\tilde{y}=y\sqrt{f(x,y)}$ росток g приводится к виду $\tilde{y}^2$. Но малая окрестность такого ростка в пространстве r-струй эквивариантных ростков будет пересекаться со всеми орбитами ростков y^2+x^{3k+2}, где $k\leqslant\frac{r-2}{3}$, и количество таких орбит будет неограниченно возрастать при $r\to\infty$. Значит, в этом случае росток g не будет эквивариантно простым.

Таким образом, любой росток $g:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C},0)$, эквивариантно простой относительно представлений (4.1), $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$-эквивалентен одному из ростков (4.2). Каждый из ростков (4.2) сам является эквивариантно простым: его малая окрестность в пространстве r-струй эквивариантных ростков при $r\geqslant 3k+2$ пересекает лишь конечное число орбит (это орбиты ростков A_{3l+2}, $0\leqslant l\leqslant k$). Отметим также, что ростки A_{3k+2} с различными k попарно неэквивалентны: это следует, например, из того, что у них отличается число Милнора (см., например, [5]). $\square$

Замечание 2. Аналогичный результат имеет место для представлений

$$\sigma\cdot(x,y)=\left(\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)x,\,\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)y\right);\quad \sigma\cdot z=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)z$$

($\sigma\in\mathbb{Z}_3$— каноническая образующая, $x,y,z\in\mathbb{C}$).

Этот результат получается из предыдущего выбором другой образующей в группе $\mathbb{Z}_3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 4. С. 3–25.
2. Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 91–105.
3. Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // Journal of Geometry and Physics. 2013. Vol. 71. P. 58–72.
4. Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A. Complete transversals and the classification of singularities // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 253–275.
5. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.

Поступила в редакцию 12.05.2016

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 2

Асташов Евгений Александрович, аспирант, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1.
E-mail: ast-ea@yandex.ru

E. A. Astashov

On the classification of singularities that are equivariant simple with respect to representations of cyclic groups

Keywords: classification of singularities, simple singularities, group action, equivariant functions.

MSC: 14B05

We consider the problem of classification of function germs $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ that are equivariant simple with respect to various representations of a finite cyclic group $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 3$, on $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{C}$ up to equivariant automorphisms of $\mathbb{C}^n$. In the case of matching scalar actions of the group it is shown that for $n \geqslant 2$ there exist no equivariant simple function germs. This result is generalized to the cases where the group action in several variables in $\mathbb{C}^n$ coincides with the action of the group on $\mathbb{C}$. In addition, it is shown that in the case of non-matching scalar actions of $\mathbb{Z}_3$ on $\mathbb{C}^2$ and on $\mathbb{C}$ any equivariant simple function germ is equivalent to one of the germs A_{3k+1}, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities, *Funct. Anal. Appl.*, 1972, vol. 6, no. 4, pp. 254–272.
2. Arnol'd V.I. Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k, and F_4 and singularities of evolutes, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 5, pp. 99–116.
3. Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions, *Journal of Geometry and Physics*, 2013, vol. 71, pp. 58–72.
4. Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A. Complete transversals and the classification of singularities, *Nonlinearity*, 1997, vol. 10, pp. 253–275.
5. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. *Singularities of differentiable maps, Volumes I–II*, Boston: Birkhauser, 1985–1988 (Monographs Math., vol. 82–83).

Received 12.05.2016

Astashov Evgenii Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: ast-ea@yandex.ru