УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С ВАРЬИРУЕМЫМ ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ [1]

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое ограниченное множество, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — банаховы идеальные пространства измеримых на Π функций, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — выпуклое множество, $\mathcal{A}$ — некоторый класс линейных ограниченных операторов $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. Изучается управляемое функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна:

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f(.,x(.),u(.))\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{1}$$

где набор параметров $\{u, \theta, A\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{A}$ — управляющий; $f(t,x,v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\{x, v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и удовлетворяющая некоторым естественным предположениям. Уравнение (1) является удобной формой описания широкого класса управляемых распределенных систем. Для указанного уравнения доказывается теорема о достаточных условиях глобальной разрешимости для всех $u \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{A}$ и θ из поточечно ограниченного множества. Для исходного уравнения определяются мажорантное и минорантное неравенства, получаемые из уравнения (1) оценкой правой части соответственно сверху и снизу. Теорема доказывается при условии глобальной разрешимости мажорантного и минорантного неравенств. В качестве приложения полученных общих результатов доказывается теорема о тотальной (по всему множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости смешанной задачи для системы гиперболических уравнений первого порядка с управляемыми старшими коэффициентами.

Ключевые слова: тотально глобальная разрешимость, функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна, поточечная оценка решений, система гиперболических уравнений первого порядка с управляемыми старшими коэффициентами.

Введение

Как известно, в случае, когда порядки роста правых частей по фазовым переменным превышают линейный, начально-краевые задачи, связанные с уравнениями в частных производных, могут не иметь глобального решения, см., например, [1, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [2, введение, п. 7], [3], [4, введение, п. 2], [5, глава 9] (в [5] см. дальнейшую библиографию). Тем самым для нелинейных управляемых распределенных систем при обосновании применимости тех или иных численных методов оптимизации, получении необходимых условий оптимальности, условий существования равновесия в дифференциальных играх, связанных с такими системами, и т. д. возникает проблема сохранения глобальной разрешимости при варьировании управлений, или иначе говоря, проблема *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР). Для сосредоточенных управляемых систем теоремы о достаточных условиях УСГР известны как теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров [6, с. 11–16], [7, с. 195–201] (обширную библиографию по этому вопросу можно найти в [6]). Первоначально УСГР распределенных управляемых систем изучалась, как правило, при специальных возмущениях (вариациях) управлений, используемых, в частности, для получения тех или иных необходимых условий оптимальности в связанных с ними оптимизационных задачах. Подробнее об этом см. в [8].

[1]Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

В [9] была предложена схема получения достаточных условий УСГР для распределенных управляемых систем, основанная на приведении *начально-краевых задач* (НКЗ) к некоторому *вольтеррову функционально-операторному уравнению* (ВФОУ) в пространстве измеримых существенно ограниченных вектор-функций (то есть типа L_∞). В [9] эта схема применялась для исследования таких управляемых НКЗ, как задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, начальные задачи для той же системы с разнообразными запаздываниями, многомерная задача Гурса–Дарбу, обобщенная задача Гурса, смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа уравнения переноса (см. также [10, 11]) и др.

В модернизированном виде указанная схема была опубликована в работах [3, 4, 12–14] и др. (см. также [15]). Модернизация, в частности, позволила получать конструктивные условия сохранения глобальной разрешимости НКЗ при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений. Ее конкретные применения к разнообразным управляемым НКЗ см., например, в [3, 4, 13, 16]. При этом, как и раньше, использовалось сведение управляемой НКЗ к ВФОУ того или иного вида (в том числе операторному уравнению второго рода общего вида) в том или ином лебеговом пространстве вектор-функций. В [17–19] аналогичный подход был разработан для управляемых НКЗ, представимых операторным уравнением второго рода общего вида с варьируемым оператором и, в частности, уравнением типа Гаммерштейна, в произвольном банаховом пространстве. Преимущество подхода [3, 4, 9, 12–15, 17–19] состоит в том, что условия УСГР получаются сразу для всего класса управляемых НКЗ, представимых тем или иным абстрактным уравнением, в едином компактном виде. В качестве такого абстрактного уравнения довольно часто может выступать функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна (см. далее уравнение (0.1)). Начиная с работы [20], автор исследует вопрос о *тотально глобальной разрешимости*[2] (ТГР) для этого уравнения. «Тотально» здесь означает, что речь идет о глобальной разрешимости сразу для всех допустимых управлений (при условии разрешимости некоторого конечного набора заданных — не управляемых — уравнений или неравенств). Как было указано в [20] (см. также [21–26]), проблема ТГР (так же как и проблема УСГР) возникает в различных разделах теории оптимизации: в численных методах, в теории управляемости и теории дифференциальных игр, в частности, при исследовании множества достижимости, определении множества стратегий игроков и т. д. (там же см. дальнейшие пояснения и библиографию). Данная статья продолжает исследования по этой теме.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — *банаховы идеальные пространства*[3] (БИП) измеримых на Π функций, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — выпуклое множество, $\mathcal{A}$ — некоторый класс *линейных ограниченных операторов* (ЛОО) $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение типа Гаммерштейна[4]:

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f(.,x(.),u(.))\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{0.1}$$

где $u \in \mathcal{D}$, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $A \in \mathcal{A}$ — управляющие параметры; $f(t,x,v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\{x, v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такая, что:

$\mathbf{F}_1$) для всех $y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$ суперпозиция $f\big(.,y(.),u(.)\big) \in \mathcal{Z}^m$;

$\mathbf{F}_2$) для любых $u \in \mathcal{D}$ и $y_* \in \mathcal{X}_+$ существует константа $\mathcal{N}[y_*, u] > 0$ такая, что

$$\Big\| f\big(.,y(.),u(.)\big) - f\big(.,z(.),u(.)\big)\Big\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant \mathcal{N}[y_*, u]\, \|y - z\|_{\mathcal{X}^\ell}$$

для всех $y, z \in \mathcal{X}^\ell$, $|y|, |z| \leqslant y_*$.

---

[2] Ранее использовался более громоздкий термин «тотальное сохранение глобальной разрешимости».

[3] Напомним, что банахово пространство E измеримых функций называется банаховым идеальным пространством, если $\{y \in E, x$ — измеримая функция, $|x| \leqslant |y|\} \Longrightarrow \{x \in E, \|x\|_E \leqslant \|y\|_E\}$.

[4] См., например, [27, глава VI, п. 19.2].

Как было показано в [20–22, 28] (см. также пример в § 3), к уравнению (0.1) путем прямого действия *оператора обращения главной части* управляемой НКЗ может быть сведен довольно широкий класс таких задач. Это обстоятельство позволяет использовать данное уравнение как инструмент исследования различных вопросов теории управляемых распределенных систем, в частности глобальной разрешимости [20, 28], обоснования численных методов оптимизации [23–25], получения условий управляемости [21, 22], условий существования ситуации ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с уравнениями в частных производных [26], оценки приращения решения [29] и т. д. В статье [20] была поставлена проблема ТГР уравнения (0.1), а также доказан *мажорантный признак ТГР*. В работе [28] был доказан мажорантно-минорантный признак ТГР. Суть его состояла в том, что для исходного уравнения определялись мажорантное и минорантное уравнения, получаемые из исходного оценкой функциональной составляющей f правой части соответственно сверху и снизу, при сохранении операторной составляющей A; ТГР доказывалось при условии монотонности (точнее, изотонности) оператора A и глобальной разрешимости мажорантного и минорантного уравнений. В данной статье результаты [28] обобщаются на случай, когда ЛОО A также является управляющим параметром. При этом используются основные идеи доказательства теоремы о ТГР из [28]. В качестве приложения полученных абстрактных результатов доказывается теорема о тотальной (по всему множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости смешанной задачи для системы гиперболических уравнений первого порядка с управлениями в старших коэффициентах и правых частях. В следующем далее параграфе приводится точная формулировка основного результата, вкратце обозначенного выше. Его доказательство см. в § 2. Применение доказываемого результата иллюстрируется в § 3.

§ 1. Формулировка основного результата

Далее все векторные неравенства понимаются покомпонентно. Сформулируем признак ТГР для уравнения (0.1). Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию[5] χ_H множества $H \in \Sigma$. Следуя [30, 31], систему $\mathcal{B}(A) = \Big\{H \in \Sigma : \quad P_H A P_H = P_H A\Big\}$ будем называть *системой вольтерровых множеств* ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. При этом для числа $\delta > 0$ подсистему $\mathcal{T} = \Big\{\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\} \subset \mathcal{B}(A)$ будем, следуя [3, 14], называть *вольтерровой δ-цепочкой* ЛОО A, если $\Big\|P_h A P_h\Big\| < \delta$ для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$.

Будем предполагать, что каждый ЛОО A из класса $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим условиям:

$\mathbf{A}_1$) ЛОО A является изотонным в смысле $A[y] \leqslant A[z]$ $\forall y, z \in \mathcal{Z}^m$, $y \leqslant z$;

$\mathbf{A}_2$) ЛОО A обладает для любого числа $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой.

Замечание 1. Достаточные условия выполнения предположения $\mathbf{A}_2$ см. в [20, 30, 31].

Относительно функции f и множества $\mathcal{D}$ допустимых управлений предполагаем, что существуют оценочные функции $\varphi(.,.), \psi(.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ такие, что:

$\mathbf{F}_3$) $\varphi(t,x) \leqslant f\big(t, x, u(t)\big) \leqslant \psi(t,x)$ для п.в. $t \in \Pi$ и для всех $x \in \mathbb{R}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$;

$\mathbf{F}_4$) функции $\varphi(t,x)$ и $\psi(t,x)$ измеримы по $t \in \Pi$ и являются непрерывными по $x \in \mathbb{R}^\ell$;

$\mathbf{F}_5$) для всех $y \in \mathcal{X}^\ell$ суперпозиции $\varphi\big(., y(.)\big)$ и $\psi\big(., y(.)\big)$ принадлежат пространству $\mathcal{Z}^m$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть нашлись ЛОО $\overline{A}$, $\widehat{A} \in \mathcal{A}$ и элементы $\overline{x}$, $\widehat{x}$, $\overline{\theta}$, $\widehat{\theta} \in \mathcal{X}^\ell$ такие, что выполняются следующие условия:*

[5] Будем обозначать его одинаково независимо от того, в каком пространстве он действует.

$\mathbf{H}_1$) $\overline{x} \leqslant \overline{\theta} + \overline{A}\big[\varphi(.,\overline{x})\big]$, $\widehat{x} \geqslant \widehat{\theta} + \widehat{A}\big[\psi(.,\widehat{x})\big]$;

$\mathbf{H}_2$) $\overline{x} \leqslant \widehat{x}$, $\overline{\theta} \leqslant \widehat{\theta}$;

$\mathbf{H}_3$) $\overline{A}\big[\varphi(.,\overline{x})\big] \leqslant A\big[\varphi(.,\overline{x})\big]$, $A\big[\psi(.,\widehat{x})\big] \leqslant \widehat{A}\big[\psi(.,\widehat{x})\big]$ *для всех* $A \in \mathcal{A}$;

$\mathbf{H}_4$) *при п.в.* $t \in \Pi$ *функции* $\varphi(t,x)$ *и* $\psi(t,x)$ *являются неубывающими по* $\overline{x}(t) \leqslant x \leqslant \widehat{x}(t)$.

Тогда для всякого управляющего набора $\omega = \{u,\theta,A\}$, *в котором* $u \in \mathcal{D}$, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $\overline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \widehat{\theta}$, $A \in \mathcal{A}$, *существует решение* $x_\omega \in \mathcal{X}^\ell$ *уравнения* (0.1), *удовлетворяющее оценке* $\overline{x} \leqslant x_\omega \leqslant \widehat{x}$.

Доказательство теоремы 1 см. в § 2.

Замечание 2. Из анализа доказательства теоремы 2.2 из [20] следует, что при сделанных нами предположениях $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{A}_2$ уравнение (0.1) не может иметь более одного решения.

Замечание 3. Предположим, что при заданных $\overline{\theta}$, $\widehat{\theta}$, $\overline{A}$, $\widehat{A}$, φ, ψ вектор-функции $\overline{x}$, $\widehat{x}$ являются соответственно решениями следующих двух уравнений:

$$x = \overline{\theta} + \overline{A}\big[\varphi(.,x)\big], \quad x \in \mathcal{X}^\ell;$$
$$x = \widehat{\theta} + \widehat{A}\big[\psi(.,x)\big], \quad x \in \mathcal{X}^\ell.$$

Тогда очевидно, что условие $\mathbf{H}_1$ выполняется. Если, кроме того, выполняются условия $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$, то указанные два уравнения естественно называть *минорантным* и *мажорантным* для уравнения (0.1). Достаточные условия разрешимости уравнений такого вида можно найти в [28]. Как будет показано в § 3, при исследовании конкретного семейства управляемых НКЗ (получаемого перебором всех допустимых управляющих наборов) условия $\mathbf{H}_1$–$\mathbf{H}_4$ позволяют сконструировать две вспомогательных НКЗ, фиксированные для всего семейства. Они важны тем, что факт их разрешимости гарантирует разрешимость любой НКЗ из семейства. Одна из этих фиксированных задач выступает в роли минорантной, а другая — в роли мажорантной в смысле некоторых оценок снизу и сверху для входных параметров. При этом из условия $\mathbf{H}_3$ могут вытекать также и некоторые требования не только к входным параметрам минорантной и мажорантной задач, но также и к их решениям.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем произвольно управляющий набор $\omega = \{u,\theta,A\}$, в котором $u \in \mathcal{D}$, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $\overline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \widehat{\theta}$, $A \in \mathcal{A}$, а также функцию $y_* \in \mathcal{X}_+$ такую, что $|\overline{x}| + |\widehat{x}| \leqslant y_*$. Для краткости положим $\mathcal{N} = \mathcal{N}[y_*,u]$ (см. условие $\mathbf{F}_2$), $\mu_A(H) = \|P_H A P_H\|$ для $H \in \Sigma(\Pi)$ (см. условие $\mathbf{A}_2$),

$$F_\omega[y] = \theta + A\Big[f\Big(.,y(.),u(.)\Big)\Big], \quad y \in \mathcal{X}^\ell.$$

Дальнейшее доказательство проведем в несколько этапов.

1. Выберем число $\delta > 0$ из условия $2\delta\mathcal{N} \leqslant 1$. Согласно условию $\mathbf{A}_2$ ЛОО A обладает вольтерровой δ-цепочкой $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$. Для краткости примем следующие обозначения: $P_i = P_{H_i}$, $P_{(i,i-1)} = P_{H_i \setminus H_{i-1}}$, $i = \overline{1,k}$. Докажем, что уравнение

$$x = F_\omega[x], \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \qquad (\mathcal{E})$$

имеет решение $x = x_\omega \in \mathcal{X}^\ell$ и это решение удовлетворяет неравенству

$$\overline{x} \leqslant x_\omega \leqslant \widehat{x}. \qquad (2.1)$$

Сделаем это по индукции, рассматривая для $i = \overline{0,k}$ H_i-локальный аналог уравнения $(\mathcal{E})$:

$$P_i y = P_i F_\omega P_i[y], \quad y \in P_i\mathcal{X}^\ell. \qquad (\mathcal{E}_i)$$

2. На первом шаге индукции заметим, что множество $P_0\mathcal{X}^\ell$ состоит только из одного элемента $z_0 = 0$ и он же является решением уравнения $(\mathcal{E}_0)$, которое имеет вид тождества $0 = 0$. При этом очевидно, что

$$0 = P_0\overline{x} \leqslant P_0 z_0 \leqslant P_0\widehat{x} = 0.$$

3. Действуя по индукции, предположим, что уравнение $(\mathcal{E}_i)$ при $i = j$ имеет решение $y = z_j = P_j z_j \in P_j\mathcal{X}^\ell$, причем $P_j\overline{x} \leqslant P_j z_j \leqslant P_j\widehat{x}$. Докажем, что такое же утверждение имеет место и при $i = j+1$.

4. Рассмотрим прежде всего уравнение

$$y = P_{(j+1,j)}F_\omega\Big[P_j z_j + P_{(j+1,j)}y\Big], \quad y \in P_{(j+1,j)}\mathcal{X}^\ell. \qquad (\mathcal{E}'_{j+1})$$

Определим оператор $\mathcal{F}_{j+1} : P_{(j+1,j)}\mathcal{X}^\ell \to P_{(j+1,j)}\mathcal{X}^\ell$ с помощью формулы

$$\mathcal{F}_{j+1}[y] = P_{(j+1,j)}F_\omega\Big[P_j z_j + P_{(j+1,j)}y\Big], \quad y \in P_{(j+1,j)}\mathcal{X}^\ell,$$

а также множество Y всех $y \in P_{(j+1,j)}\mathcal{X}^\ell$, которые удовлетворяют неравенству

$$P_{(j+1,j)}\overline{x} \leqslant P_{(j+1,j)}y \leqslant P_{(j+1,j)}\widehat{x}.$$

Заметим, что множество $Y \neq \emptyset$, так как согласно условию $\mathbf{H}_2$ содержит по крайней мере элемент $P_{(j+1,j)}\overline{x}$. Кроме того, множество Y замкнуто и ограничено. Действительно, $|y| \leqslant |\overline{x}| + |\widehat{x}| \leqslant y_*$ и по идеальности БИП $\mathcal{X}$, $\|y\| \leqslant \|y_*\|$ для всех $y \in Y$. Аналогично $|z_j| \leqslant y_*$.

5. Выберем произвольно $y \in Y$ и покажем, что $\mathcal{F}_{j+1}[y] \in Y$. Согласно условиям $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{F}_3$–$\mathbf{F}_5$, $\mathbf{H}_4$, а также предположению индукции и определению множества Y и выбору параметра θ можем оценить

$$\mathcal{F}_{j+1}[y] \leqslant P_{(j+1,j)}\Big\{\theta + A\Big[\psi\big(.,P_j z_j + P_{(j+1,j)}y\big)\Big]\Big\} \leqslant P_{(j+1,j)}\Big\{\widehat{\theta} + A\Big[\psi\big(.,P_{j+1}\widehat{x}\big)\Big]\Big\}.$$

Пользуясь вольтерровостью $P_{j+1}A = P_{j+1}AP_{j+1}$, а также очевидным соотношением $P_{(j+1,j)} = P_{(j+1,j)}P_{j+1}$ и условием $\mathbf{H}_3$, получаем

$$\mathcal{F}_{j+1}[y] \leqslant P_{(j+1,j)}\Big\{\widehat{\theta} + A\Big[\psi\big(.,\widehat{x}\big)\Big]\Big\} \leqslant P_{(j+1,j)}\Big\{\widehat{\theta} + \widehat{A}\Big[\psi\big(.,\widehat{x}\big)\Big]\Big\},$$

то есть согласно условию $\mathbf{H}_1$ $\mathcal{F}_{j+1}[y] \leqslant P_{(j+1,j)}\widehat{x}$. Аналогично $\mathcal{F}_{j+1}[y] \geqslant P_{(j+1,j)}\overline{x}$. Стало быть, $\mathcal{F}_{j+1}[y] \in Y$.

6. Покажем, что оператор $\mathcal{F}_{j+1}$ является сжимающим на множестве Y. Выберем произвольно $y_1, y_2 \in Y$. По доказанному (см. п. 4) имеют место неравенства $|y_1|, |y_2|, |z_j| \leqslant y_*$. Используя эти неравенства, а также условия $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_2$, оценим норму $\Big\|\mathcal{F}_{j+1}[y_2] - \mathcal{F}_{j+1}[y_1]\Big\|$, т. е.

$$\Big\|P_{(j+1,j)}\Big(F_u[P_j z_j + P_{(j+1,j)}y_2] - F_u[P_j z_j + P_{(j+1,j)}y_1]\Big)\Big\| \leqslant \mu_A(H_{j+1} \setminus H_j)\,\cdot$$

$$\cdot\,\mathcal{N} \cdot \Big\|P_{(j+1,j)}(y_2 - y_1)\Big\| \leqslant \delta\mathcal{N} \cdot \Big\|y_2 - y_1\Big\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \Big\|y_2 - y_1\Big\|.$$

Здесь мы учитываем, что

$$P_{(j+1,j)}A = P_{(j+1,j)}P_{j+1}A = P_{(j+1,j)}P_{j+1}AP_{j+1} = P_{(j+1,j)}A\big(P_j + P_{(j+1,j)}\big).$$

7. Пользуясь далее принципом неподвижной точки Каччопполи–Банаха (см., например, [32, § XVI.1]), получаем, что решение уравнения $(\mathcal{E}'_{j+1})$ существует и единственно на множестве Y, обозначим его $z_{(j+1,j)}$. Положим $z_{j+1} = P_j z_j + P_{(j+1,j)}z_{(j+1,j)} \in P_{j+1}\mathcal{X}^\ell$. Рассмотрим

$$P_{j+1}F_\omega[z_{j+1}] = P_j F_\omega[z_{j+1}] + P_{(j+1,j)}F_\omega[z_{j+1}] =$$

$$= P_j F_\omega P_j z_{j+1} + \mathcal{F}_{j+1}[z_{(j+1,j)}] = P_j F_\omega P_j z_j + P_{(j+1,j)} z_{(j+1,j)} =$$
$$= P_j z_j + P_{(j+1,j)} z_{(j+1,j)} = z_{j+1} = P_{j+1} z_{j+1}.$$

Это означает, что $y = z_{j+1} \in P_{j+1}\mathcal{X}^\ell$ является решением уравнения $(\mathcal{E}_i)$ при $i = j+1$. При этом по предположению индукции и учитывая, что $z_{(j+1,j)} \in Y$, имеем

$$P_j\overline{x} \leqslant P_j z_j \leqslant P_j\widehat{x}, \quad P_{(j+1,j)}\overline{x} \leqslant P_{(j+1,j)} z_{(j+1,j)} \leqslant P_{(j+1,j)}\widehat{x}.$$

Складывая эти два неравенства, получаем $P_{j+1}\overline{x} \leqslant P_{j+1} z_{j+1} \leqslant P_{j+1}\widehat{x}$. Таким образом, все предположения индукции оказались выполненными и при $i = j+1$. Тогда по индукции они будут выполнены и при $i = k$, т. е. уравнение $(\mathcal{E}_k)$=$(\mathcal{E})$ имеет решение $x = x_\omega \equiv z_k \in \mathcal{X}^\ell$, причем

$$P_k\overline{x} \leqslant P_k z_k \leqslant P_k\widehat{x},$$

что равносильно неравенству (2.1). Теорема 1 доказана. □

§ 3. Пример: смешанная задача для системы гиперболических уравнений первого порядка

Отметим, что проблема ТГР родственна проблеме УСГР, которая, напомним, заключается в следующем: если глобальное решение управляемой системы существует для данного управления, то сохранится ли это свойство при варьировании указанного управления (в том или ином смысле)? Что касается достаточных условий УСГР при управлении старшими коэффициентами системы гиперболических уравнений первого порядка (в условиях задачи Коши), см. [18, 19, 33]. По вопросу их применения к доказательству принципа максимума в соответствующей задаче оптимального управления см. [18, 34].

Проблема ТГР при управлении лишь правыми частями системы гиперболических уравнений первого порядка (в условиях смешанной задачи) исследовалась в [28].

Пусть $\Pi = [0;T] \times [0;L] \subset \mathbb{R}^2$; $\mathcal{X} = \mathcal{Z} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_r(\Pi)$, $q, r \in [1;\infty]$, $\ell = m, s \in \mathbb{N}$; $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — выпуклое множество; $\mathcal{V}_i$ — некоторый отрезок в пространстве $\mathbb{R}$, $\mathcal{G}_i = \big\{v \in L_\infty[0;T] : v(\xi) \in \mathcal{V}_i,\ \xi \in [0;T]\big\}$, $i = \overline{1,m}$; $\mathcal{V} = \prod\limits_{i=1}^m \mathcal{V}_i$, $\mathcal{G} = \prod\limits_{i=1}^m \mathcal{G}_i$.

Рассмотрим на множестве $\Pi = [0;T] \times [0;L] \subset \mathbb{R}^2$ систему уравнений в инвариантах Римана:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \beta_i\big(t_2, v_i(t_1)\big)\frac{\partial x_i}{\partial t_2} = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.1}$$

где $u \in \mathcal{D}$, $v \in \mathcal{G}$ — управляющие функции.

Относительно вектор-функции $f(t,x,u)$ предполагаем, что она удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_5$. Кроме того, мы предполагаем, что функция $\beta_i(t_2, v) : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_i \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, дифференцируема по $t_2 \in \mathbb{R}$ и вместе с производной по t_2 непрерывна по совокупности переменных $(t_2, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}_i$.

Добавим начальные условия

$$x(0, t_2) = w(t_2), \quad t_2 \in [0;L], \tag{3.2}$$

предполагая вектор-функцию w непрерывной на $[0;L]$.

Прежде чем добавлять граничные условия, необходимо сделать некоторые дополнительные предположения относительно коэффициентов системы (3.1), обеспечивающие требование о том, чтобы через каждую точку $\overline{t} \in \Pi$ проходила ровно одна характеристика $h_i[\overline{t}]$ i-го уравнения системы (3.1).

А именно, будем предполагать, что найдется число $k \in \overline{0,m}$ и для каждого $i = \overline{1,m}$ существуют оценочные функции $\gamma_i(\tau)$, $\delta_i(\tau)$, непрерывные и неубывающие на $\mathbb{R}$, такие, что выполняются следующие условия:

$\mathbf{B}_1$) $\gamma_i(\tau) \leqslant \beta_i(\tau, v_i) \leqslant \delta_i(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, $v_i \in \mathcal{V}_i$;

$\mathbf{B}_2$) $\gamma_1 \leqslant \delta_1 < \ldots < \gamma_k \leqslant \delta_k < 0 < \gamma_{k+1} \leqslant \delta_{k+1} < \ldots < \gamma_m \leqslant \delta_m$ всюду на отрезке $[0;L]$;

$\mathbf{B}_3$) для каждой точки $t \in \Pi$ обе задачи Коши —

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\xi} = \delta_i(y), \quad \xi \in [0;T], \\ y(t_1) = t_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{d\xi} = \gamma_i(y), \quad \xi \in [0;T], \\ y(t_1) = t_2, \end{cases}$$

— имеют соответственно решения $y = \overline{\eta}_i(\xi;t)$ и $y = \widehat{\eta}_i(\xi;t)$ такие, что $\overline{\eta}_i(\xi;t) \leqslant \widehat{\eta}_i(\xi;t)$ для всех $\xi \in [0;t_1]$; $\overline{\eta}_i(\xi;t) \geqslant \widehat{\eta}_i(\xi;t)$ для всех $\xi \in [t_1;T]$.

В частности, из $\mathbf{B}_2$ будет следовать условие строгой гиперболичности для исходной системы:

$$\beta_1(\tau, \upsilon_1) < \ldots < \beta_k(\tau, \upsilon_k) < 0 < \beta_{k+1}(\tau, \upsilon_{k+1}) < \ldots < \beta_m(\tau, \upsilon_m)$$

для всех $\tau \in [0;L]$, $\upsilon \in \mathcal{V}$. Заметим, что характеристика $h_i[\overline{t}]$ i-го уравнения исходной системы определяется как интегральная кривая, соответствующая решению задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dt_2}{dt_1} = \beta_i\big(t_2, v_i(t_1)\big), \quad t_1 \in [0;T]; \quad t_2(\overline{t}_1) = \overline{t}_2. \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.3) будем обозначать $\eta_i[v_i](t_1;\overline{t})$. Основываясь на результатах [28], нетрудно показать, что условия $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_3$ обеспечивают для каждого $\overline{t} \in \Pi$ и для всех $v \in \mathcal{G}$ существование единственного решения $\eta_i[v_i](t_1;\overline{t})$ задачи (3.3), а также выполнение неравенства

$$\overline{\eta}_i(t_1;\overline{t}) \leqslant \eta_i[v_i](t_1;\overline{t}) \leqslant \widehat{\eta}_i(t_1;\overline{t})$$

для всех $i = \overline{1,m}$, $t_1 \in [0;\overline{t}_1]$, $v \in \mathcal{G}$. Иными словами, через каждую точку $\overline{t} \in \Pi$ проходит ровно одна характеристика $h_i[\overline{t}]$ i-го уравнения системы (3.1).

После этого, не нарушая корректности постановки смешанной задачи, мы вправе добавить граничные условия следующего вида:

$$\begin{cases} x_i(t_1,0) = \alpha_i(t_1), \quad t_1 \in [0;T], \quad \alpha_i(0) = w_i(0), \quad i = \overline{k+1,m}; \\ x_i(t_1,L) = \alpha_i(t_1), \quad t_1 \in [0;T], \quad \alpha_i(0) = w_i(L), \quad i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Будем считать вектор-функцию $\alpha(t_1)$ непрерывной на $[0;T]$. Отметим, что в силу непрерывности функции $\alpha(t_1)$ и $w(t_2)$ ограничены. Поэтому существуют постоянные векторы $\overline{\alpha}$, $\widehat{\alpha}$ такие, что

$$\overline{\alpha} \leqslant \alpha(t_1) \leqslant \widehat{\alpha} \quad \forall t_1 \in [0;T], \quad \overline{\alpha} \leqslant w(t_2) \leqslant \widehat{\alpha} \quad \forall t_2 \in [0;L].$$

Поставим минорантную и мажорантную задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial t_1} + \gamma_i(t_2)\,\dfrac{\partial x_i}{\partial t_2} = \varphi_i\big(t, x(t)\big), & t \in \Pi, & i = \overline{1,m}, \\ x(0,t_2) = \overline{\alpha}, & t_2 \in [0;L], & \\ x_i(t_1,0) = \overline{\alpha}_i, & t_1 \in [0;T], & i = \overline{k+1,m}, \\ x_i(t_1,L) = \overline{\alpha}_i, & t_1 \in [0;T], & i = \overline{1,k}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial t_1} + \delta_i(t_2)\,\dfrac{\partial x_i}{\partial t_2} = \psi_i\big(t, x(t)\big), & t \in \Pi, & i = \overline{1,m}, \\ x(0,t_2) = \widehat{\alpha}, & t_2 \in [0;L], & \\ x_i(t_1,0) = \widehat{\alpha}_i, & t_1 \in [0;T], & i = \overline{k+1,m}, \\ x_i(t_1,L) = \widehat{\alpha}_i, & t_1 \in [0;T], & i = \overline{1,k}. \end{cases}$$

Чтобы определить решение задачи (3.1), (3.2), (3.4), для произвольного $z \in L_q^m(\Pi)$ рассмотрим вспомогательную систему[6]

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \beta_i\big(t_2, v_i(t_1)\big)\,\frac{\partial x_i}{\partial t_2} = z_i(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.5}$$

[6]Здесь и далее считаем, что всякая функция $z \in L_q^m(\Pi)$ продолжается нулем с множества Π на все пространство $\mathbb{R}^2$. Это необременительное соглашение позволяет существенно упростить систему обозначений при последующем определении оператора A. Тем не менее для наглядности (там, где точка, соответствующая аргументам функции, может выходить из множества Π) будем писать $\chi_\Pi z$, где χ_Π — характеристическая функция множества Π.

Если бы входные данные задачи (3.5), (3.2), (3.4) были гладкими, то она имела бы классическое решение, которое нетрудно найти, рассматривая левую часть i-го уравнения системы (3.5) как полную производную по t_1 вдоль i-й характеристики:

$$x_i\big(t_1;\eta_i(t_1;\overline{t})\big)=\theta_i(\overline{t})+\int_0^{t_1}(\chi_\Pi z_i)\big(\xi;\eta_i(\xi;\overline{t})\big)\,d\xi,$$

$t_1\in[0;T]$, $\overline{t}\in\Pi$, $i=\overline{1,m}$, где $\eta_i(t_1;\overline{t})=\eta_i[v_i](t_1;\overline{t})$,

$$\theta_i(\overline{t})=\begin{cases} w_i\big(\eta_i(0;\overline{t})\big) & \text{при } \eta_i(0;\overline{t})\in[0;L];\ \text{иначе}\\ \alpha_i\big(\xi_i(0;\overline{t})\big) & \text{при } \eta_i(0;\overline{t})<0,\\ \alpha_i\big(\xi_i(L;\overline{t})\big) & \text{при } \eta_i(0;\overline{t})>L.\end{cases}$$

Здесь $\xi_i(\eta;\overline{t})$ — функция, обратная по отношению к $\eta_i(\xi;\overline{t})$. Или, полагая $\overline{t}=t$,

$$x_i(t)=\theta_i(t)+A_i[z](t),\quad A_i[z](t)=\int_0^{t_1}(\chi_\Pi z_i)\big(\xi;\eta_i[v_i](\xi;t)\big)\,d\xi, \tag{3.6}$$

$t\in\Pi$, $i=\overline{1,m}$.

В [28] показано, что отображение $A[z]=\Big(A_1[z],\ldots,A_m[z]\Big)$ можно рассматривать как ЛОО $L_q^m(\Pi)\to L_q^m(\Pi)$. В соответствии с этим, *обобщенным решением задачи* (3.5), (3.2), (3.4) при $z\in L_q^m(\Pi)$ будем называть функцию $x\in L_q^m(\Pi)$, определяемую формулой (3.6).

Опираясь теперь на предположения $\mathbf{F}_1$–$\mathbf{F}_5$ (здесь достаточно только $\mathbf{F}_1$), принятые нами относительно правой части (3.1), под *обобщенным решением задачи* (3.1), (3.2), (3.4) будем понимать функцию $x\in L_q^m(\Pi)$, являющуюся решением следующей системы интегральных уравнений:

$$x_i(t)=\theta_i(t)+A_i\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad i=\overline{1,m};\quad x\in L_q^m(\Pi),$$

или, иначе говоря, решением функционально-операторного уравнения:

$$x(t)=\theta(t)+A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t),\quad t\in\Pi;\quad x\in L_q^m(\Pi), \tag{3.7}$$

которое имеет вид (0.1).

Минорантная задача переписывается в виде системы интегральных уравнений:

$$x_i(t)=\overline{\alpha}_i+\overline{A}_i\Big[\varphi\big(.,x(.)\big)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad i=\overline{1,m};\quad x\in L_q^m(\Pi),$$

где

$$\overline{A}_i[z](t)=\int_0^{t_1}(\chi_\Pi z_i)\big(\xi;\overline{\eta}_i(\xi;t)\big)\,d\xi,\quad t\in\Pi,\quad z\in L_q^m(\Pi),\quad i=\overline{1,m}.$$

Для мажорантной задачи получаем аналогичное представление:

$$x_i(t)=\widehat{\alpha}_i+\widehat{A}_i\Big[\psi\big(.,x(.)\big)\Big](t),\quad t\in\Pi,\quad i=\overline{1,m};\quad x\in L_q^m(\Pi),$$

где

$$\widehat{A}_i[z](t)=\int_0^{t_1}(\chi_\Pi z_i)\big(\xi;\widehat{\eta}_i(\xi;t)\big)\,d\xi,\quad t\in\Pi,\quad z\in L_q^m(\Pi),\quad i=\overline{1,m}.$$

Далее (исключительно для наглядности) рассмотрим случай $k=0$, $\varphi\equiv0$ (то есть функции f и ψ неотрицательны). В общем случае изложение будет намного более громоздким в смысле используемых обозначений, формулируемых предположений и объема выкладок. За счет того, что $k=0$, выполняются неравенства

$$\overline{\eta}_i(\xi;t)\leqslant\eta_i[v_i](\xi;t)\leqslant\widehat{\eta}_i(\xi;t)\leqslant t_2\leqslant L\quad\forall\xi\in[0;t_1],\quad t\in\Pi,\quad v\in\mathcal{G},$$

$i = \overline{1,m}$. С другой стороны, на полуполосе $\{t \in \mathbb{R}^2 : \ t_1 \in [0;T], \ t_2 \leqslant L\}$ характеристическая функция $\chi_\Pi(t)$ не убывает по переменной t_2. Таким образом, предполагая, что функция $\psi(t_1,t_2,\xi)$ не убывает по каждой из переменных $t_2 \leqslant L$ $(t \in \Pi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \geqslant \overline{\alpha}$, и что решение мажорантной задачи $\widehat{x}(t_1,t_2)$ тоже не убывает по переменной $t_2 \leqslant L$ $(t \in \Pi)$, получаем, что на множестве Π выполняются неравенства

$$\widehat{x}\bigl(\xi, \eta_i[v_i](\xi;t)\bigr) \leqslant \widehat{x}\bigl(\xi, \widehat{\eta}_i(\xi;t)\bigr),$$

$$\psi\bigl(\tau, \widehat{x}(\tau)\bigr)\Big|_{\tau_1=\xi, \tau_2=\eta_i[v_i](\xi;t)} \leqslant \psi\bigl(\tau, \widehat{x}(\tau)\bigr)\Big|_{\tau_1=\xi, \tau_2=\widehat{\eta}_i(\xi;t)},$$

$$\chi_\Pi(\tau)\psi\bigl(\tau, \widehat{x}(\tau)\bigr)\Big|_{\tau_1=\xi, \tau_2=\eta_i[v_i](\xi;t)} \leqslant \chi_\Pi(\tau)\psi\bigl(\tau, \widehat{x}(\tau)\bigr)\Big|_{\tau_1=\xi, \tau_2=\widehat{\eta}_i(\xi;t)},$$

а тем самым

$$A_i\bigl[\psi(.,\widehat{x})\bigr] \leqslant \widehat{A}_i\bigl[\psi(.,\widehat{x})\bigr], \quad i = \overline{1,m}.$$

Что касается минорантной задачи, то при $\varphi = 0$ она имеет очевидное решение $\overline{x} \equiv \overline{\alpha}$. Таким образом, условия $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_4$ оказываются выполненными. Условия $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ при сделанных предположениях (при $\overline{\theta} = \overline{\alpha}$, $\widehat{\theta} = \widehat{\alpha}$) выполняются очевидным образом. Выполнение условия $\mathbf{A}_2$ доказывается совершенно аналогично тому, как это было сделано в [28]. Применяя теорему 1, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены все сделанные выше предположения и, кроме того, следующие условия.*

1. *Функция $\psi(t_1,t_2,\xi) : [0;T] \times [0;L] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ не убывает по каждой из переменных $t_2 \in [0;L]$, $\xi \geqslant \overline{\alpha}$.*
2. *Мажорантная задача имеет решение $\widehat{x}(t_1,t_2) \geqslant \overline{\alpha}$, и это решение не убывает по переменной t_2.*

Тогда для любого управляющего набора $\omega = \{u,v\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{G}$ задача (3.1), (3.2), (3.4) *имеет единственное решение $x_\omega(t)$. И более того, справедливо неравенство $\overline{\alpha} \leqslant x_\omega \leqslant \widehat{x}$.*

Очевидно, что главная трудность при использовании теоремы 2 заключается в построении мажорантной задачи, удовлетворяющей условию 2 этой теоремы. Все остальные предположения обеспечиваются достаточно просто. Для того чтобы указать какие-то общие рекомендации, позволяющие гарантировать выполнение указанного условия, требуются дальнейшие (и довольно непростые) исследования. С другой стороны, нетрудно указать примеры, когда все условия и предположения выполняются. Далее приведем два таких примера — по одному для скалярного $(m = 1)$ и векторного $(m > 1)$ случаев.

Пример 1. Рассмотрим задачу (3.1), (3.2), (3.4) при $L = T = 1$, $q = r = \infty$, $m = 1$ (соответственно, индекс i будем опускать) и функциях $f(t,x,u)$ и $\beta(\tau,v)$, удовлетворяющих оценкам

$$0 \leqslant f\bigl(t,x,u(t)\bigr) \leqslant (\delta t_1 + t_2)\, x^2 \equiv \psi(t_1,t_2,x) \quad \text{п.в.}\, t \in \Pi, \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \ u \in \mathcal{D},$$

$$1 \leqslant \beta(\tau,v) \leqslant \delta \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \ v \in \mathcal{V},$$

где $\delta > 1$ — заданное число. В частности, можно взять, например,

$$\mathcal{D} = \mathcal{V} = [0;\pi/2], \quad f(t,x,u) = (t_1+t_2)\, x^2 \cos u, \quad \beta(\tau,v) = 1 + \frac{2\sin v}{1+\tau^2}, \quad \delta = 3.$$

Относительно функций $\alpha(t_1)$ и $w(t_2)$ будем считать, что они непрерывны и удовлетворяют оценкам

$$0 \leqslant \alpha(t_1) \leqslant \frac{1}{2}, \quad t_1 \in [0;T]; \quad 0 \leqslant w(t_2) \leqslant \frac{1}{2}, \quad t_2 \in [0;L].$$

Считая $\overline{\alpha} = 0$, $\varphi \equiv 0$, получаем, что решение минорантной задачи $\overline{x} \equiv 0$. Мажорантная задача имеет вид

$$\begin{cases} x'_{t_1} + \delta\, x'_{t_2} = (\delta t_1 + t_2)\, x^2; \\ x(0, t_2) = 1/2, \quad t_2 \in [0;1]; \\ x(t_1, 0) = 1/2, \quad t_1 \in [0;1]. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что ее решением является функция

$$\widehat{x}(t_1, t_2) = \frac{1}{2 - t_1 t_2}.$$

Отсюда ясно, что все наши предположения и условия теоремы 2 выполняются.

Пример 2. Рассмотрим задачу (3.1), (3.2), (3.4) при $L = T = 1$, $q = r = \infty$, $m = 2$ и вектор-функциях $f(t, x, u)$ и $\beta(\tau, v)$, удовлетворяющих оценкам

$$0 \leqslant f_1\bigl(t, x, u(t)\bigr) \leqslant (\delta t_1 + t_2)\, \frac{|x_2|}{1 + |x_2|} \equiv \psi_1(t_1, t_2, x);$$

$$0 \leqslant f_2\bigl(t, x, u(t)\bigr) \leqslant (2\delta t_1 + t_2)\, (e^{|x_1|} - 1) \equiv \psi_2(t_1, t_2, x) \quad \text{п.в.}\, t \in \Pi,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathcal{D};$$

$$1 \leqslant \beta_1(\tau, v) \leqslant \delta; \quad 2 \leqslant \beta_2(\tau, v) \leqslant 2\delta \quad \forall \tau \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{V},$$

где $\delta > 1$ — заданное число. В частности, можно взять, например,

$$\mathcal{D} = \mathcal{V} = [0; \pi/2] \times [0; \pi/2];$$

$$f_1(t, x, u) = (\delta t_1 + t_2)\, \frac{|x_2|}{1 + |x_2|}\, \cos u_1; \quad f_2(t, x, u) = (2\delta t_1 + t_2)\, (e^{|x_1|} - 1)\, \sin u_2;$$

$$\beta_1(\tau, v) = 1 + \frac{2 \cos v_1}{1 + \tau^2}; \quad \beta_2(\tau, v) = 2 + \frac{2 \sin v_1}{1 + \tau^2}; \quad \delta = 4.$$

Относительно вектор-функций $\alpha(t_1)$ и $w(t_2)$ будем считать, что они непрерывны и удовлетворяют оценкам

$$0 \leqslant \alpha_1(t_1) \leqslant \ln 2,\ 0 \leqslant \alpha_2(t_1) \leqslant 1, \quad t_1 \in [0; T]; \quad 0 \leqslant w_1(t_2) \leqslant \ln 2,\ 0 \leqslant w_2(t_2) \leqslant 1, \quad t_2 \in [0; L].$$

Считая $\overline{\alpha} = 0$, $\varphi \equiv 0$, получаем, что решение минорантной задачи $\overline{x} \equiv 0$. Мажорантная задача имеет вид

$$\begin{cases} (x_1)'_{t_1} + \delta\, (x_1)'_{t_2} = (\delta t_1 + t_2)\, \dfrac{|x_2|}{1 + |x_2|}; \\ (x_2)'_{t_1} + 2\delta\, (x_2)'_{t_2} = (2\delta t_1 + t_2)\, (e^{|x_1|} - 1); \\ x(0, t_2) = (\ln 2, 1), \quad t_2 \in [0; 1]; \\ x(t_1, 0) = (\ln 2, 1), \quad t_1 \in [0; 1]. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что ее решением является вектор-функция

$$\widehat{x}(t_1, t_2) = \bigl(\ln\{1 + e^{t_1 t_2}\}, e^{t_1 t_2}\bigr).$$

Отсюда ясно, что все наши предположения и условия теоремы 2 выполняются.

Замечание 4. На самом деле, как видно из доказательства теоремы 1, все условия относительно вектор-функции $f(t, x, u)$ можно считать выполненными лишь при

$$\overline{x}(t) \leqslant x \leqslant \widehat{x}(t),$$

а не обязательно при всех $x \in \mathbb{R}^{\ell}$. Это обстоятельство существенно расширяет область применения полученных результатов. В качестве иллюстрации (с учетом того, что здесь $\overline{x} \equiv 0$) можно рассмотреть аналог примера 2, в котором модули в выражениях ψ_1 и ψ_2 отсутствуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калантаров В.К., Ладыженская О.А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
2. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Сумин В.И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
4. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
5. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М.: Научный мир, 2008. 400 с.
6. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
8. Сумин В.И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107.
9. Сумин В.И. Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. … канд. физ.-матем. наук / ГГУ. Горький, 1975. 158 с.
10. Морозов С.Ф., Сумин В.И. Оптимизация нелинейных процессов переноса // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 4. С. 794–798.
11. Морозов С.Ф., Сумин В.И. Оптимизация нелинейных систем теории переноса // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 1. С. 99–111.
12. Сумин В.И. Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
13. Сумин В.И. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2097–2109.
14. Сумин В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.
15. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами. дис. … докт. физ.-матем. наук / ННГУ. Нижний Новгород, 1998. 346 с.
16. Сумин В.И., Чернов А.В. Условия устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Коши для гиперболического уравнения // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. С. 94–103.
17. Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений / ННГУ. Нижний Новгород, 2000. 75 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.2000, № 1198-В00.
18. Чернов А.В. Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. … канд. физ.-матем. наук / ННГУ. Нижний Новгород, 2000. 177 с.
19. Сумин В.И., Чернов А.В. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39–49.
20. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
21. Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
22. Чернов А.В. Об управляемости нелинейных распределенных систем на множестве конечномерных аппроксимаций управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 83–98.
23. Чернов А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
24. Чернов А.В. О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043.
25. Чернов А.В. О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу на варьируемой области // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305–321.

26. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
27. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
28. Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
29. Чернов А.В. Об одном обобщении леммы Бихари на случай вольтерровых операторов в лебеговых пространствах // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 5. С. 757–769.
30. Сумин В.И., Чернов А.В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
31. Сумин В.И., Чернов А.В. О некоторых признаках квазинильпотентности функциональных операторов // Известия вузов. Математика. 2000. № 2. С. 77–80.
32. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
33. Чернов А.В. Об устойчивости существования глобальных решений при управлении старшими коэффициентами системы гиперболических уравнений первого порядка // Труды XXIII конф. молодых ученых. МГУ. М., 2001. С. 352–355.
34. Чернов А.В. О необходимых условиях оптимальности в задаче управления старшими коэффициентами системы гиперболических уравнений первого порядка // Матем. моделирование и краевые задачи: Труды второй Всероссийской науч. конф. Часть 2. СамГТУ. Самара, 2005. С. 259–262.

Поступила в редакцию 29.03.2015

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23; Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
E-mail: chavnn@mail.ru

A. V. Chernov

On the totally global solvability of a controlled Hammerstein type equation with a varied linear operator

Keywords: totally global solvability, functional operator equation of the Hammerstein type, pointwise estimate of solutions, system of hyperbolic equations of the first order with controlled higher coefficients.

MSC: 47J05, 47J35, 47N10

Let $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ be given numbers, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ be a measurable bounded set, $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ be Banach ideal spaces of functions measurable on the set Π, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ be a convex set, $\mathcal{A}$ be some class of linear bounded operators $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$. We study the controlled Hammerstein type functional operator equation as follows

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f(., x(.), u(.))\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{1}$$

where $\{u, \theta, A\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{A}$ is the set of controlled parameters; $f(t, x, v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ is a given function measurable with respect to $t \in \Pi$, continuous with respect to $\{x, v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ and satisfying to certain natural hypotheses. Eq. (1) is a convenient form of representation of the broad class of controlled distributed systems. For the equation under study we prove a theorem concerning sufficient conditions of global solvability for all $u \in \mathcal{D}$, $A \in \mathcal{A}$ and θ from a pointwise bounded set. For the original equation we define some majorant and minorant inequalities obtaining them from Eq. (1) with the help of upper and lower estimates of the right-hand side. The theorem is proved providing global solvability of the majorant and minorant inequalities. As an application of obtained general results we prove a theorem concerning the total (with respect to the whole set of admissible controls) global solvability of the mixed boundary value problem for a system of hyperbolic equations of the first order with controlled higher coefficients.

REFERENCES

1. Kalantarov V.K., Ladyzhenskaya O.A. On the appearance of collapses for quasilinear equations of the parabolic and hyperbolic types, *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 1977, vol. 69, pp. 77–102 (in Russian).
2. Lions J.-L. *Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami* (Control of singular distributed systems), Moscow: Nauka, 1987, 368 p.
3. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15.
4. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod State University, 1992, 110 p.
5. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O. *Nelineinyi funktsional'nyi analiz i ego prilozheniya k uravneniyam v chastnykh proizvodnykh* (Nonlinear functional analysis and its applications to partial differential equations), Moscow: Nauchnyi mir, 2008, 400 p.
6. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous right-hand side), Moscow: Nauka, 1985, 224 p.
7. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie* (Optimal control), Moscow: Nauka, 1979, 432 p.
8. Sumin V.I. Stability problem for the existence of global solutions to boundary value control problems and Volterra functional equations, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo, Mat.*, 2003, no. 1, pp. 91–107 (in Russian).
9. Sumin V.I. Optimization of controlled generalized Volterra systems, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Gorkii, 1975, 158 p (in Russian).
10. Morozov S.F., Sumin V.I. Optimization of nonlinear transport processes, *Sov. Math., Dokl.*, 1979, vol. 20, pp. 802–806.
11. Morozov S.F., Sumin V.I. Optimization of the non-linear systems of transport theory, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 101–114.
12. Sumin V.I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems, *Sov. Math., Dokl.*, 1989, vol. 39, no. 2, pp. 374–378.
13. Sumin V.I. Sufficient conditions for stable existence of solutions to global problems in control theory, *Differ. Equations*, 1990, vol. 26, no. 12, pp. 1579–1590.
14. Sumin V.I. Controlled functional Volterra equations in Lebesgue spaces, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1998, no. 2 (19), pp. 138–151 (in Russian).
15. Sumin V.I. Functional Volterra equations in the mathematical theory of optimal control of distributed systems, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Nizhni Novgorod, 1998, 346 p (in Russian).
16. Sumin V.I., Chernov A.V. Conditions for existence stability of global solutions to controlled Cauchy problem for a hyperbolic equation, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1997, pp. 94–103 (in Russian).
17. Sumin V.I., Chernov A.V. Volterra operator equations in Banach spaces: existence stability of global solutions, Nizhni Novgorod State University, Nizhni Novgorod, 2000, 75 p. Deposited in VINITI 25.04.2000, no. 1198-V00 (in Russian).
18. Chernov A.V. Volterra operator equations and their application in the theory of optimization of hyperbolic systems, *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Nizhni Novgorod, 2000, 177 p (in Russian).
19. Sumin V.I., Chernov A.V. On sufficient conditions of existence stability of global solutions of Volterra operator equations, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo. Mat. Model. Optim. Upr.*, 2003, no. 1 (26), pp. 39–49 (in Russian).
20. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. DOI: 10.3103/S1066369X11030108
21. Chernov A.V. Sufficient conditions for the controllability of nonlinear distributed systems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 8, pp. 1115–1127. DOI: 10.1134/S0965542512050053
22. Chernov A.V. On controllability of nonlinear distributed systems on a set of discretized controls, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 83–98 (in Russian).
23. Chernov A.V. On the convergence of the conditional gradient method in distributed optimization problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1510–1523. DOI: 10.1134/S0965542511090077
24. Chernov A.V. Smooth finite-dimensional approximations of distributed optimization problems via control discretization, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 12, pp. 1839–1852. DOI: 10.1134/S096554251312004X

25. Chernov A.V. On the smoothness of an approximated optimization problem for a Goursat–Darboux system on a varied domain, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 305–321 (in Russian).
26. Chernov A.V. On Volterra functional operator games on a given set, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 4, pp. 787–803. DOI: 10.1134/S0005117914040195
27. Vainberg M.M. *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, New York–Toronto: John Wiley & Sons, 1973; Jerusalem–London: Israel Program for Scientific Translations, 1973, xi+356 p. Original Russian text published in Vainberg M.M. *Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineinykh uravnenii*, Moscow: Nauka, 1972, 416 p.
28. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65. DOI: 10.3103/S1066369X12030085
29. Chernov A.V. A generalization of Bihari's lemma to the case of Volterra operators in Lebesgue spaces, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 5, pp. 703–714. DOI: 10.1134/S0001434613110114
30. Sumin V.I., Chernov A.V. Operators in spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency, *Differ. Equations*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403–1411.
31. Sumin V.I., Chernov A.V. On some indicators of the quasi-nilpotency of functional operators, *Russian Mathematics*, 2000, vol. 44, no. 2, pp. 75–78.
32. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1984, 752 p (in Russian).
33. Chernov A.V. On the existence stability of global solutions to a system of hyperbolic equations of the first order under the higher coefficients control, *Trudy XXIII konferentsii molodykh uchenykh* (Proceedings of XXIII conference of young scientists), Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2001, pp. 352–355 (in Russian).
34. Chernov A.V. On necessary optimality conditions in the problem of higher coefficients control in a system of hyperbolic equations of the first order, *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy II Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii* (Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the Second All-Russian scientific conference), Part 2, Samara State Technical University, Samara, 2005, pp. 259–262 (in Russian).

Received 29.03.2015

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia; Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru