УДК 532.591

© *К. Ю. Басинский*

ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ВОЛНОВОМ ДВИЖЕНИИ

Рассматривается движение частиц вязкой несжимаемой жидкости, вызванное распространением по свободной поверхности волны малой амплитуды. Получены уравнения движения жидких частиц при наличии бегущей или стоячей волны на поверхности бесконечно глубокого слоя.

При распространении бегущей волны траектории имеют вид спирали, центр которой соответствует состоянию покоя. Влияние вязкости проявляется как в уменьшении амплитуды колебаний со временем, так и в отличии формы траекторий частиц, находящихся вблизи свободной поверхности и при заглублении. В случае стоячей волны движение каждой частицы происходит по отрезкам, длина которых с течением времени уменьшается. Направление движения изменяется от вертикального в пучностях до горизонтального в узлах.

Ключевые слова: вязкость, волновое движение, траектории частиц.

Введение

Исследование волновых траекторий жидких частиц при наличии бегущей или стоячей волны малой амплитуды на поверхности слоя идеальной жидкости приведено в [1, 2]. В [3] получены траектории в случае нелинейной задачи о прогрессивных волнах, найдено выражение для скорости приповерхностного течения. Для магнитогидродинамических волн нелинейные траектории жидких частиц исследованы в работе [4]. В данной работе приводится исследование движения частиц жидкости при наличии бегущей или стоячей волны малой амплитуды на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины.

§ 1. Траектории частиц при наличии бегущей волны

Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Декартова система координат задана так, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, а ось z противоположно направлена вектору силы тяжести $\mathbf{g}$. Движение жидкости происходит в плоскости xz со скоростью $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_x(t,x,z), 0, \mathrm{v}_z(t,x,z))$. В положительном направлении оси x распространяется волна длины λ.

Уравнения движения частицы жидкости имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_x, \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{v}_z. \tag{1}$$

Выражения для компонент скорости v_x и v_z известны. Их, в частности, можно найти в [1, 5], где они приведены в комплексной форме. В действительной форме данные выражения найдены в [6]. Воспользуемся последним вариантом:

$$\mathrm{v}_x = A\omega_0 e^{-\beta\omega_0 t}\biggl(e^{kz}\cos(kx-\omega t) - \frac{2\nu_0}{\alpha^2+s^2}e^{bkz}\{[(\alpha a + bs)\cos akz + (\alpha b - as)\cdot \tag{2}$$

$$\cdot \sin akz]\cos(kx-\omega t) + [(as-\alpha b)\cos akz + (\alpha a + bs)\sin akz]\sin(kx-\omega t)\}\biggr),$$

$$\mathrm{v}_z = A\omega_0 e^{-\beta\omega_0 t}\biggl\{e^{kz}\sin(kx-\omega t) - \frac{2\nu_0}{\alpha^2+s^2}e^{bkz}[(\alpha\cos akz - s\sin akz)\cos(kx-\omega t) +$$

$$+ (\alpha \sin akz + s \cos akz) \sin (kx - \omega t)] \Big\}.$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, ω — частота волны, β — безразмерный декремент затухания ($\beta\omega_0$ — размерный), A — амплитудный параметр, $\omega_0 = \sqrt{gk}$ — частота волны линейной задачи для идеальной жидкости, $\nu_0 = \nu k^2/\omega_0$, ν — кинематический коэффициент вязкости, $\alpha = \omega/\omega_0$, $s = 2\nu_0 - \beta$. Параметры a и b связаны уравнениями $a^2 = b^2 - 1 + \beta/\nu_0$, $2ab = \alpha/\nu_0$.

Частота волны через декремент затухания выражается следующим образом:

$$\alpha^2 = 1 + s^2 - 4\nu_0^3/s.$$

Для декремента затухания же получено уравнение

$$s^6 + s^4 - 4\nu_0^4 s^2 - 4\nu_0^6 = 0,$$

аналитическое решение которого найдено, но не приведено здесь из-за своей громоздкости.

Подставив выражения (2) в уравнения (1), их решение будем искать в виде рядов по малому безразмерному параметру $\varepsilon = Ak$:

$$x = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots, \quad z = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \ldots.$$

Подстановка этих разложений в уравнения движения и сравнение членов с одинаковыми степенями приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{dX_0}{dt} = 0, \quad \frac{dZ_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{\omega_0}{k} e^{-\beta\omega_0 t} \Bigg(e^{kZ_0} \cos (kX_0 - \omega t) - \frac{2\nu_0}{\alpha^2 + s^2} e^{bkZ_0} \{ [(\alpha a + bs) \cos akZ_0 +$$
$$+ (\alpha b - as) \sin akZ_0] \cos (kX_0 - \omega t) + [(as - \alpha b) \cos akZ_0 +$$
$$+ (\alpha a + bs) \sin akZ_0] \sin (kX_0 - \omega t) \} \Bigg),$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{\omega_0}{k} e^{-\beta\omega_0 t^*} \Bigg\{ e^{kZ_0} \sin (kX_0 - \omega t) - \frac{2\nu_0}{\alpha^2 + s^2} e^{bkZ_0} [(\alpha \cos akZ_0 - s \sin akZ_0) \cdot$$
$$\cdot \cos(kX_0 - \omega t) + (\sin akZ_0 + s \cos akZ_0) \sin(kX_0 - \omega t)] \Bigg\}.$$

Интегрируя первые два уравнения, получаем

$$X_0 = x_L, \quad Z_0 = z_L,$$

где x_L и z_L — постоянные. Подставляя эти выражения в последние два уравнения и интегрируя их, находим

$$X_1 = \frac{e^{-\omega_0 t}}{k(\alpha^2 + \beta^2)} \Bigg\{ -e^{kz_L} (\beta \cos \chi_L + \alpha \sin \chi_L) + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2 + s^2} [(af_1(z_L) + bf_2(z_L)) +$$
$$+ (af_2(z_L) - bf_1(z_L))] \sin \chi_L \Bigg\} + C_x,$$

$$Z_1 = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{k(\alpha^2 + \beta^2)} \left[e^{kz_L} (\alpha \cos \chi_L - \beta \sin \chi_L) + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2 + s^2} (f_1(z_L) \cos \chi_L + f_2(z_L) \sin \chi_L) \right] + C_z,$$

$$f_1(z) = 2\alpha(\beta - \nu_0) \cos akz - (\alpha^2 + \beta s) \sin akz, \quad f_2(z) = (\alpha^2 + \beta s) \cos akz + 2\alpha(\beta - \nu_0) \sin akz,$$

где $\chi_L = kx_L - \omega t$, C_x, C_z — произвольные константы.

Определим постоянные интегрирования C_x и C_z так, чтобы величины x_L и z_L были значениями x и z в момент времени $t = 0$, то есть были лагранжевыми координатами движущейся частицы жидкости. Для этого нужно взять

$$C_x = \frac{1}{k\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left\{e^{kz_L}\left(\beta\cos kx_L + \alpha\sin kx_L\right) - \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2}\left[(af_1(z_L) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + bf_2(z_L))\cos kx_L + (af_2(z_L) - bf_1(z_L))\right]\sin kx_L\right\},$$
$$C_z = \frac{1}{k\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left[e^{kz_L}\left(\beta\sin kx_L - \alpha\cos kx_L\right) - \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(f_1(z_L)\cos kx_L + f_2(z_L)\sin kx_L\right)\right].$$

Теперь можно записать уравнения движения частицы в линейном приближении:

$$x = x_L + \varepsilon\frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{k\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left\{-e^{kz_L}\left(\beta\cos\chi_L + \alpha\sin\chi_L\right) + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2}\left[(af_1(z_L) + bf_2(z_L))\cdot\right.\right. \tag{3}$$
$$\left.\left.\cdot\cos\chi_L + (af_2(z_L) - bf_1(z_L))\sin\chi_L\right]\right\} + \varepsilon C_x,$$
$$z = z_L + \varepsilon\frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{k\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left[e^{kz_L}\left(\alpha\cos\chi_L - \beta\sin\chi_L\right) + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2}\left(f_1(z_L)\cos\chi_L + \right.\right.$$
$$\left.\left. + f_2(z_L)\sin\chi_L\right)\right] + \varepsilon C_z.$$

Исключив из уравнений (3) время t, можно получить уравнение траектории частицы, которое не приведено из-за громоздкости. Траекторией частицы является спираль, выходящая из точки с координатами (x_L, z_L). Центр траектории соответствует состоянию покоя, наступающему при полном затухании волны.

Для примера на рисунках 1, 2 приведены траектории движения жидких частиц. При малом значении вязкости ($\nu = 10^{-6}$ м^2/с, рис. 1) волновое движение затухает медленно, и на коротком промежутке времени траектории мало отличаются от окружностей, что соответствует классическим результатам. На рис. 2 приведены траектории при вязкости $\nu = 10^{-3}$ м^2/с. Волновое возмущение жидкости с такой вязкостью не встречается в природе, однако такой пример позволяет проиллюстрировать влияние вязкости на форму траектории жидкой частицы. Вблизи поверхности спираль сужена и наклонена в сторону движения, что не наблюдается на заглублении. Это можно объяснить влиянием вязких касательных напряжений на свободной поверхности.

§ 2. Траектории частиц при наличии стоячей волны

В случае возмущения свободной поверхности в виде стоячей волны выражения для компонент вектора скорости имеют вид:

$$\mathrm{v}_x = A\omega_0 e^{-\beta\omega_0 t}\left(-e^{kz}\cos\omega t + \frac{2\nu_0}{\alpha^2+s^2}e^{bkz}\left\{\left[(\alpha a + bs)\cos akz + (\alpha b - as)\cdot\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdot\sin akz\right]\cos\omega t + \left[(\alpha b - as)\cos akz - (\alpha a + bs)\sin akz\right]\sin\omega t\right\}\right)\sin kx,$$
$$\mathrm{v}_z = A\omega_0 e^{-\beta\omega_0 t}\left\{e^{kz}\cos\omega t - \frac{2\nu_0}{\alpha^2+s^2}e^{bkz}\left[(\alpha\cos akz - s\sin akz)\sin\omega t + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (\alpha\sin akz + s\cos akz)\cos\omega t\right]\right\}\cos kx.$$

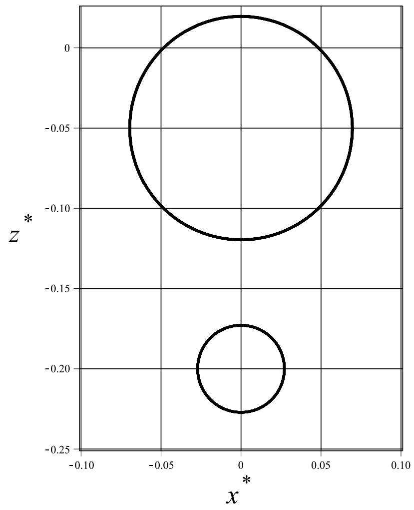

Рис. 1. Траектории частиц жидкости при $\nu = 10^{-6}$ м^2/с

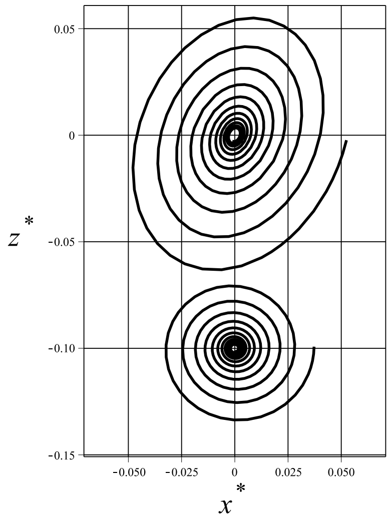

Рис. 2. Траектории частиц жидкости при $\nu = 10^{-3}$ м^2/с

Здесь все величины и обозначения имеют тот же смысл и вид, что и для бегущей волны.

Проделав те же операции, что и в предыдущем пункте, получим следующие выражения для траекторий:

$$x = x_L + \varepsilon \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{k\,(\alpha^2+\beta^2)} \left\{ e^{kz_L} \left(\beta\cos\omega t - \alpha\sin\omega t\right) + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2} \left[-\left(af_1(z_L)+bf_2(z_L)\right)\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\cos\omega t + \left(af_2(z_L)-bf_1(z_L)\right)\right]\sin\omega t\right\} \sin kx_L + \varepsilon C_x,$$
$$z = z_L + \varepsilon \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{k\,(\alpha^2+\beta^2)} \left[e^{kz_L} \left(\alpha\sin\omega t - \beta\cos\omega t\right) + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2} \left(f_1(z_L)\sin\omega t + \right.\right.$$
$$\left.\left. + f_2(z_L)\cos\omega t\right)\right] \cos kx_L + \varepsilon C_z,$$

где

$$f_1(z) = 2\alpha(\beta-\nu_0)\cos akz - (\alpha^2+\beta s)\sin akz, \quad f_2(z) = (\alpha^2+\beta s)\cos akz + 2\alpha(\beta-\nu_0)\sin akz,$$
$$C_x = \frac{1}{k\,(\alpha^2+\beta^2)} \left[-e^{kz_L}\beta + \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2}\left(af_1(z_L)+bf_2(z_L)\right)\right] \sin kx_L,$$
$$C_z = \frac{1}{k\,(\alpha^2+\beta^2)} \left[\beta e^{kz_L} - \frac{2\nu_0 e^{bkz_L}}{\alpha^2+s^2} f_2(z_L)\right] \cos kx_L.$$

Движение каждой частицы будет происходить по отрезкам (рис. 3, 4). Направление движения изменяется от вертикального в пучностях ($kx = m\pi$) до горизонтального в узлах ($kx = (m+1/2)\,\pi$). При этом вследствие наличия вязкости амплитуда колебаний с течением времени уменьшается.

Заключение

Таким образом, получены уравнения движения жидких частиц при наличии бегущей или стоячей волны малой амплитуды на поверхности бесконечно глубокого слоя вязкой несжимаемой жидкости. Выявлено, что вязкость жидкости оказывает существенное влияние на форму траекторий жидких частиц, которое проявляется как в уменьшении амплитуды колебаний, так и в отличии траекторий вблизи свободной поверхности и при заглублении в случае бегущей волны.

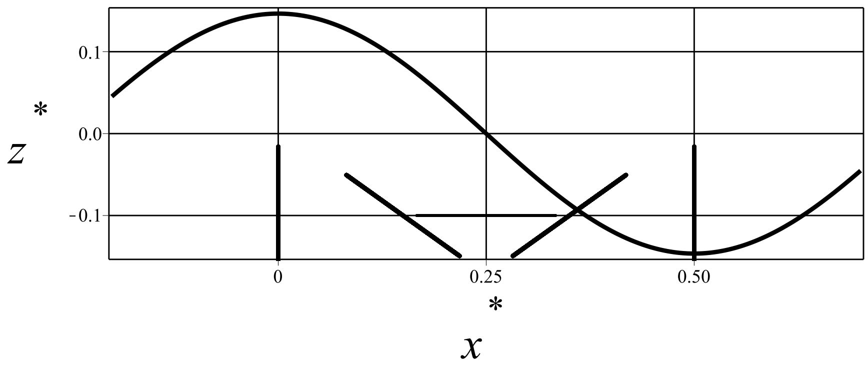

Рис. 3. Траектории частиц жидкости при $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $t = 60..70$ с

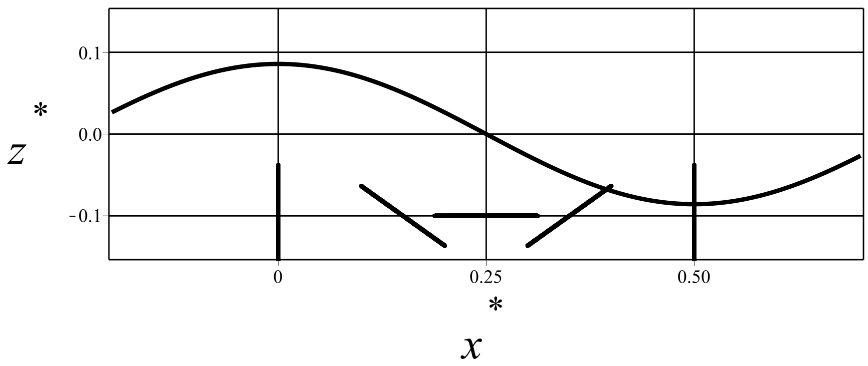

Рис. 4. Траектории частиц жидкости при $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $t = 1.99 \cdot 10^3..2 \cdot 10^3$ с

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
4. Баринов В.А., Тактаров Н.Г. Математическое моделирование магнитогидродинамических поверхностных волн. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 1991. 96 с.
5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
6. Баринов В.А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 2. С. 18–31.

Поступила в редакцию 04.06.2015

Басинский Константин Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет, 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.
E-mail: kbasinsky@mail.ru

K. Yu. Basinskii

The trajectories of the particles of a viscous fluid under wave motion

Keywords: viscosity, wave motion, particle trajectories.

MSC: 76D33

The motion of the particles of a viscous incompressible fluid caused by the proliferation of free surface waves of small amplitude is considered. The equations of motion of fluid particles in the presence of a traveling or a standing wave on the surface of an infinitely deep layer are obtained. At the propagation of a traveling wave the trajectories are spirals the centers of which correspond to a state of rest. The effect of viscosity is manifested as a decrease in the amplitude of oscillations over time, as well as by the fact that the trajectories of particles near the free surface and at burial are of different form. In the case of a standing wave the motion of each particle goes at intervals the length of which decreases with time. The direction of motion changes from the vertical at the antinodes to the horizontal at the nodes.

REFERENCES

1. Lamb G. *Gidrodinamika* (Hydrodynamics), Leningrad: Gostekhizdat, 1947, 928 p.
2. Sretenskii L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* (Theory of wave motions of fluid), Moscow: Nauka, 1977, 816 p.
3. Aleshkov Yu.Z. *Teoriya voln na poverkhnosti tyazheloi zhidkosti* (The theory of waves on the surface of a heavy liquid), Leningrad: Leningrad State University, 1981, 196 p.
4. Barinov V.A., Taktarov N.G. *Matematicheskoe modelirovanie magnitogidrodinamicheskikh poverkhnostnykh voln* (Mathematical modeling of MHD surface waves), Saransk: Mordovia State University, 1991, 96 p.
5. Levich V.G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* (Physico-chemical hydrodynamics), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 700 p.
6. Barinov V.A. Distribution of waves on free surface of viscous liquid, *Vestn. St-Peterbg. Univ., Ser. 10, Prikl. Mat. Inf. Prots. Upr.*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 18–31 (in Russian).

Received 04.06.2015

Basinskii Konstantin Yur'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Modelling, Tyumen State University, ul. Semakova, 10, Tyumen, 625003, Russia.
E-mail: kbasinsky@mail.ru