

УДК 519.632.4, 532.516.5

© А. А. Фомин, Л. Н. Фомина

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ТЕПЛООБМЕНА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ОБРАТНЫМ УСТУПОМ

В работе рассматриваются результаты решения задачи стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с обратным уступом и прогреваемой нижней стенкой в широком диапазоне числа Рейнольдса $100 \leq Re \leq 1000$ и параметра расширения потока $1.11 \leq ER \leq 10$. Исследование выполнено путем численного интегрирования системы двумерных уравнений Навье–Стокса в переменных «скорость–давление» на равномерных сетках с шагом $1/300$. Достоверность полученных результатов подтверждается их сравнением с литературными данными. Приводятся подробные картины течения и перегрева жидкости в зависимости от двух основных параметров задачи: Re и ER . Показывается, что с одновременным ростом параметров Re и ER существенно усложняется структура течения — увеличиваются количество вихрей и их размеры вплоть до образования вихря за уступом с двумя центрами вращения. Также показывается, что характерная высота зоны прогрева течения слабо зависит от Re и ER и в конечном счете ближе к выходу из канала составляет приблизительно половину его высоты. Для всех центров вихрей определяются их основные характеристики: координаты, экстремумы функции тока, завихренности. Анализируется сложное немонотонное поведение профилей коэффициентов трения, сопротивления и теплоотдачи (числа Нуссельта) по длине канала. Показывается, что эти коэффициенты в одинаковой степени сильно зависят как от числа Рейнольдса, так и от параметра расширения канала, достигая своих максимальных значений при максимальных значениях Re и ER .

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, плоский канал с обратным уступом, отрывное течение.

Введение

Течения вязких жидкостей в каналах при наличии отрывов и присоединений основного потока к стенкам рассматриваются во многих теоретических и прикладных задачах гидродинамики. Наиболее типичным представителем данного класса задач является исследование гидродинамики и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением. Эта задача характеризуется простотой геометрии и, в частности, фиксированным положением первой точки отрыва потока, а также зависимостью решения, вообще говоря, от двух параметров: числа Рейнольдса и параметра расширения канала (в случае теплообмена добавляется еще число Прандтля). С другой стороны, варьирование этих немногих входных параметров позволяет получать принципиально различные картины отрывного течения, характеризующиеся количеством, формой, размерами и положением вихревых образований, которые к тому же могут обладать сложной внутренней структурой.

Данная задача имеет также важное методологическое значение, поскольку наряду с другим классическим исследованием течения вязкой несжимаемой жидкости в каверне с подвижной верхней крышкой играет роль «испытательного стенда» для отработки разнообразных нововведений в технологии решения задач вычислительной гидромеханики. Анализ литературных данных говорит о том, что одна из основных и до сих пор не решенных в полной мере проблем моделирования вязких течений в коротких каналах состоит в корректной постановке и вычислительной реализации граничных условий на выходе из канала. Неудачный выбор как местоположения выходной границы, так и собственно граничных условий может привести как минимум к серьезным искажениям решения и даже к прекращению сходимости итерационного процесса построения стационарного решения [1, 2].

В этой ситуации наибольшую значимость приобретают экспериментальные исследования течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах с обратным уступом как объективный источник проверки достоверности теоретических (численных) решений задачи. Здесь наибольшую известность получили работы [3, 4], в которых, в частности, показано, что при умеренных числах Рейнольдса, построенных по высоте основания уступа, размер вихря за уступом увеличивается прямо пропорционально росту Re вплоть до значений порядка $400 \div 800$. При дальнейшем повышении значений Re возникают расхождения между экспериментальными данными и решением двумерных уравнений Навье–Стокса, обусловленные как трехмерными эффектами реальных течений, так и возникновением переходного ламинарно-турбулентного режима течения. Среди более поздних теоретико-экспериментальных исследований следует отметить работу [5], отличительной особенностью которой является достаточно широкий диапазон значений параметра расширения потока ER : от 1.43 до 4. Здесь и далее $ER = 1/(1 - h_c/H)$, где h_c — высота основания уступа, H — высота выходного участка канала.

Вообще говоря, в большинстве работ параметр расширения ER имеет фиксированное значение, равное 2, или близкую к нему величину 1.942 [2, 3, 6–11], при котором, как нетрудно заметить, высота уступа совпадает с высотой входного участка канала. В ряде работ величина ER варьируется: например, в [12] $1.33 \leq ER \leq 4$, в [13] $1.17 \leq ER \leq 2$, в [14] $1.5 \leq ER \leq 3$. Несколько особняком стоят исследования [15, 16], в которых ER фиксировано и равно 1.5. Что касается числа Рейнольдса, то в указанных работах его номинальное значение не выходит за пределы $100 \leq Re \leq 3000$. При этом, сравнивая результаты различных исследований по параметру Re , следует обращать внимание на характерный линейный размер в определении числа Рейнольдса, поскольку это может быть как полная высота канала, так и высота уступа или высота входного участка.

В большинстве работ в качестве основных результатов решения задачи кроме общих картин течения рассматриваются профили продольной компоненты скорости в различных сечениях, а также распределения коэффициентов трения и безразмерного потока тепла от нижней стенки по длине канала. При этом вопрос гидродинамического сопротивления канала движению жидкости за сечением его внезапного расширения остается за рамками внимания исследователей. Хотя, казалось бы, отталкиваясь от известного результата по коэффициенту сопротивления для плоских каналов $\lambda = 24/Re$ [17], было бы интересно проследить эволюцию распределения λ вдоль длины канала по мере увеличения значения параметра расширения ER . В литературе также отсутствуют наиболее сложные картины течения по гидродинамике и теплообмену, которые должны возникать для одновременно больших значений Re и ER .

Исходя из вышесказанного, целью настоящей работы является исследование параметров стационарного течения и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с обратным уступом при $100 \leq Re \leq 1000$ и $1.11 \leq ER \leq 10$.

§ 1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается течение вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением и подогреваемой нижней стенкой. При этом считается, что перепады температуры потока малы, а объемные силы отсутствуют. Соответственно, полагается, что зависимостью плотности и коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры можно пренебречь, то есть они принимаются постоянными. Понятно, что в рамках сделанных допущений температура жидкости не оказывает влияния на ее динамику и распространяется по области исследования как пассивная примесь.

Схема структуры течения представлена на рисунке 1. Обозначения границ В1–В6 приняты такими же, как в [1]. Жидкость втекает через левую границу В4, при этом ее движение считается полностью развитым плоским течением Пуазейля между двумя параллельными пластинами. Компоненты скорости и температуры на границе В6 полагаются не меняющимися вдоль горизонтальной координаты. Остальные границы канала являются непроницаемыми, при этом нижняя стенка В1 нагрета до температуры T_w , а стенки В2, В3 и В5 теплоизолированы. Стационарное решение задачи ищется методом установления. В первые моменты времени скорость

течения на границе В4 плавно увеличивается от нуля до максимального значения, вследствие чего первоначально неподвижная жидкость приходит в движение.

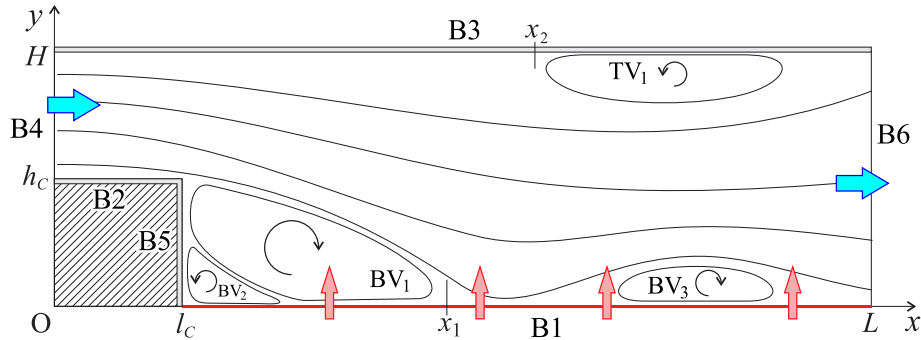


Рис. 1. Схема потока в плоском канале с внезапным расширением и подогреваемой нижней стенкой с обозначением границ области решения, характерных точек течения и маркировкой возможных вихрей

Математическая постановка задачи в безразмерном виде представляет собой систему нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \end{aligned}$$

стационарного уравнения баланса тепла:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \text{Pe}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right);$$

начальных условий при $t = 0$: $u = v = 0$; условий на границах области исследования (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \text{B1 } (y = 0, l_c \leq x \leq L): & \quad u = v = 0, \quad \theta = 1; \\ \text{B2 } (y = h_c, 0 \leq x \leq l_c): & \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0; \\ \text{B3 } (y = H, 0 \leq x \leq L): & \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0; \\ \text{B4 } (x = 0, h_c \leq y \leq H): & \quad u = f(t) \cdot 6(y - h_c)(1 - y)/(H - h_c)^2, \quad v = 0, \quad \theta = 0; \\ & \quad f(t) = \begin{cases} 0.5 \{ \sin [0.5\pi (2t/t_1 - 1)] + 1 \}, & 0 \leq t \leq t_1; \\ 1, & t > t_1; \end{cases} \\ \text{B5 } (x = l_c, 0 \leq y \leq h_c): & \quad u = v = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \\ \text{B6 } (x = L, 0 \leq y \leq H): & \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Здесь t — время; t_1 — время «разгона» потока на входе в канал (во всех расчетах принималось равным 1); x, y — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты; u, v — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости \mathbf{V} ; p — давление; $\theta = (T - T_0)/(T_w - T_0)$ — перегрев потока; $\text{Pe} = \text{Pr} \cdot \text{Re}$ — число Пекле; $\text{Re} = UH/\nu$ — число Рейнольдса; $\text{Pr} = \rho_0 c_p \nu / \kappa$ — число Прандтля; где U — среднемассовая скорость притока жидкости

через границу В4; ν — кинематический коэффициент вязкости; ρ_0 — плотность; c_p — коэффициент теплоемкости при постоянном давлении; κ — коэффициент теплопроводности; T_0 — температура потока на входе в канал. Поскольку в качестве характерного размера выбрана полная высота канала H , то его безразмерная высота соответственно всегда равна 1.

Каждый вариант рассчитывается в два этапа: на первом этапе определяются динамические характеристики потока u, v, p , а на втором — поле перегрева θ . На основе полученного решения задачи вычисляются распределения по длине канала коэффициентов трения вдоль нижней и верхней стенок C_f , числа Нуссельта вдоль нижней стенки Nu и коэффициента гидродинамического сопротивления λ движению жидкости. Данные коэффициенты определяются следующим образом [8, 12, 14, 17].

1. $C_f = \tau_w / (1/2 \rho_0 U^2)$, где $\tau_w = \rho_0 \nu (\partial u / \partial n)_w$ — напряжение трения на стенке. Здесь $(\partial / \partial n)_w$ — производная по внешней к стенке нормали. Вместо C_f удобнее рассматривать приведенный коэффициент трения, не зависящий от числа Рейнольдса $C_f^* = C_f \text{Re} / 2$ [14]. В итоге

$$C_f^* = (\partial u / \partial n)_w.$$

2. $Nu = \alpha H / \kappa$, где α — коэффициент теплоотдачи в выражении для потока тепла на стенке $q_w = \alpha (T_w - T_0)$. Из определений потока тепла $q_w = -\kappa (\partial T / \partial n)_w$ и перегрева θ нетрудно получить окончательное выражение для числа Нуссельта:

$$Nu = -(\partial \theta / \partial n)_w.$$

3. По определению коэффициент гидродинамического сопротивления λ связывает падение давления на расстоянии l от входа в канал со скоростным напором по формуле $\Delta P = \lambda l \rho_0 U^2 / (2H)$ [17], где ΔP суть разность средних по поперечному сечению канала давлений на входе в канал и на расстоянии l от него. Следовательно, выражение для λ имеет вид

$$\lambda = (2/x) \int_0^1 (p(0, y) - p(x, y)) dy.$$

В процессе построения стационарного решения системы уравнений Навье–Стокса методом установления на каждом шаге по времени используется трехшаговый алгоритм расщепления [18] с учетом двух модификаций [19]: 1) на первом шаге расщепления учитывается давление с предыдущего слоя по времени, а разностные схемы для уравнений движения записываются в неявном виде; 2) соответственно, на втором шаге расщепления задача Неймана формулируется для поправки давления p' , равной разности давлений на текущем и предыдущем слоях по времени. Динамические характеристики потока считаются найденными при выполнении условия

$$D_V = \frac{\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_1 + \|\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}\|_1}{\tau} < \epsilon, \quad (1)$$

где n — номер слоя по времени; $\mathbf{u} = \{u_{ij}\}$, $\mathbf{v} = \{v_{ij}\}$ — векторы сеточных функций компонент скорости; τ — шаг по времени; ϵ — наперед заданная точность установления решения; i, j — индексы сеточного покрытия области решения.

Разностная аппроксимация исходной дифференциальной постановки выполняется методом контрольного объема со вторым по пространству и с первым по времени порядком аппроксимации с применением экспоненциального профиля решения, приближенного зависимостью пятой степени [20]. Во всех расчетах используется равномерная сетка с шагом h вдоль обеих координатных осей. Шаг по времени определялся из соотношения $\tau = C \min(h, \text{Re} h^2)$, где C — число Куранта. Проведенные эксперименты по ускорению установления решения показали, что в диапазоне сеточных разбиений области от 1001×101 до 5001×501 и числа Рейнольдса $100 \leq \text{Re} \leq 1000$ шаг по времени удается увеличить до 0.1, поэтому, как следует из (1), при значении $\epsilon = 10^{-5}$ поля компонент скорости определяются до шестого знака включительно.

Расчеты проводятся сквозным образом по всей прямоугольной области $(0, L) \times (0, H)$, при этом область уступа $(0, l_c) \times (0, h_c)$ моделируется с помощью приема «большого источника» в уравнениях движения и уравнения Пуассона для p' [20]. Подобный прием позволяет при использовании методики сквозного счета в заранее определенных участках области решения получать заданные величины искомых переменных. В данном случае в зоне уступа полагается $u = v = p' = \theta = 0$, а на границах расчетной области, совпадающих с внешними границами уступа: $y = 0, 0 \leq x \leq l_c$ и $y = h_c, 0 \leq x \leq l_c$, доопределены краевые условия $u = v = \theta = 0$. При этом на линиях В2 и В5 разностные уравнения получены из первоначальных краевых условий задачи, иными словами, компоненты скорости и поток тепла на этих теперь уже «внутренних границах» полагаются равными 0.

Полученные разностные системы линейных алгебраических уравнений относительно числовых векторов \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{p}' = \{p'_{ij}\}$ и $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_{ij}\}$ решаются неявным итерационным полилинейным рекуррентным методом второго порядка, ускоренным в подпространствах Крылова [21]. Решение системы линейных алгебраических уравнений считается найденным при условии, что относительное уменьшение первой нормы невязки не превышает 10^{-8} . Интересно, что при этом первая норма разности двух следующих друг за другом векторов приближения решения не превышает 10^{-7} . Все расчеты проведены на PC Intel Core i5-750, 2,66 GHz, RAM 12 Gb.

§ 2. Результаты проверочных расчетов

Серия расчетов на разных сеточных разбиениях области решения с шагами $h = 1/100, 1/200, 1/300, 1/400, 1/500$ при $Re = 1000, ER = 2, l_c = 0.5, L = 10$ показала, что для $h = 1/300 \div 1/500$ графики профилей как продольной u , так и поперечной v компонент скорости практически совпадают между собой. При $h = 1/200$ относительные отличия в поведении профилей u и v в окрестностях их локальных экстремумов не превышают 1–2 %, а при $h = 1/100$ — 4–5 %. Соответственно, все представленные в настоящей работе результаты получены при $h = 1/300$.

Изменение длины уступа с $l_c = 0.5$ на $l_c = 1$ при $ER = 2, Re = 100, L = 10$ не привело к различиям в решении, поэтому все последующие расчеты проведены при фиксированном $l_c = 0.5$. Согласно литературным данным абсолютное большинство результатов для рассматриваемой задачи получено при $Pr = 0.71$ (воздух), поэтому в настоящей работе этот параметр также не варьировался.

Достоверность полученных решений подтверждается сравнениями с результатами других исследователей, которые представлены на рисунке 2. Профили продольной компоненты скорости $u = u(y)$ в двух сечениях по x приведены на рисунке 2, а, а зависимость горизонтального размера вихря BV_1 (см. рис. 1) за уступом $(x_1 - l_c)$ от числа Re — на рисунке 2, б. Видно, что профили компоненты u совпадают с графической точностью. Что касается размеров вихря за уступом, то в соответствии с неоднократными объяснениями в литературе при $Re \leq 400 \div 500$ в экспериментах устойчиво реализуется двумерный ламинарный режим течения [3, 5], что объясняет хорошее совпадение всех представленных на рисунке результатов. Дальнейшие расхождения данных при росте Re вызваны нарастанием влияния трехмерных эффектов и переходного от ламинарного к турбулентному режима течения. Впрочем, для чисто расчетных результатов [6, 7, 10] имеет место хорошее совпадение во всем диапазоне изменения Re .

На рисунке 2, в представлены графики распределения приведенного коэффициента трения, а на рисунке 2, г — числа Нуссельта по длине канала. Здесь также имеет место хорошее совпадение полученных решений с результатами других авторов, хотя и наблюдается количественное отличие до 15 % с [8] в районе максимальных значений Nu . Следует заметить, что все приведенные сравнения с литературными данными выполнены в рамках обезразмеривания, принятого в настоящей работе, поэтому номинальные величины параметров и координат в оригинальных работах могут быть, вообще говоря, иными.

§ 3. Обсуждение результатов решения задачи

Исследование влияния Re и ER на структуру течения и теплообмен проведено при их следующих значениях: $Re = 100, 200, 400, 600, 800, 1000; ER = 1.11, 1.43, 2, 3.33, 10$. На рисунке 3

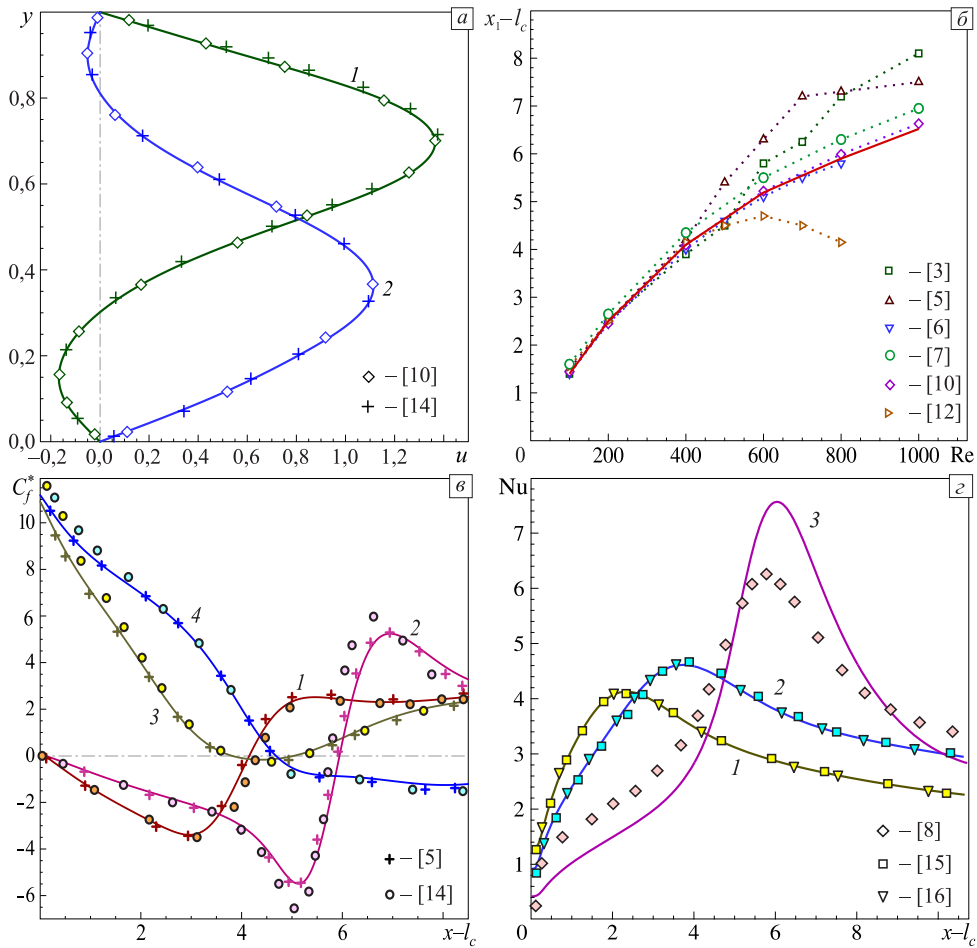


Рис. 2. Сравнение результатов с литературными данными: (а) профили продольной компоненты скорости при $Re = 800, ER = 2$ в сечениях: 1 — $x = 3.5$; 2 — $x = 7.5$; (б) зависимость длины вихря BV_1 от Re при $ER = 2$: — авторский результат, - - - литературные данные ($ER = 1.942$ [3, 7, 10], $ER = 2$ [5, 6, 12]); (в) распределение приведенного коэффициента трения вдоль стенок при $ER = 2$: нижняя стенка: 1 — $Re = 400$, 2 — $Re = 800$; верхняя стенка: 3 — $Re = 400$, 4 — $Re = 800$; (г) распределение числа Нуссельта вдоль нижней стенки: 1 — $Re = 300$, 2 — $Re = 600$ при $ER = 1.5$; 3 — $Re = 800$ при $ER = 2$

представлены результаты влияния Re на решение задачи при фиксированном $ER = 2$. Для анализа картины течения удобно ввести понятие основного потока — участка течения, заключенного между двумя линиями тока, проходящими через точки $(0, h_c)$ и $(0, 1)$. Понятно, что в этом случае жидкость, которая попадает в канал через границу В4 и вытекает из него через, вообще говоря, часть границы В6 и есть основной поток. Все остальные участки внутри канала — обратный уступ, нижние и верхние пристенные вихри — есть препятствия, обеспечивающие отрывной характер течения и играющие роль ограничителей размера пропускного сечения основного потока.

Из картин линий тока на рисунке 3 следует, что по мере роста Re увеличивается длина зоны расширения пропускного сечения основного потока от размера входной границы В4 до размера выходной границы В6. В силу возрастающей при увеличении Re инертности течения (уменьшения влияния сил вязкости) поток медленнее тормозится, а значит, вследствие условия неразрывности он должен медленнее расширяться. Этому по мере роста числа Re как раз способствуют возникающие и увеличивающиеся в размерах вихри, которые сужают пропускное сечение основного потока. Что касается картины прогрева течения, то здесь следует отметить две закономерности: при увеличении Re (соответственно Pe) ширина прогретой зоны на выходе из канала уменьшается, а размер области прогрева непосредственно за уступом увеличивает-

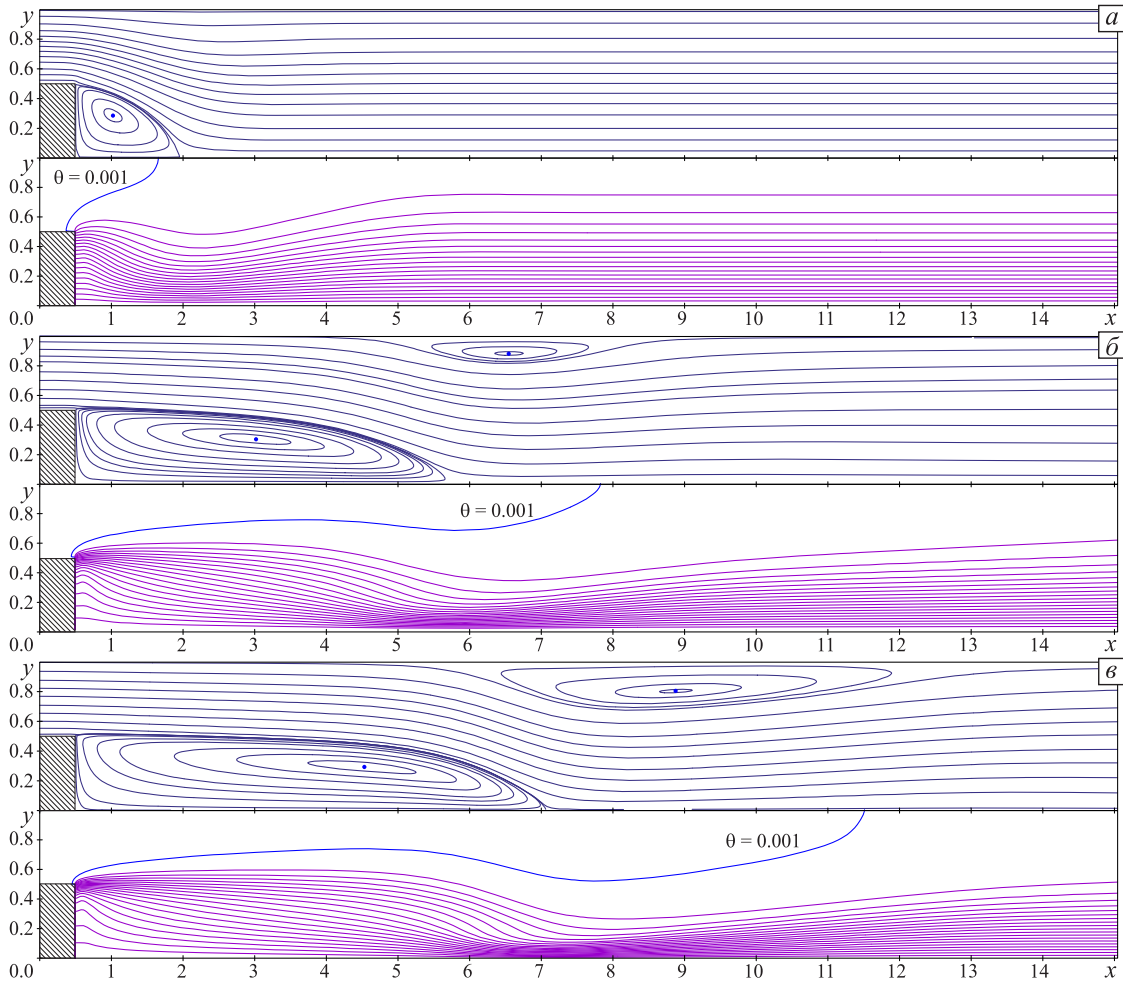


Рис. 3. Линии тока и изотермы перегрева жидкости при $ER = 2$: (а) $Re = 100$; (б) $Re = 600$; (в) $Re = 1000$.
Уровни изотерм: от 0.95 до 0.05 с шагом 0.05

ся. Последнее, естественно, связано с увеличением размеров области перемешивания, то есть вихря BV_1 .

На рисунке 4 представлены результаты серии расчетов, аналогичной предыдущей, однако в этом случае в качестве варьируемой величины выступает параметр расширения потока $ER = 1.11, 2, 10$ при фиксированном значении числа Рейнольдса $Re = 400$. Как и следовало ожидать, при $ER = 1.11$ картины течения и перегрева потока на рассматриваемой длине канала имеют практически автомодельный характер, которые реализуются при обтекании нагретой пластины набегающим в полубесконечном пространстве однородным потоком [17]. При $ER = 2$ верхний вихрь, в отличие от $Re = 600$ (рис. 3, б), еще не образовался, однако характерный изгиб линий тока около верхней стенки в окрестности $x \approx 5.0$ говорит о том, что в случае данного ER $Re \approx 400$ является пороговым значением для «одновихревой» картины движения жидкости.

Наиболее интересное течение имеет место при $ER = 10$. С одной стороны, формируются три вихря, размеры и положения двух из которых BV_1 и TV_1 призваны «предотвратить» чрезмерно резкое расширение основного потока. С другой стороны, в силу относительно невысокого значения Re течение достаточно быстро тормозится и в районе $x \approx 5.0$ движение жидкости выходит на безотрывный режим — линии тока продолжают к выходу параллельно стенкам канала. При этом из характера картины перегрева течения следует, что даже при таком относительно небольшом Re основным механизмом переноса тепла остается конвекция.

Сочетание результатов решения задачи, представленных на рисунке 3 и рисунке 4, говорит

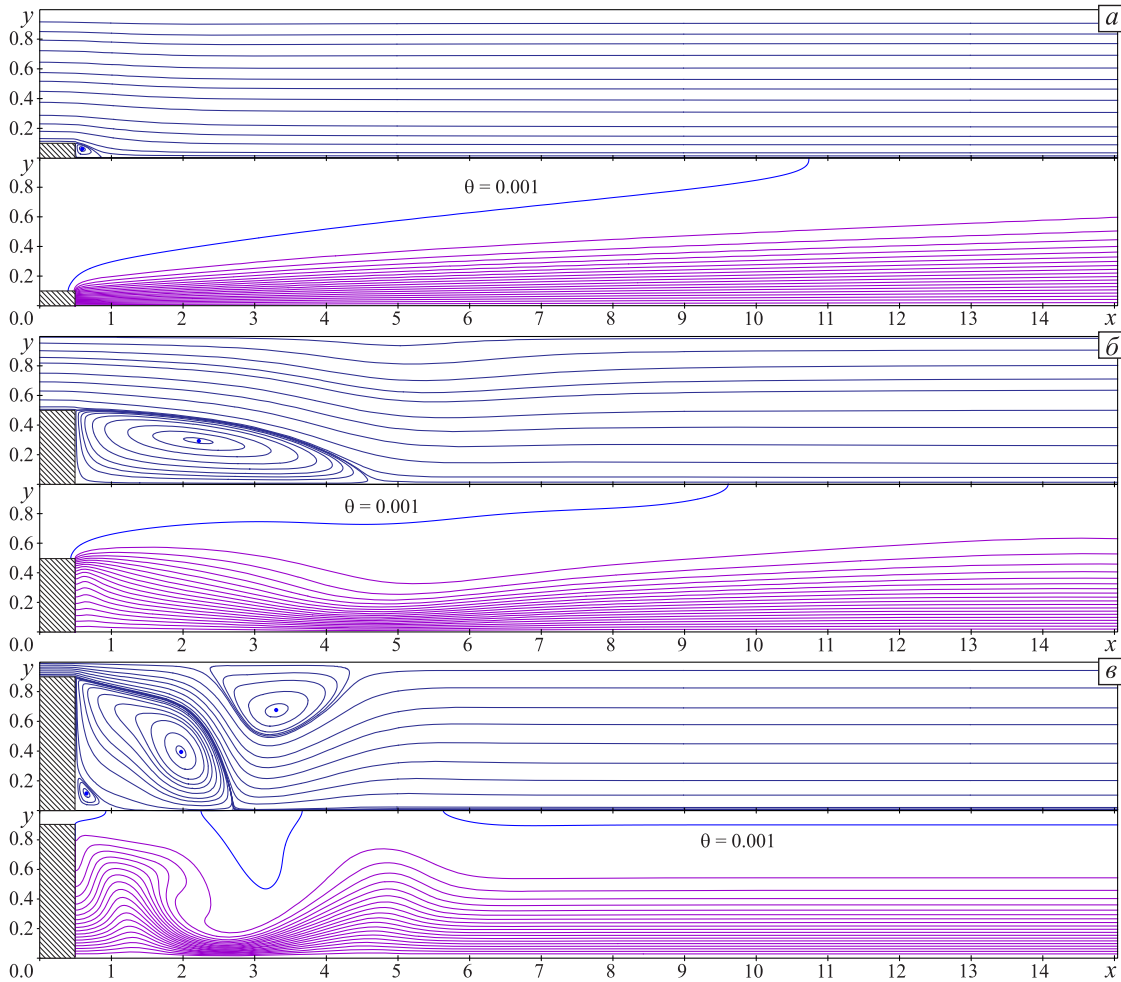


Рис. 4. Линии тока и изотермы перегрева жидкости при $Re = 400$: (а) $ER = 1.11$; (б) $ER = 2$; (в) $ER = 10$.
Уровни изотерм: от 0.95 до 0.05 с шагом 0.05

о том, что одновременное увеличение Re и ER до максимальных величин $Re = 1000$ и $ER = 10$ в рассматриваемых диапазонах их изменений должно привести к наиболее сложным структурам полей течения и перегрева. Действительно, приведенные на рисунке 5 поля линий тока, изобар перепада давления и изолиний перегрева жидкости, а также укрупненный фрагмент картины течения в районе вихрей BV_1 и BV_2 подтверждают это предположение. Нетрудно видеть, что здесь основной отличительной особенностью движения жидкости является вихрь с двумя центрами вращения BV_1 , BV_1^2 и, соответственно, седловой точкой между ними BV_1^x . За счет большого значения Re основной поток расширяется медленно, что объясняет экстремально крупные вертикальные размеры вихрей. Однако по отношению к случаю $Re = 1000$, $ER = 2$ (рис. 3, в) их горизонтальные размеры заметно меньше, что связано с относительно небольшим расходом (соответственно скоростным напором) течения на входе в канал: $Q = 1 - h_c = 0.1$. Для сравнения представленное на рисунке 3, в решение получено при $Q = 0.5$.

Изобары перепада давления на входном участке канала $0 \leq x \leq l_c$ и на выходном при $x \geq 12$ имеют вид практически параллельных отрезков поперек канала, что говорит о развитом погранслоном характере течения на этих участках движения жидкости. Также интересно, что сразу за правыми границами вихрей BV_1 , TV_1 и BV_3 в окрестностях точек присоединения течения $(4.2, 0)$, $(8, 1)$ и $(10.5, 0)$ имеют место локальные максимумы давления, которые как бы препятствуют дальнейшему расширению вихрей вниз по потоку. Сложная структура поля перегрева на рисунке 5, в, которая «следует» за линиями тока, подтверждает вывод о решающей

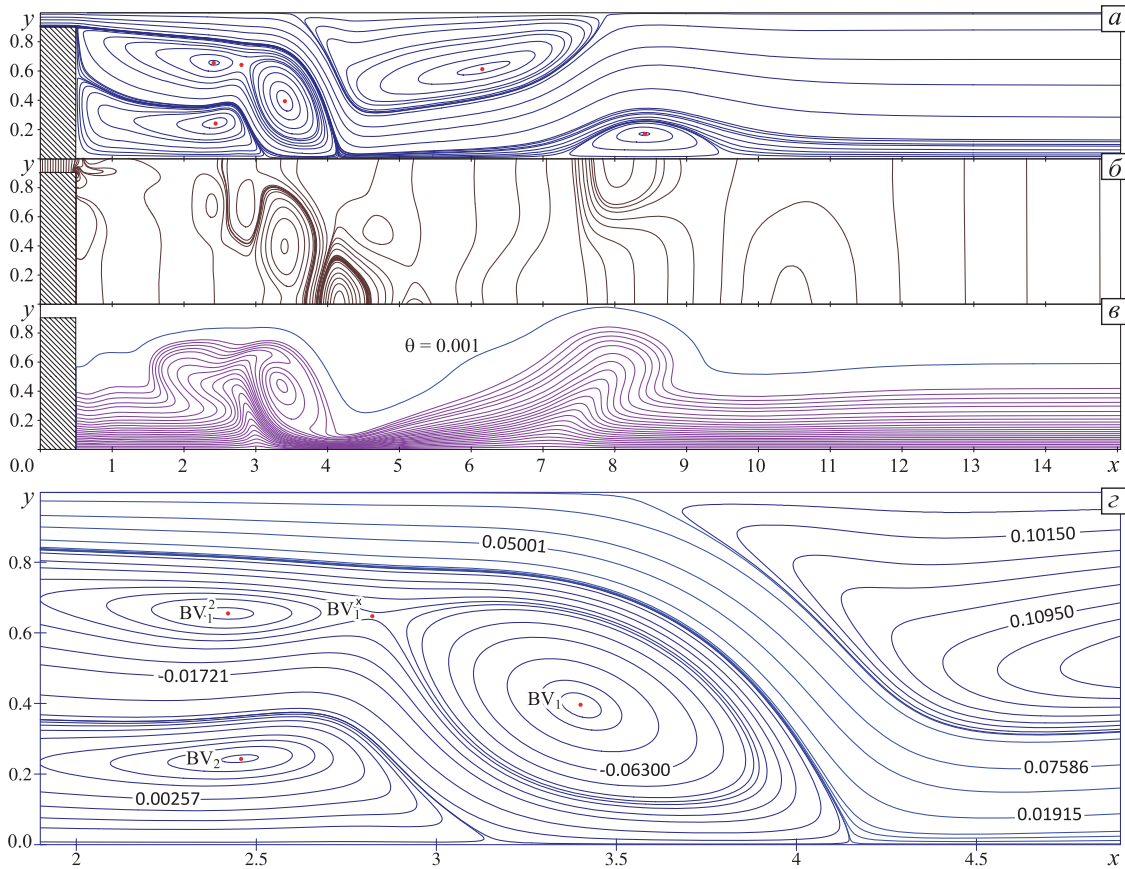


Рис. 5. Линии тока, изобары перепада давления $p - p_0$ и изотермы перегрева жидкости при $Re = 1000$ и $ER = 10$: (а) линии тока; (б) изобары, $p_0 = p(0, h_c)$; (в) изотермы; (г) укрупненный фрагмент картины течения (линии тока) в районе соприкосновения основных вихрей. Уровни изотерм: от 0.95 до 0.05 с шагом 0.05

роли конвективного механизма переноса тепла в рассматриваемых течениях.

Основные параметры центров выявленных на рисунках 3–5 вихрей — координаты (x_c, y_c) , экстремумы функции тока ψ_c , завихренности ω_c — приведены в таблице. Здесь обращает на себя внимание немонотонное поведение горизонтальной координаты x_c вихря BV_1 при фиксированном Re в зависимости от ER . При малых ER , то есть малых высотах уступа h_c , размеры вихря также невелики, соответственно, мало и x_c . При росте h_c увеличивается и вихрь BV_1 , что приводит к «отодвиганию» его центра от уступа вниз по течению (увеличению x_c). Однако при очень больших h_c малый размер входного участка канала $(1 - h_c)$ приводит при прочих равных условиях к падению скоростного напора, то есть уменьшению инерции потока за сечением внезапного расширения канала. Соответственно, уменьшается горизонтальный размер вихря, что, естественно, влечет уменьшение величины x_c .

На рисунке 6 приведены зависимости горизонтального размера вихря BV_1 ($x_1 - l_c$) от Re и ER . Видно, что если при фиксированном ER размер вихря монотонно растет с увеличением Re (рис. 6, а), то при фиксированном Re максимум $(x_1 - l_c)$ приходится на диапазон параметра расширения $2 < ER < 3$, что подтверждает рассуждения о причинах немонотонного поведения x_c по мере роста ER . Любопытно, что для $Re = 400 \div 1000$ наиболее трудоемкими оказались расчеты при $ER = 2$. При прочих равных условиях вычислительное время, необходимое для установления решения для этих вариантов, увеличивалось по отношению к вариантам с параметром расширения 1.11 в 3.5–6.0 раз, а для $ER = 10$ — в 1.1–1.7 раза.

На рисунке 6 также приведены примеры поведения аппроксимационной кривой из [5], свя-

Таблица. Параметры центров вихрей для различных чисел Рейнольдса и параметров расширения потока

Re	ER	вихрь	x_c	y_c	ψ_c	ω_c
100	1.11	BV ₁	0.5539	0.0485	$-3.12 \cdot 10^{-4}$	-1.1212
	2	BV ₁	1.0262	0.2836	-0.0261	-2.1253
	10	BV ₁	0.7955	0.4655	-0.0097	-0.7490
400	1.11	BV ₁	0.5986	0.0589	$-8.60 \cdot 10^{-4}$	-1.6808
	2	BV ₁	2.2128	0.2945	-0.0326	-2.2313
	10	BV ₁	1.9736	0.3972	-0.0666	-1.7201
		TV ₁	3.3079	0.6751	0.1073	0.4282
		BV ₂	0.6504	0.1206	$5.00 \cdot 10^{-5}$	0.0263
600	1.11	BV ₁	0.6085	0.0619	$-1.06 \cdot 10^{-3}$	-1.7689
	2	BV ₁	3.0083	0.2936	-0.0331	-2.2241
		TV ₁	6.5471	0.8736	0.5022	0.8279
	10	BV ₁	2.4626	0.3951	-0.0762	-1.8049
		TV ₁	4.2207	0.6213	0.1132	0.5511
		BV ₂	1.5865	0.1634	$9.91 \cdot 10^{-4}$	0.2310
1000	1.11	BV ₁	0.6397	0.0650	$-1.26 \cdot 10^{-3}$	-1.8878
	2	BV ₁	4.5562	0.2900	-0.0335	-2.2849
		TV ₁	8.8696	0.7887	0.5096	1.3050
	10	BV ₁	3.4010	0.3951	-0.0846	-1.9606
		BV ₁ ²	2.4218	0.6556	-0.0434	-2.7784
		BV ₁ ^x	2.8248	0.6485	-0.0364	-2.2529
		TV ₁	6.1704	0.6145	0.1180	0.6822
		BV ₂	2.4570	0.2437	$4.59 \cdot 10^{-3}$	0.4869
		BV ₃	8.4118	0.1682	$-9.71 \cdot 10^{-4}$	-0.2084

зываются горизонтальный размер вихря BV₁, параметр расширения и число Рейнольдса:

$$x_1 - l_c = 0.3Re^{0.75}(1 - 1/ER)^{1.75}/ER. \quad (2)$$

Соотношение (2) записано в терминах обезразмеривания настоящей работы и отличается от оригинала. Сравнение с результатами проведенных расчетов показывает, что формула (2) хорошо выполняется для $1.11 \leq ER \leq 2$ во всем диапазоне рассматриваемых чисел Рейнольдса. При дальнейшем увеличении ER от 2 до 10 диапазон чисел Re, для которых имеет место хорошая согласованность расчетных данных и формулы (2), сокращается от $100 \leq Re \leq 800$ при $ER = 2$ до $100 \leq Re \leq 200$ при $ER = 10$. Вне этих диапазонов по Re рассогласование расчетных и аппроксимационных значений $x_1 - l_c$ составляет свыше 10 %, что, в частности, хорошо видно на рисунке 6, а.

На рисунке 7 представлены распределения вдоль нижней и верхней стенок канала приведенных коэффициентов трения для различных ER и Re. Обращает на себя внимание сильно немонотонный характер поведения кривых, что, по сути, является отражением сложной вихревой структуры отрывного течения внутри канала.

Видно, что для каждого фиксированного значения параметра расширения ER соответствующие ему профили коэффициента трения принципиально отличаются друг от друга. Обратное

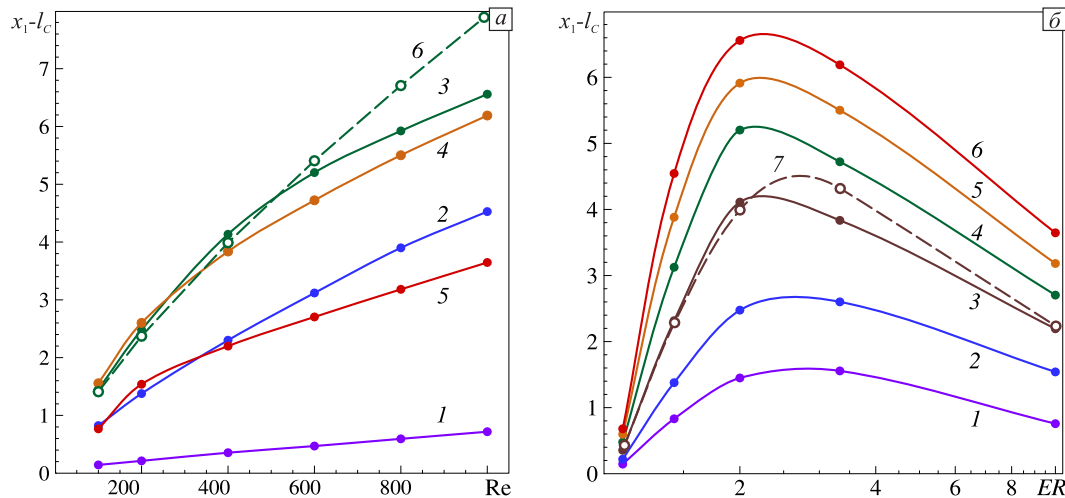


Рис. 6. Горизонтальный размер вихря BV1: (а) зависимость $x_1 - l_c$ от Re : 1 — $ER = 1.11$; 2 — $ER = 1.43$; 3(6) — $ER = 2$; 4 — $ER = 3.33$; 5 — $ER = 10$; (б) зависимость $x_1 - l_c$ от ER : 1 — $Re = 100$; 2 — $Re = 200$; 3(7) — $Re = 400$; 4 — $Re = 600$; 5 — $Re = 800$; 6 — $Re = 1000$. — авторский результат, - - - аппроксимация (2)

утверждение также верно: при фиксированном Re графики C_f^* для разных ER сильно различаются. При этом амплитуда C_f^* на нижней стенке канала увеличивается по мере роста ER независимо от числа Рейнольдса. На верхней стенке ситуация сложнее: для $Re = 1000$ амплитуда C_f^* также увеличивается вместе с ER , а для $Re = 100$ все наоборот. Еще одно различие в поведении приведенных коэффициентов трения заключается в том, что на нижней стенке максимальные абсолютные значения C_f^* реализуются сразу же за основанием уступа ($x = l_c$), в то время как на верхней стенке максимальные амплитуды C_f^* достигаются на заметном расстоянии от уступа — в данном случае это происходит при $x > 2$.

На рисунке 8 приведены распределения коэффициента гидродинамического сопротивления λ и числа Нуссельта Nu по длине канала. В силу больших значений λ при $Re = 1000$, $ER = 10$ соответствующую кривую на рисунке 8, а следует относить к правой оси ординат.

Хорошо видно, что графики $\lambda(x)$ принципиально по-разному ведут себя на узком входном и широком выходном участках канала, причем в сечении внезапного расширения имеет место скачок значения λ тем больший, чем больше величина ER . Интересно, что на входном участке канала ($0 \leq x \leq 0.5$ или $\lg x < -0.30$) λ практически не зависит от x , при этом его среднее значение приблизительно равно $24/Re_c$, где Re_c — число Рейнольдса, рассчитанное по высоте входного участка канала. Например, при $Re = 100$ и $ER = 1.11$ $Re_c \approx 91$, откуда следует, что $\lambda \approx 0.264$, а при $Re = 1000$ и $ER = 10$ $Re_c = 100$, соответственно, $\lambda = 0.24$, что объясняет для этих случаев практическое совпадение кривых $\lambda(x)$ на входном участке. И поскольку для ламинарных течений в плоских каналах выполняется закон сопротивления $\lambda = 24/Re$ [17], то данные результаты по λ на входном участке канала являются дополнительным подтверждением корректности полученных решений задачи.

Характер распределения $Nu(x)$ вдоль нижней стенки канала (рис. 8, б) в качественном отношении аналогичен распределению C_f^* вдоль верхней стенки: при $Re = 1000$ чем больше ER , тем больше амплитуда значений Nu , а при $Re = 100$ все наоборот. Также обращают на себя внимание смещение максимума Nu вниз по потоку с ростом Re при фиксированном ER и немонотонность смещения максимума Nu при росте ER : при $ER = 1.11$ и 10 максимум Nu располагается ближе к основанию уступа, чем при $ER = 2$.

Заключение и выводы

В работе представлены результаты численного решения задачи стационарного течения теплопроводной вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с обратным уступом и подо-

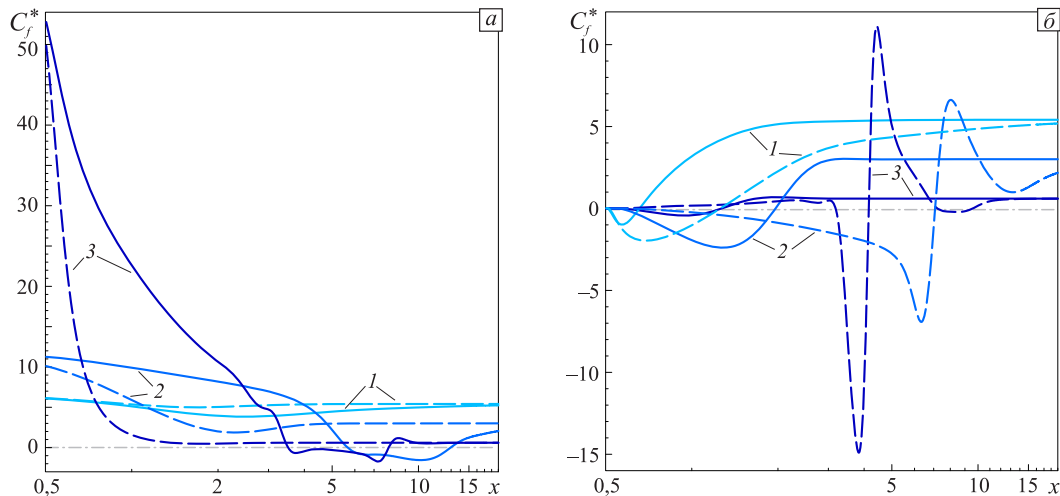


Рис. 7. Распределение приведенных коэффициентов трения по x вдоль нижней (а) и верхней (б) стенок канала. — $Re = 100$, - - - $Re = 1000$. 1 — $ER = 1.11$; 2 — $ER = 2$; 3 — $ER = 10$

греваемой нижней стенкой для чисел Рейнольдса $100 \leq Re \leq 1000$ и параметра расширения канала $1.11 \leq ER \leq 10$ при неизменном числе Прандтля $Pr = 0.71$ и постоянной длине канала в 20 единиц его полной высоты. Двумерные картины структур течения и перегрева жидкости приведены для $Re = 100, 600, 1000$ при $ER = 2$ и для $ER = 1.11, 2, 10$ при $Re = 400$, а также, как особо интересный случай, для $Re = 1000, ER = 10$. Для центров вихрей определены их основные параметры: координаты, экстремумы функции тока, завихренности. Выявлен характер распределения приведенного коэффициента трения вдоль верхней и нижней стенок канала, числа Нуссельта вдоль нижней стенки канала и коэффициента гидродинамического сопротивления движению жидкости по длине канала. Достоверность полученных результатов подтверждена сравнением с литературными данными при соответствующих значениях параметров задачи.

На основании полученных решений задачи в рассмотренных диапазонах изменения параметров Re и ER можно сделать следующие выводы.

1. Структура полей течения и перегрева жидкости усложняется при одновременном увеличении значений числа Рейнольдса и параметра расширения канала – увеличиваются количество вихрей и их размеры вплоть до образования сразу за уступом вихря с двумя центрами вращения и седловой точкой между ними.
2. Жидкость прогревается в основном за счет конвективного переноса, при этом ширина зоны прогрева слабо зависит от параметров задачи и ближе к выходу из канала составляет приблизительно половину его высоты.
3. Коэффициенты трения, гидродинамического сопротивления и теплоотдачи распределяются по длине канала немонотонным образом, отражая сложную вихревую структуру отрывного течения. При этом максимальные абсолютные значения этих коэффициентов достигаются при одновременно максимальных значениях Re и ER .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир. 1980. 616 с.
2. Бруцкий Е.В., Костин А.Г. Прямое численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе уравнений Навье–Стокса // Приклад. гідромеханіка. 2010. Т. 12. № 1. С. 11–27.
3. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 127. P. 473–496.

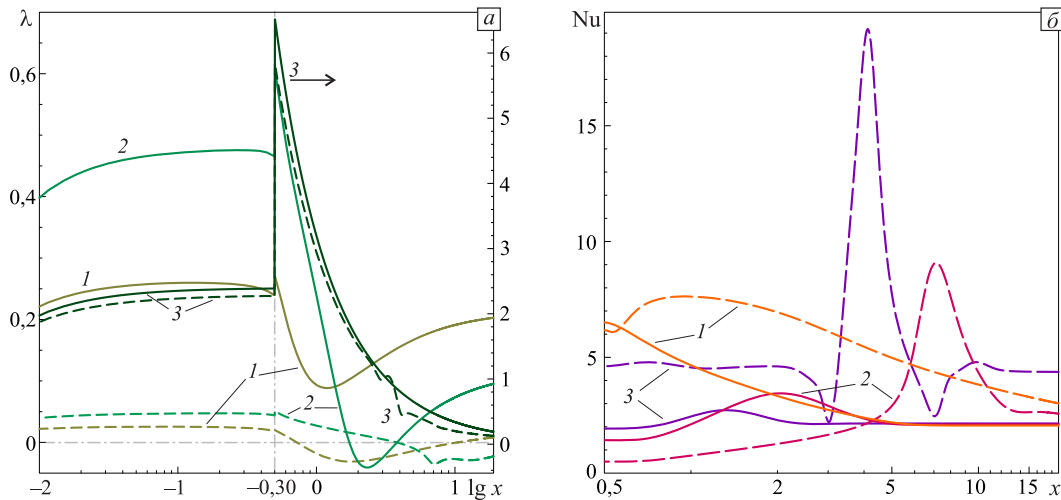


Рис. 8. Распределение коэффициентов гидродинамического сопротивления (а) и теплоотдачи (б) по длине канала. — Re = 100, - - - Re = 1000. 1 — ER = 1.11; 2 — ER = 2; 3 — ER = 10

4. Сингха С.Н., Гупта А.К., Оберай М.М. Ламинарное отрывное обтекание уступов и каверн. Часть I. Течение за уступом // Ракетная техника и космонавтика. 1981. Т. 19. № 12. С. 33–37.
5. Tihon J., Pěnkavová V., Navlica J., Šimčík M. The transitional backward-facing step flow in a water channel with variable expansion geometry // Exp. Therm. Fluid Sci. 2012. Vol. 40. P. 112–125.
6. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // Appl. Numer. Math. 1991. Vol. 8. № 1. P. 43–64.
7. Chiang T.P., Sheu Tony W.H., Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in a backward-facing step expansion flow // Appl. Math. Model. 1999. Vol. 23. № 12. P. 915–932.
8. Батенко С.Р., Терехов В.И. Трение и теплообмен в ламинарном отрывном потоке за прямоугольным уступом при наличии пористого вдува или отсоса // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 1. С. 18–28.
9. Бубенчиков А.М., Фирсов Д.К., Котовщикова М.А. Численное решение плоских задач динамики вязкой жидкости методом контрольных объемов на треугольных сетках // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 6. С. 71–85.
10. Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions // Computers & Fluids. 2008. Vol. 37. № 6. P. 633–655.
11. Попонин В.С., Кошеутов А.В., Григорьев В.П., Мельникова В.Н. Метод спектральных элементов для решения плоских задач динамики вязкой жидкости на неразнесенных неструктурированных сетках // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 317. № 2: Математика и механика. Физика. С. 31–36.
12. Valencia A., Hinojosa L. Numerical solutions of pulsating flow and heat transfer characteristics in a channel with a backward-facing step // Heat Mass Transfer. 1997. Vol. 32. № 3. P. 143–148.
13. Батенко С.Р., Терехов В.И. Влияние динамической предыстории потока на аэродинамику ламинарного отрывного течения в канале за обратным прямоугольным уступом // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 6. С. 84–92.
14. Abu-Nada E., Al-Sarkhi A., Akash B., Al-Hinti I. Heat transfer and fluid flow characteristics of separated flows encountered in a backward-facing step under the effect of suction and blowing // J. Heat Transfer. 2007. Vol. 129. № 11. P. 1517–1528.
15. Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. John Wiley & Sons, Ltd., 2004. 341 p.
16. Teruel F.E., Fogliatto E. Numerical simulations of flow, heat transfer and conjugate heat transfer in the backward-facing step geometry // Mecanica Computacional. 2013. Vol. 32. № 39. P. 3265–3278.
17. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 5-е изд. М.: Наука, 1978. 736 с.
18. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 197–207.

19. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Неявный итерационный полинейный рекуррентный метод в применении к решению задач динамики несжимаемой вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 1. С. 35–50.
20. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
21. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Ускорение полинейного рекуррентного метода в подпространствах Крылова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2. С. 45–54.

Поступила в редакцию 12.05.2015

Фомин Александр Аркадьевич, к. ф.-м. н., ведущий эксперт, отдел развития и международного сотрудничества, Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 650000, Россия, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28.

E-mail: fomin_aa@mail.ru

Фомина Любовь Николаевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра вычислительной математики, Кемеровский государственный университет, 650043, Россия, г. Кемерово, ул. Красная, 6.

E-mail: lubafomina@mail.ru

A. A. Fomin, L. N. Fomina

Numerical simulation of the viscous incompressible fluid flow and heat transfer in a plane channel with backward-facing step

Keywords: Navier–Stokes equations, a plane channel with backward-facing step, separating flow.

MSC: 65N06, 76D05, 80A20

The paper deals with the results of solving the problem of steady-state flow of a viscous incompressible fluid in a plane channel with a backward-facing step and a heated bottom wall for the Reynolds number in the range $100 \leq \text{Re} \leq 1000$ and the expansion ratio of a plane channel in the range $1.11 \leq ER \leq 10$. The study was carried out by numerical integration of the 2-D Navier–Stokes equations in velocity-pressure formulation on uniform grids with a step which equals to $1/300$. Correction of the results is confirmed by comparing them with the literature data. Detailed flow patterns and fields of stream overheating depending on two basic parameters of the problem Re and ER are demonstrated. It is shown that with the increase of parameters Re and ER the structure of flow becomes much more complicated, that is, there is an increase of the number of vortices and their sizes up to the formation of a vortex behind the backward-facing step with two centers of rotation. It is also stated that the typical height of the heating zone of the flow depends weakly on Re and ER and eventually, near the exit of the channel, equals approximately half of the channel height. For all centers of vortices their main characteristics are defined: location, extremums of stream function, vorticity. Complex nonmonotonic behaviors of the coefficients of friction, hydrodynamic resistance and heat transfer (Nusselt number) along the channel are analyzed. It is shown that these coefficients strongly depend both on Reynolds number and on expansion ratio, reaching the maximum values at the maximum values of Re and ER .

REFERENCES

1. Roache P.J. *Computational fluid dynamics*, Albuquerque: Hermosa Publs., 1976, 446 p. Translated under the title *Vychislitel'naya gidrodinamika*, Moscow: Mir, 1980, 616 p.
2. Bruyatski E.V., Kostin A.G. Direct numerical simulation of flow in plane suddenly expanding channel on the basis of Navier–Stokes equations, *Priklad. Gidromekhanika*, 2010, vol. 12, no. 1, pp. 11–27 (in Russian).
3. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow, *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 127, pp. 473–496. DOI: 10.1017/S0022112083002839
4. Sinha S.N., Gupta A.K., Oberai M.M. Laminar separating flow over backsteps and cavities. Part I: Backsteps, *AIAA J.*, 1981, vol. 19, no. 12, pp. 1527–1530. DOI: 10.2514/3.7885

5. Tihon J., Pěnkavová V., Havlica J., Šimčík M. The transitional backward-facing step flow in a water channel with variable expansion geometry, *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2012, vol. 40, pp. 112–125.
DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2012.02.006
6. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier–Stokes equations, *Appl. Numer. Math.*, 1991, vol. 8, no. 1, pp. 43–64. DOI: 10.1016/0168-9274(91)90097-J
7. Chiang T.P., Sheu Tony W.H., Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in a backward-facing step expansion flow, *Appl. Math. Model.*, 1999, vol. 23, no. 12, pp. 915–932.
DOI: 10.1016/S0307-904X(99)00019-0
8. Batenko S.R., Terekhov V.I. Friction and heat transfer in a laminar separated flow behind a rectangular step with porous injection or suction, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 12–21.
9. Bubenchikov A.M., Firsov D.K., Kotovshchikova M.A. Numerical solution of 2D viscous fluid dynamics problems using finite volume method (FVM) on triangular grid, *Mat. Model.*, 2007, vol. 19, no. 6, pp. 71–85 (in Russian).
10. Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solutions, *Computers & Fluids*, 2008, vol. 37, no. 6, pp. 633–655.
DOI: 10.1016/j.compfluid.2007.09.003
11. Poponin V.S., Kosheutov A.V., Grigor'ev V.P., Mel'nikova V.N. Method of spectral elements for resolving of plane viscous fluid dynamics problems on unstructured and nonshifted meshes, *Izvestiya Tomskogo Politehnicheskogo Universiteta*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 31–36 (in Russian).
12. Valencia A., Hinojosa L. Numerical solutions of pulsating flow and heat transfer characteristics in a channel with a backward-facing step, *Heat Mass Transfer*, 1997, vol. 32, no. 3, pp. 143–148.
DOI: 10.1007/s002310050104
13. Batenko S.R., Terekhov V.I. Effect of dynamic prehistory on aerodynamics of a laminar separated flow in a channel behind a rectangular backward-facing step, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 6, pp. 854–860.
14. Abu-Nada E., Al-Sarkhi A., Akash B., Al-Hinti I. Heat transfer and fluid flow characteristics of separated flows encountered in a backward-facing step under the effect of suction and blowing, *J. Heat Transfer*, 2007, vol. 129, no. 11, pp. 1517–1528. DOI: 10.1115/1.2759973
15. Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*, John Wiley & Sons, Ltd., 2004, 341 p.
16. Teruel F.E., Fogliatto E. Numerical simulations of flow, heat transfer and conjugate heat transfer in the backward-facing step geometry, *Mecanica Computacional*, 2013, vol. 32, no. 39, pp. 3265–3278.
17. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Fluid mechanics), Moscow: Nauka, 1978, 736 p.
18. Belotserkovskii O.M., Gushchin V.A., Shchennikov V.V. Use of the splitting method to solve problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid, *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1975, vol. 15, no. 1, pp. 190–200. DOI: 10.1016/0041-5553(75)90146-9
19. Fomin A.A., Fomina L.N. The implicit line-by-line recurrence method in application to the solution of problems of incompressible viscous fluid dynamics, *Komp'yuternye Issledovaniya i Modelirovanie*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 35–50 (in Russian).
20. Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*, Washington–New York–London: Hemisphere Publishing Corporation, 1980, 197 p. Translated under the title *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti*, Moscow: Energoatomizdat, 1984, 152 p.
21. Fomin A.A., Fomina L.N. Acceleration of the line-by-line recurrent method in Krylov subspaces, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2011, no. 2, pp. 45–54 (in Russian).

Received 12.05.2015

Fomin Aleksandr Arkad'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Expert, Department of Development and International Cooperation, Kuzbass State Technical University, ul. Vesennaya, 28, Kemerovo, 650000, Russia.

E-mail: fomin_aa@mail.ru

Fomina Lubov' Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics, Kemerovo State University, ul. Krasnaya, 6, Kemerovo, 650043, Russia.

E-mail: lubafomina@mail.ru