МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 2

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИТЯЖЕНИЯ В АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧАХ О ДОСТИЖИМОСТИ [1]

Рассматривается абстрактная задача о достижимости при ограничениях асимптотического характера, решение в которой отождествляется с множеством притяжения в классе ультрафильтров пространства обычных решений. Исследуется нарост упомянутого множества по отношению к замыканию множества результатов, доставляемых точными решениями (данное понятие на идейном уровне соответствует схеме Дж. Варги, хотя и применяется в случае ограничений более общего характера). Для представления упомянутого (основного) множества притяжения привлекается соответствующий аналог последнего, реализуемый в пространстве обобщенных элементов. Для получаемого таким образом вспомогательного множества притяжения анализируется нарост и исследуется его связь с наростом основного множества притяжения. Получены условия отождествимости наростов основного и вспомогательного множеств притяжения. Общие положения детализируются для случая, когда обобщенные элементы определяются в виде ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств, где за реализацию наростов оказываются ответственными свободные ультрафильтры. Показано, что при наличии нароста множество допустимых обобщенных элементов не совпадает с замыканием какого-либо множества обычных решений (не допускает стандартной реализации).

Ключевые слова: нарост, множество притяжения, ультрафильтр.

Введение

В статье используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр, ЭП — элемент притяжения.

Настоящая работа продолжает [1]; основные понятия и обозначения [1] используются ниже; в частности, отметим содержательное обсуждение постановки абстрактной задачи о достижимости с ОАХ во введении [1]. Используем ниже отмеченные там представления аналогов ОД без дополнительных пояснений (более подробно см. в [1, с. 90–92]).

Сейчас зафиксируем непустое множество E, ТП $(H,\mathbf{t})$, отображение $\mathbf{h}:\ E \longrightarrow H$ и непустое семейство $\mathcal{E}$ п/м E. Рассматривая $\mathcal{E}$ как ОАХ (см. [1, с. 90–92]), можно [2, § 3] ввести МП в $(H,\mathbf{t})$, реализуемое на значениях $\mathbf{h}$; данное МП сейчас обозначим через AS. Для построения AS часто используется прием, называемый расширением: мы пытаемся построить компактное ТП (K,τ), $K \neq \varnothing$, и пару (m,g) отображений

$$m:\ E \longrightarrow K,\quad g:\ K \longrightarrow H,$$

для которых $\mathbf{h} = g \circ m$ (композиция m и g), а g непрерывно в смысле (K,τ) и $(H,\mathbf{t})$. Ограничиваясь сейчас случаем хаусдорфова ТП $(H,\mathbf{t})$, имеем [2] равенство

$$\mathrm{AS} = g^1(\mathrm{as}), \tag{0.1}$$

где as есть МП в (K,τ), реализуемое на значениях m, а $g^1(\cdot)$ — операция взятия образа при действии g. С учетом (0.1) можно считать, что задача построения AS сводится к аналогичному построению as (последнее, как правило, упрощается в условиях, когда множество-образ $m^1(E)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 13–01–00304, 15–01–07909) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты № № 12–П–1–1012, 12–П–1–1019).

всюду плотно в (K,τ)). Рассматривая точки K как ОЭ, можно (см. [1, 2]) интерпретировать (вспомогательное) МП as как множество допустимых ОЭ. Случай, когда as $= \overline{m^1(E_0)}$ (черта сверху обозначает замыкание), где E_0 — пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$, имеет место не всегда. В [1, с. 91] указан весьма общий вариант задачи, для которого E_0 является множеством всех точных (в смысле соблюдения ограничений) решений; здесь полезна аналогия с соответствующим понятием [3, гл. III]. Однако, как уже отмечалось, нередко as $\neq \overline{m^1(E_0)}$, имеем только вложение $\overline{m^1(E_0)} \subset$ as. Структура «оставшейся» части МП as зависит, конечно, от конкретного выбора «компактификатора» (K,τ,m,g). Мы ставим своей целью изучение данного вопроса для достаточно совершенных вариантов упомянутого «компактификатора». В частности, здесь представляется интересным вопрос о справедливости равенства as $= \overline{m^1(E^0)}$ для какого-либо множества E^0, $E^0 \subset E$, уже не обязательно совпадающего с E_0. Данный вариант реализации as можно рассматривать в качестве стандартного: мы ограничиваемся рассмотрением обычных решений из E^0 и их (обобщенных, вообще говоря) пределов, закладывая при этом в качестве базовой идею точного соблюдения условия $x \in E^0$ (пусть даже и не для того п/м E) как наиболее простую в логическом отношении.

Однако упомянутый стандартный вариант реализуется далеко не всегда: возможна ситуация, когда as не реализуется в виде $\overline{m^1(E^0)}$ ни при каком выборе множества E^0, $E^0 \subset E$. В этих случаях возникают наросты, отвечающие ситуации as $\neq \overline{m^1(E_0)}$. Изучению таких случаев посвящена настоящая работа.

Отметим, что схема, подобная в идейном отношении (0.1), широко использовалась в задачах оптимизации и, в частности, в теории оптимального управления (см. [3, гл. III, IV]). Роль элементов as играли при этом обобщенные управления-меры (см. наряду с [3] монографию [4]; имеется большое число и других публикаций, касающихся вопросов расширения задач оптимального управления). Отметим, что в задачах теории дифференциальных игр аппарат обобщенных управлений-мер широко использовался в работах Н. Н. Красовского и его учеников (см. [5–7]). При этом в конструкциях, применяемых школой Н. Н. Красовского, элементы расширений использовались и в оптимизационных задачах, и в задачах, где возникали элементы, связанные в идейном отношении с расширениями при соблюдении ограничений различных типов. Это касается, в частности, фундаментального понятия стабильности мостов Н. Н. Красовского, где предусматривалась обобщенная реакция на обычное и, более того, постоянное управление игрока-противника.

Конструкция расширения, изучаемая в настоящей работе, заметно отличается от построений [3–7] и использует средства, более близкие применяемым в общей топологии. В частности, в качестве ОЭ используются у/ф широко понимаемых ИП, что в наиболее естественном случае соответствует пространству Стоуна (отметим в связи с общими вопросами изучения таких пространств работы [8,9]). Представляется полезным выяснение возможностей в части применения методов, связанных с расширениями, рассматриваемыми в общей топологии, для исследования (на качественном уровне) вопросов, изначально связанных с проблемой приближенного соблюдения ограничений; данная проблема имеет важное практическое значение (отметим исследование [10] в связи с применением «топологических» расширений в функциональном анализе и теории меры).

§ 1. Сводка обозначений и основных понятий

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Как обычно, $\exists\,!$ заменяет фразу «существует и единственно», а def — фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Для произвольного объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X, а через $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$;

$$\mathbf{C}_X[\mathcal{X}] \triangleq \{X \setminus S:\ S \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))\ \ \forall\, \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)).$$

Через B^A обозначаем, следуя [11, с. 77], множество всех отображений из множества A в множество B (если $s \in B^A$ и $a \in A$, то, как обычно, $s(a) \in B$ есть значение функции s в точке a). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x):\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B),\ f^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$. Тем самым определен образ множества C (при действии f). Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества, $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то

$$f^1[\mathcal{A}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(A):\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B})).$$

Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то полагаем, что

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{X}) \overset{\triangle}{=} \left\{ \bigcap_{X \in \mathcal{K}} X:\ \mathcal{K} \in \operatorname{Fin}(\mathfrak{X}) \right\},$$

получая семейство (всех) конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$, разумеется, $\mathfrak{X} \subset \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{X})$.

Специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего параграфа непустое множество I и рассматриваем семейство $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(I)$; среди последних выделяем π-системы (см. [12, с. 14]). Тогда

$$\pi[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\ \&\ (\ I \in \mathcal{I})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$

есть семейство всех π-систем п/м I с «нулем» и «единицей». При этом

$$(\mathrm{alg})[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A}\ \ \forall A \in \mathcal{A}\},\ \ (\mathrm{top})[I] \overset{\triangle}{=} \left\{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\right\}$$

(алгебры п/м I и топологии на I суть π-системы из семейства (1.1)). Используя расширительное толкование, называем $(I, \mathcal{I})$, где $\mathcal{I} \in \pi[I]$, ИП. Полагаем, что

$$\tilde{\pi}^0[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}:\ (x \in \Lambda)\ \&\ (\Lambda \cap L = \varnothing)\},$$

получая семейство всех отделимых π-систем из (1.1); при $\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^0[I]$ ИП $(I, \mathcal{J})$ также называем отделимым. Кроме того,

$$\pi_0'[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \{x\} \in \mathcal{I}\ \ \forall x \in I\}$$

есть семейство всех π-систем (из семейства (1.1)) с синглетонами. Ясно, что $\pi_0'[I] \subset \tilde{\pi}^0[I]$.

Ультрафильтры π-систем. В настоящем пункте фиксируем π-систему $\mathcal{J} \in \pi[I]$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall J \in \mathcal{J}\ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F}))\}$$

есть семейство всех фильтров ИП $(I, \mathcal{J})$; ясно, что

$$((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{J} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})\ \ \forall x \in I.$$

Максимальные фильтры $(I, \mathcal{J})$ называем, как обычно, у/ф; в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) &\overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall J \in \mathcal{J}\ \ (J \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (J \in \mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{J}))\end{aligned} \tag{1.2}$$

имеем (непустое) множество всех у/ф ИП $(I, \mathcal{J})$. В виде

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \left\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing\right\}$$

имеем множество всех свободных у/ф ИП $(I, \mathcal{J})$. Отметим, что [1, (1.7)]

$$(\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^0[I]) \Longleftrightarrow (((I, \mathcal{J}) - \mathrm{ult})[y] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})\ \ \forall y \in I). \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) легко устанавливается, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \mid L \cap U \neq \varnothing \; \forall\, U \in \mathcal{U}\} \; \forall\, L \in \mathcal{J}. \tag{1.4}$$

Посредством множеств (1.4) определяется следующая топология:

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I] = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})) \mid \forall\, \mathcal{U} \in G \; \exists\, U \in \mathcal{U}: \; \Phi_{\mathcal{J}}(U) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})], \tag{1.5}$$

превращающая $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ в хаусдорфово ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]), \tag{1.6}$$

в котором все множества (1.4) открыто-замкнуты, а само ТП (1.6) оказывается нульмерным [13, 6.2]. При этом

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}|\mathfrak{X}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \mid \mathfrak{X} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \Phi_{\mathcal{J}}(X) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]] \;\; \forall\, \mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}). \tag{1.7}$$

Кроме того, как легко видеть, имеем свойство

$$\mathbf{F}_0^*[\mathcal{J}|A] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \mid A \cap U \neq \varnothing \;\; \forall\, U \in \mathcal{U}\} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]] \;\; \forall\, A \in \mathcal{P}(I) \tag{1.8}$$

(из (1.4) легко следует, что $\Phi_{\mathcal{J}}(L) = \mathbf{F}_0^*[\mathcal{J}|L]$ при $L \in \mathcal{J}$). При этом (см. (1.8))

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{J}|\mathfrak{X}) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \mathbf{F}_0^*[\mathcal{J}|X] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \mid X \cap U \neq \varnothing \; \forall\, X \in \mathfrak{X} \; \forall\, U \in \mathcal{U}\} \in \\ \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{J}}[I]] \; \forall\, \mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)). \tag{1.9}$$

Из (1.7) и (1.9) имеем, конечно, следующее свойство:

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{J}|\mathcal{X}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}|\mathcal{X}) \;\; \forall\, \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}). \tag{1.10}$$

Частный случай. В пределах настоящего пункта полагаем, что конструкции предыдущего пункта используются в случае $\mathcal{J} = \mathcal{P}(I)$, где, как уже отмечалось, I — непустое множество; ясно, что $\mathcal{P}(I) \in \pi_0'[I]$ и, кроме того, $\mathcal{P}(I) \in (\mathrm{alg})[I]$. Итак, $\mathfrak{F}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(I))$ и $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(I))$ суть непустые множества, причем

$$(I - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} ((I, \mathcal{P}(I)) - \mathrm{ult})[x] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \;\; \forall\, x \in I; \tag{1.11}$$

(1.11) определяет тривиальные у/ф множества I. Через $\beta[I]$ (через $\beta_0[I]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))$), для каждого из которых

$$\forall\, B_1 \in \mathcal{B} \; \forall\, B_2 \in \mathcal{B} \; \exists\, B_3 \in \mathcal{B}: \; B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Элементы $\beta[I]$ — направленные семейства, среди которых выделяются БФ, составляющие семейство $\beta_0[I]$; при этом

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{P}(I) \mid \exists\, B \in \mathcal{B}: \; B \subset J\} \in \mathfrak{F}[I] \;\; \forall\, \mathcal{B} \in \beta_0[I]. \tag{1.12}$$

В (1.12) реализуется «обычный» вариант порождения фильтров базами. Полагаем, что

$$\Phi_0(L|I) \stackrel{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{P}(I)}(L) \;\; \forall\, L \in \mathcal{P}(I). \tag{1.13}$$

Тогда как вариант (1.5) имеем следующую топологию:

$$\tau_0^*[I] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}^*_{\mathcal{P}(I)}[I] = \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]) \mid \forall\, \mathcal{U} \in G \; \exists\, U \in \mathcal{U}: \; \Phi_0(U|I) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]],$$

превращающую непустое множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ в экстремально несвязный [13, 6.2] компакт (компактное хаусдорфово ТП)

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I], \tau_0^*[I]), \tag{1.14}$$

соответствующий компактификации Стоуна–Чеха (дискретного) ТП $(I, \mathcal{P}(I))$. Заметим, что семейство открыто-замкнутых в компакте (1.14) п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ исчерпывается множествами (1.13). При этом

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[I|\mathfrak{X}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathfrak{X} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} \Phi_0(X|I) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(I)|\mathfrak{X}) =$$
$$= \mathbf{F}_0^*(\mathcal{P}(I)|\mathfrak{X}) \in \mathbf{C}_{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]}[\tau_0^*[I]] \;\; \forall \mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)). \tag{1.15}$$

Тем самым введены множества «стоун-чеховских» у/ф, допустимых (см. [1]) в смысле соблюдения соответствующих ОАХ.

Элементы топологии. В настоящем пункте фиксируем топологию $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, где $I \neq \varnothing$. В виде (I, τ) имеем ТП и, в частности, ИП в нашем расширительном толковании.

Если $x \in I$, то $N_\tau^0(x) \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$ и, в частности, $N_\tau^0(x) \in \beta_0[I]$; в виде фильтра $N_\tau(x) \overset{\triangle}{=} (I-\mathbf{fi})[N_\tau^0(x)] \in \mathfrak{F}[I]$ имеем семейство всех окрестностей x в (I, τ), понимаемых в смысле [14, гл. I]. Если $\mathcal{B} \in \beta_0[I]$ и $x \in I$, то (см. [14, гл. I])

$$\Big(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\Big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]) \tag{1.16}$$

(в (1.16) определена сходимость БФ и, в частности, фильтров и у/ф множества I). При $H \in \in \mathcal{P}(I)$ имеем

$$\mathrm{cl}(H, \tau) \overset{\triangle}{=} \{x \in I \mid S \cap H \neq \varnothing \;\; \forall S \in N_\tau(x)\} = \big\{x \in I \mid G \cap H \neq \varnothing \;\; \forall G \in N_\tau^0(x)\big\}$$

(замыкание H в (I, τ)), $(\tau - \mathrm{Int})[H] \overset{\triangle}{=} \{x \in I \mid H \in N_\tau(x)\}$ (внутренность H) и

$$(\tau - \mathrm{Fr})[H] \overset{\triangle}{=} \mathrm{cl}(H, \tau) \setminus (\tau - \mathrm{Int})[H]$$

(граница H). Полагаем, что $(\tau - \mathrm{dens})[I] \overset{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{P}(I) \mid I = \mathrm{cl}(J, \tau)\}$ (семейство всех п/м I, всюду плотных в смысле (I, τ)). Кроме того, введем в рассмотрение семейства

$$(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(I) \mid G = (\tau - \mathrm{Int})[\mathrm{cl}(G, \tau)]\} = \{(\tau - \mathrm{Int})[F] :\; F \in \mathbf{C}_I[\tau]\}, \tag{1.17}$$

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(I) \mid F = \mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Int})[F], \tau)\} = \{\mathrm{cl}(G, \tau) :\; G \in \tau\} \tag{1.18}$$

(всех) канонически открытых и канонически замкнутых в (I, τ) п/м I соответственно; $(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \in \pi[I]$. В связи с (1.17) и (1.18) см., например, [13, с. 45, 68]. При этом

$$\tau \cap \mathbf{C}_I[\tau] \subset (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \cap (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau].$$

Итак, открыто-замкнутые множества канонически открыты и канонически замкнуты одновременно. Наконец,

$$(\tau - \mathrm{isol})[I] \overset{\triangle}{=} \{x \in I \mid \{x\} \in \tau\}$$

есть множество всех изолированных в ТП (I, τ) точек множества I.

Некоторые свойства плотности. Фиксируем $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]$, где I — непустое множество. Итак, $(I, \mathcal{I})$ — отделимое ИП. Тогда в силу (2.5) имеем, что $((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]$ действует как

$$x \longmapsto ((I, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] :\; I \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}).$$

При этом [15, § 3] имеют место следующие свойства плотности:

$$\mathbf{F}_0^*[\mathcal{I}|A] = \mathrm{cl}\left(((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]\right) \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(I). \tag{1.19}$$

Как очевидное следствие (1.19) получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(J) = \mathrm{cl}\left(((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(J), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]\right) \quad \forall\, J \in \mathcal{I}. \tag{1.20}$$

В свою очередь, из (1.20) вытекает, в частности, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \Phi_{\mathcal{I}}(I) = \mathrm{cl}(\{((I,\mathcal{I}) - \mathrm{ult})[x] :\ x \in I\}, \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]). \tag{1.21}$$

Из (1.19)–(1.21) извлекаются соответствующие аналоги для случая $\mathcal{I} = \mathcal{P}(I)$ (см. (1.11)–(1.15)).

§ 2. Множества притяжения и проблема достижимости

В настоящем параграфе мы обсудим вопросы, связанные с достижимостью элементов ТП на значениях заданного отображения, называемого далее целевым. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E, точки которого рассматриваются в качестве обычных решений; выбор последних будет стеснен определенными условиями, которые могут приводить к стандартным ограничениям типа $e \in E_0$, где E_0 — п/м E, либо к ОАХ, определяемым посредством непустого семейства п/м E. Множество E будет выступать в качестве области определения целевого отображения, действующего, стало быть, из E в то или иное ТП (нам понадобятся два варианта конструкции). Сейчас мы зафиксируем непустое множество $\mathbb{Y}$ и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{Y}]$, получая ТП $(\mathbb{Y}, \tau)$, а также отображение $f \in \mathbb{Y}^E$, используемое в качестве целевого (позднее будут рассмотрены конкретизации триплета $(\mathbb{Y}, \tau, f)$). Напомним, что [14, гл. I] при $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ имеет место $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[\mathbb{Y}]$, а потому при $y \in \mathbb{Y}$

$$\left(f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\right) \Longleftrightarrow \left(N_\tau(y) \subset (\mathbb{Y} - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]]\right). \tag{2.1}$$

Разумеется, (2.1) применимо в случае, когда $\mathcal{B} = \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. С учетом этого полагаем при $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\mathfrak{E}] \triangleq \left\{y \in \mathbb{Y} \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathfrak{E}] :\ f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\right\}, \tag{2.2}$$

получая (в (2.2)) МП при ОАХ, определяемых посредством $\mathfrak{E}$; данное МП рассматриваем в качестве решения задачи о достижимости при «ограничениях» $\mathfrak{E}$ (эквивалентные представления данного МП см. в [2, § 3]). В частности,

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\mathcal{B}] = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{cl}(f^1(B), \tau) \quad \forall\, \mathcal{B} \in \beta[E]. \tag{2.3}$$

Заметим, что $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{E}) \in \beta[E]$ при $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$; как следствие, имеем из (2.3), что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\mathfrak{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{E})] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{E})} \mathrm{cl}\left(f^1(\Sigma), \tau\right) \in \mathbf{C}_Y[\tau]. \tag{2.4}$$

Построение МП является очень трудной задачей, которая понятным образом упрощается, когда семейство $\mathfrak{E}$ в (2.2) является синглетоном:

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\{\tilde{E}\}] = \mathrm{cl}(f^1(\tilde{E}), \tau) \quad \forall\, \tilde{E} \in \mathcal{P}(E). \tag{2.5}$$

Ситуацию в (2.5) будем называть стандартной: речь идет о достижимости в $(\mathbb{Y}, \tau)$ при ограничении типа $e \in \Sigma$ на выбор обычного решения e. Если же $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Sigma = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{E})} \Sigma \in \mathcal{P}(E) \tag{2.6}$$

определяет некий стандартный вариант самой исходной задачи, связанный с $\mathfrak{E}$:

$$\mathrm{cl}\Big(f^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\Sigma\Big),\tau\Big)\in\mathcal{P}((\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\mathfrak{E}]), \tag{2.7}$$

множество (2.7) связываем с достижимостью в классе точных решений (последние отождествляем [1, с. 91–92] с элементами множества (2.6); использование здесь операции замыкания представляется существенным); представляет интерес нарост

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\mathfrak{E}]\overset{\triangle}{=}(\mathbf{as})[E;\mathbb{Y};\tau;f;\mathfrak{E}]\setminus\mathrm{cl}\Big(f^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\Sigma\Big),\tau\Big). \tag{2.8}$$

§ 3. Компактификаторы

В дальнейшем используется следующее традиционное обозначение: если (X,τ_1), $X\neq\varnothing$, и (Y,τ_2), $Y\neq\varnothing$, — два ТП (X и Y — непустые множества, $\tau_1\in(\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2\in(\mathrm{top})[Y]$), то

$$C(X,\tau_1,Y,\tau_2)\overset{\triangle}{=}\big\{f\in Y^X\mid f^{-1}(G)\in\tau_1\ \ \forall\,G\in\tau_2\big\}.$$

Всюду в дальнейшем фиксируем (в дополнение к E) ТП $(\mathbf{H},\tilde\tau)$, $\mathbf{H}\neq\varnothing$, отображение $\mathbf{r}\in\mathbf{H}^E$ и семейство $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Вариант МП (2.4) при $\mathbb{Y}=\mathbf{H}$, $\tau=\tilde\tau$, $f=\mathbf{r}$ и $\mathfrak{E}=\mathcal{E}$ рассматриваем в качестве основного.

Если $(\mathbf{K},\tilde t)$, $\mathbf{K}\neq\varnothing$, есть ТП, $m\in\mathbf{K}^E$, $g\in C(\mathbf{K},\tilde t,\mathbf{H},\tilde\tau)$ и $\mathbf{r}=g\circ m$, то [16, предложение 3.3.1] имеем следующую оценку основного МП:

$$g^1((\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathcal{E}])\subset(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathcal{E}]. \tag{3.1}$$

В связи с (3.1) называем МП $(\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathcal{E}]$ вспомогательным. Если же в этих построениях $(\mathbf{K},\tilde t)$ — компактное [13, с. 196], а $(\mathbf{H},\tilde\tau)$ — хаусдорфово ТП, то (при $m\in\mathbf{K}^E$ и $g\in C(\mathbf{K},\tilde t,\mathbf{H},\tilde\tau)$)

$$(\mathbf{r}=g\circ m)\Longrightarrow((\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathcal{E}]=g^1((\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathcal{E}])). \tag{3.2}$$

Фактически в (3.2) реализуется идея расширения исходной задачи; набор $(\mathbf{K},\tilde t,m,g)$ со свойствами компактности ТП $(\mathbf{K},\tilde t)$, $\mathbf{K}\neq\varnothing$, $m\in\mathbf{K}^E$, $g\in C(\mathbf{K},\tilde t,\mathbf{H},\tilde\tau)$ и $\mathbf{r}=g\circ m$ называем далее компактификатором. Полагаем в дальнейшем, что $(\mathbf{H},\tilde\tau)$ — хаусдорфово ТП. Отметим простое свойство: если $(\mathbf{K},\tilde t,m,g)$ — компактификатор и $\Sigma\in\mathcal{P}(E)$, то

$$\mathrm{cl}\left(\mathbf{r}^1(\Sigma),\tilde\tau\right)=g^1\left(\mathrm{cl}\left(m^1(\Sigma),\tilde t\right)\right). \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. Проверим (3.3). Поскольку $(\mathbf{K},\tilde t)$ — компактное, а $(\mathbf{H},\tilde\tau)$ — хаусдорфово ТП и при этом g непрерывно, то [13, 3.1.12] g замкнуто и, как следствие [16, (2.8.1), (2.8.4)], $g^1(\mathrm{cl}(B,\tilde t))=\mathrm{cl}(g^1(B),\tilde\tau)$ при $B\in\mathcal{P}(\mathbf{K})$. Используем теперь вариант $B=m^1(\Sigma)$. Тогда

$$\mathrm{cl}\left(\mathbf{r}^1(\Sigma),\tilde\tau\right)=\mathrm{cl}\left((g\circ m)^1(\Sigma),\tilde\tau\right)=\mathrm{cl}\left(g^1(m^1(\Sigma)),\tilde\tau\right)=g^1\left(\mathrm{cl}\left(m^1(\Sigma),\tilde t\right)\right). \qquad \square$$

Предложение 3.1. *Если $(\mathbf{K},\tilde t,m,g)$ — компактификатор, то*

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathcal{E}]\subset g^1((\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathcal{E}]). \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем компактификатор $(\mathbf{K},\tilde t,m,g)$ и используем (2.7), (2.8). Тогда согласно (3.2)

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\left(\mathbf{r}^1\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\right),\tilde\tau\right)\cup(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathcal{E}]&=(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde\tau;\mathbf{r};\mathcal{E}]=g^1((\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathcal{E}])=\\&=g^1\left(\mathrm{cl}\left(m^1(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma),\tilde t\right)\cup(\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde t;m;\mathcal{E}]\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Из (2.8) и (3.5) вытекает, следовательно, что справедливо равенство

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] = g^1\Big(\mathrm{cl}\Big(m^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{t}\Big)\cup(\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]\Big)\setminus\mathrm{cl}\Big(\mathbf{r}^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{\tau}\Big). \quad (3.6)$$

Учтем теперь тот факт, что образ объединения двух множеств равен объединению их образов. Поэтому

$$g^1\Big(\mathrm{cl}\Big(m^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{t}\Big)\cup(\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]\Big)\setminus\mathrm{cl}\Big(\mathbf{r}^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{\tau}\Big) =$$

$$= \Big(g^1\Big(\mathrm{cl}\Big(m^1(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma),\tilde{t}\Big)\Big)\cup g^1\left((\mathrm{rem})\,[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]\right)\Big)\setminus\mathrm{cl}\Big(\mathbf{r}^1(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma),\tilde{\tau}\Big) =$$

$$= \Big(\mathrm{cl}\Big(\mathbf{r}^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{\tau}\Big)\cup g^1\left((\mathrm{rem})\,[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]\right)\Big)\setminus\mathrm{cl}\Big(\mathbf{r}^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{\tau}\Big)\subset g^1\big((\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]\big).$$

С учетом (3.6) получаем требуемое свойство (3.4). □

Итак, нарост основного МП является п/м непрерывного образа нароста вспомогательного МП. Заметим в этой связи, что согласно (3.2) последнее является множеством допустимых ОЭ; его описание упрощается в случае, когда $m^1(E)\in(\tilde{t}-\mathrm{dens})[\mathbf{K}]$. Из предложения 3.1 непосредственно получаем

Следствие 3.1. *Если* $(\mathbf{K},\tilde{t},m,g)$ *есть компактификатор, то*

$$((\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]\neq\varnothing)\Longrightarrow((\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]\neq\varnothing).$$

В заключение отметим, что равенство в (3.4) может отсутствовать.

Пример. Пусть $E=[0,1]$, а семейство $\mathcal{E}$ определяется равенством

$$\mathcal{E}=\Big\{\,[0,\varepsilon[\cup]1-\varepsilon,1[:\ \varepsilon\in\Big]0,\frac{1}{2}\Big[\Big\};$$

при этом $\mathcal{E}\in\beta_0[E]$ и пересечение всех множеств из $\mathcal{E}$ есть синглетон $\{0\}$. Полагаем здесь, что $\mathbf{H}=\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\tilde{\tau}=\tau_{\mathbb{R}}$ — обычная $|\cdot|$-топология $\mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{r}$ есть постоянная функция, действующая из E в $\mathbf{H}:\ \mathbf{r}(x)\overset{\triangle}{=}1\ \ \forall\,x\in E$. В этих условиях, применяя (2.3), получаем, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]=\{1\}=\mathrm{cl}\Big(\mathbf{r}^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{\tau}\Big).$$

Поэтому согласно (2.8) имеем следующее равенство: $(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]=\varnothing$.

Введем очевидный компактификатор, полагая, что $\mathbf{K}=E=[0,1]$, $\tilde{t}$ есть $|\cdot|$-топология $\mathbf{K}$ (топология, индуцированная из $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$), а m — тождественное отображение на $E:\ m(x)\overset{\triangle}{=}x\ \ \forall\,x\in E$. Наконец, функцию $g\in\mathbf{H}^{\mathbf{K}}$ определяем посредством константы $1:\ g(y)\overset{\triangle}{=}1\ \ \forall\,y\in\mathbf{K}$. Легко видеть, что в данном примере полученный набор $(\mathbf{K},\tilde{t},m,g)$ есть компактификатор. При этом, однако, из (2.3) легко следует, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]=\{0;1\}. \quad (3.7)$$

С другой стороны, по свойствам m имеем цепочку равенств

$$\mathrm{cl}\Big(m^1\Big(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\Sigma\Big),\tilde{t}\Big)=\{0\}.$$

С учетом (2.8) и (3.7) получаем, стало быть, равенство

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]=\{1\}.$$

Как следствие, $g^1((\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]) = \{1\}$ и, таким образом,

$$g^1((\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]) \neq (\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]. \qquad \square$$

Предложение 3.2. *Пусть* $(\mathbf{K},\tilde{t},m,g)$ *есть компактификатор, для которого* g *инъективно:* $\forall\, x \in \mathbf{K}\ \forall\, y \in \mathbf{K}$

$$(g(x) = g(y)) \Longrightarrow (x = y). \tag{3.8}$$

Тогда $(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] = g^1((\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем для краткости, что $\mathbb{A} \triangleq (\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]$, $\mathbb{B} \triangleq (\mathrm{rem})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}]$; E_0 отождествляем с пересечением всех множеств из $\mathcal{E}$. Тогда

$$\mathbb{A} = (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] \setminus \mathrm{cl}(\mathbf{r}^1(E_0),\tilde{\tau}),$$
$$\mathbb{B} \triangleq (\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}] \setminus \mathrm{cl}(m^1(E_0),\tilde{t}). \tag{3.9}$$

Из предложения 3.1 следует, что $\mathbb{A} \subset g^1(\mathbb{B})$. Осталось установить противоположное вложение. Допустим противное:

$$g^1(\mathbb{B}) \setminus \mathbb{A} \neq \varnothing. \tag{3.10}$$

Выберем произвольно и зафиксируем

$$h_* \in g^1(\mathbb{B}) \setminus \mathbb{A}. \tag{3.11}$$

Пусть $k_* \in \mathbb{B}$ таково, что $h_* = g(k_*)$. В силу (3.9) получаем, что

$$k_* \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{K};\tilde{t};m;\mathcal{E}] \tag{3.12}$$

и вместе с тем

$$k_* \notin \mathrm{cl}(m^1(E_0),\tilde{t}).$$

С учетом (3.2) и (3.12) имеем, однако, что

$$h_* \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}].$$

Учтем (2.7), (2.8) и (3.11). Тогда $h_* \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] \setminus \mathbb{A}$ и, следовательно,

$$h_* \in \mathrm{cl}\left(\mathbf{r}^1(E_0),\tilde{\tau}\right). \tag{3.13}$$

С учетом (3.3) и (3.13) $h_* \in g^1\left(\mathrm{cl}\left(m^1(E_0),\tilde{t}\right)\right)$, а потому для некоторого $k^* \in \mathrm{cl}(m^1(E_0),\tilde{t})$ справедливо равенство $h_* = g(k^*)$, означающее, что $g(k_*) = g(k^*)$. Из (3.8) и (3.9) имеем теперь, что $k_* = k^* \notin \mathbb{B}$, что противоречит выбору k_*. Полученное при условии (3.10) противоречие означает, что само (3.10) невозможно и, следовательно, $g^1(\mathbb{B}) \subset \mathbb{A}$, чем и завершается обоснование равенства $\mathbb{A} = g^1(\mathbb{B})$. $\square$

Возвращаясь к (3.8), отметим, что в случае, когда $(\mathbf{K},\tilde{t},m,g)$ — компактификатор со свойством инъективности g, в виде самого отображения g реализуется гомеоморфное вложение $(\mathbf{K},\tilde{t})$ в $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$. Рассмотрим данное свойство подробнее.

Итак, пусть, если не оговорено противное, $(\mathbf{K},\tilde{t},m,g)$ — фиксированный компактификатор со свойством инъективности (3.8). Рассмотрим множество-образ $\mathbb{H} \triangleq g^1(\mathbf{K}) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H})$ как «единицу» подпространства $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$. Итак, введем в рассмотрение топологию $\tilde{\tau}|_{\mathbb{H}} \triangleq \{\mathbb{H} \cap G :\ G \in \tilde{\tau}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{H}]$. В виде

$$(\mathbb{H},\tilde{\tau}|_{\mathbb{H}}) \tag{3.14}$$

имеем упомянутое подпространство, которое само является хаусдорфовым ТП. В силу непрерывности g имеем для $G \in \tilde{\tau}$, что

$$g^{-1}(\mathbb{H} \cap G) = \{k \in \mathbf{K} \mid g(k) \in \mathbb{H} \cap G\} = \{k \in \mathbf{K} \mid g(k) \in G\} = g^{-1}(G) \in \tilde{t}. \tag{3.15}$$

Следовательно, $g \in C(\mathbf{K}, \tilde{t}, \mathbb{H}, \tilde{\tau}|_{\mathbb{H}})$. Наконец, из (3.8) следует, что g есть биекция $\mathbf{K}$ на $\mathbb{H}$ (со свойством непрерывности). Поэтому g есть гомеоморфизм $(\mathbf{K}, \tilde{t})$ на ТП (3.14); см. [13, 3.1.13].

Компактификатор $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор со свойством инъективности g — условимся называть инъективным. Покажем, что каждый компактификатор может быть преобразован в инъективный (компактификатор) с использованием естественной факторизации (см., например, [13, 2.4]).

Итак, пусть $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$ — произвольный компактификатор. Иными словами, $(\mathbb{K}, \hat{t})$ — компактное ТП, $\mathbb{K} \neq \varnothing$, $\mu \in \mathbb{K}^E$, $\nu \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ и $\mathbf{r} = \nu \circ \mu$. При $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \nu^1(\mathbb{K}) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H})$ введем в рассмотрение (непустое) семейство $\mathcal{D} \stackrel{\triangle}{=} \{\nu^{-1}(\{h\}) :\ h \in \mathfrak{N}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbb{K}))$. При этом, конечно, ν — сюръекция $\mathbb{K}$ на $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что $\mathcal{D}$ есть разбиение $\mathbb{K}$: множества из $\mathcal{D}$ непусты и в объединении реализуют $\mathbb{K}$; кроме того, $\forall\, D_1 \in \mathcal{D}\ \forall\, D_2 \in \mathcal{D}$

$$(D_1 \cap D_2 \neq \varnothing) \Longrightarrow (D_1 = D_2).$$

Разбиение $\mathcal{D}$ порождает отношение эквивалентности $\equiv$ на $\mathbb{K} : \forall\, k_1 \in \mathbb{K}\ \forall\, k_2 \in \mathbb{K}$

$$(k_1 \equiv k_2) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\nu(k_1) = \nu(k_2)).$$

При этом, конечно, $\mathcal{D}$ совпадает с фактор-пространством $\mathbb{K}/_{\equiv}$. Отметим, что

$$[k]_\nu \stackrel{\triangle}{=} \left\{\tilde{k} \in \mathbb{K} \mid k \equiv \tilde{k}\right\} = \left\{\tilde{k} \in \mathbb{K} \mid \nu(k) = \nu(\tilde{k})\right\} = \nu^{-1}(\{\nu(k)\}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{K})\ \ \forall\, k \in \mathbb{K}.$$

Поэтому $\mathcal{D} = \{\nu^{-1}(\{\nu(k)\}) : k \in \mathbb{K}\}$. Легко видеть, что $\forall\, D \in \mathcal{D}\ \exists!n \in \mathfrak{N}$: $\nu(k) = n\ \forall\, k \in D$. С учетом этого полагаем, как обычно, что отображение $\sigma \in \mathfrak{N}^{\mathcal{D}}$ def таково, что $\sigma(D) = \nu(k)$ $\forall\, D \in \mathcal{D}\ \forall\, k \in D$.

Обычным образом определяем операцию проектирования: полагаем, что

$$\mathbf{p} \stackrel{\triangle}{=} ([k]_\nu)_{k \in \mathbb{K}};$$

тогда $\mathbf{p} \in \mathcal{D}^{\mathbb{K}}$ есть отображение, для которого $\mathbf{p}(\tilde{k}) = \nu^{-1}\left(\{\nu(\tilde{k})\}\right)\ \ \forall\, \tilde{k} \in \mathbb{K}$. Имеем очевидное равенство $\nu = \sigma \circ \mathbf{p}$ (каноническое разложение ν). Напомним [13, 2.4], что $\mathcal{D}$ оснащается следующей фактор-топологией:

$$\mathcal{T} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{D}) |\ \mathbf{p}^{-1}(\mathbb{G}) \in \hat{t}\} \in (\mathrm{top})[\mathcal{D}].$$

Более того, $\mathbf{p} \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathcal{D}, \mathcal{T})$ (непрерывность проекции).

Напомним, что $\nu = \sigma \circ \mathbf{p}$. С учетом этого представления и непрерывности ν получаем (см. [13, 2.4.2]), что $\sigma \in C(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathfrak{N}, \tilde{\tau}|_{\mathfrak{N}})$, где $\tilde{\tau}|_{\mathfrak{N}} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{N} \cap G :\ G \in \tilde{\tau}\}$ (в этом рассуждении учитываем, что по определению $\mathfrak{N}$ имеет место свойство $\nu \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathfrak{N}, \tilde{\tau}|_{\mathfrak{N}})$; данное свойство проверяется подобно (3.15)). Разумеется, $\sigma \in \mathbf{H}^{\mathcal{D}}$; из только что установленного свойства непрерывности σ как отображения $\mathcal{D}$ на $\mathfrak{N}$ следует с учетом рассуждения, подобного (3.15), что

$$\sigma \in C(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{H}, \tilde{\tau}). \tag{3.16}$$

С учетом компактности $(\mathbb{K}, \hat{t})$ и непрерывности $\mathbf{p}$ получаем, что $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ — компактное ТП (см. [13, 3.1.10]).

Заметим теперь, что $\mathbf{p} \circ \mu \in \mathcal{D}^E$. При этом $\sigma \circ (\mathbf{p} \circ \mu) = \sigma \circ \mathbf{p} \circ \mu = (\sigma \circ \mathbf{p}) \circ \mu = \nu \circ \mu = \mathbf{r}$. С учетом (3.16) и компактности ТП $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ получили, что $(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{p} \circ \mu, \sigma)$ — компактификатор. Легко видеть, что σ — инъективное отображение $\mathcal{D}$ в $\mathbf{H}$. Итак, требуемый инъективный компактификатор построен.

Таким образом, указана конкретная процедура, переводящая произвольный компактификатор в компактификатор, для которого справедливо утверждение предложения 3.2, касающееся сохранения нароста.

§ 4. Ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств

В настоящем параграфе следуем подходу [2] к решению задачи о достижимости с ОАХ. Имеется в виду конструирование компактификатора параграфа 3 с использованием у/ф ИП в толковании параграфа 1. В этой связи совсем кратко напомним схему [17–19]. Полагаем при этом, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Наконец, с учетом (1.21), полагая $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] :\ x \in E\}$, получаем свойство

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}) \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{dens})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{4.1}$$

С учетом (4.1) напомним представления МП $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]$, установленные в [15], и рассмотрим некоторые свойства нароста. Так [15, предложение 2],

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{L}) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E})). \tag{4.2}$$

Итак, описание рассматриваемого МП является при $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ достаточно простым. В общем случае [15, предложение 3, замечание 3]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbf{F}^*_0(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \tag{4.3}$$

(в связи с (4.2), (4.3) полезно учитывать (1.10)).

Всюду до конца настоящего параграфа полагаем, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ (итак, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$), и, кроме того, постулируем, что

$$E_0 \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \in \mathcal{L} \tag{4.4}$$

(заметим, что пересечение всех множеств из $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$ также совпадает с E_0 (4.4); обсуждение вышеупомянутых условий см. в [1, § 6]). В силу (4.4) определено открыто-замкнутое множество $\Phi_{\mathcal{L}}(E_0)$. Тогда [1, теорема 6.1]

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E})] = (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \\ = \Phi_{\mathcal{L}}(E_0) = \mathrm{cl}\left(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E_0), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Итак, в рассматриваемом сейчас случае внутренность МП (4.3) допускает стандартную и весьма естественную реализацию (см. (2.5)). С учетом замкнутости множества $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ имеем очевидное теперь

Предложение 4.1. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{Fr})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E})] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(E_0) = (\mathrm{rem})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]. \tag{4.6}$$

Итак, нарост (вспомогательного по смыслу) МП совпадает с его границей в нульмерном хаусдорфовом ТП

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]). \tag{4.7}$$

Напомним здесь же (см. [1, замечание 6.2]) с учетом предложения 4.1, что

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(E_0) \neq \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \notin (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]). \tag{4.8}$$

Пусть до конца настоящего параграфа $\mathcal{L} \in \pi'_0[E]$ (рассматривается случай π-системы с синглетонами). Тогда определены открыто-замкнутые (в ТП (4.7)) множества $\Phi_{\mathcal{L}}(\{x\}),\ x \in E$. Как следствие, имеем, что

$$(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{isol})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{L}),$$

а тогда, как легко видеть,

$$((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(E). \tag{4.9}$$

С учетом (1.18), (1.19) и (4.9) получаем следующее свойство:

$$\mathbf{F}^*_0[\mathcal{L}|A] \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]] \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(E)$$

(в самом деле, замыкание открытого множества канонически замкнуто). Справедливо очевидное теперь

Предложение 4.2. *Если истинна посылка импликации* (4.8), *то*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \neq \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

Следствие 4.1. *Если истинна посылка импликации* (4.8), *то*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \neq \mathrm{cl}(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

Итак, в случае непустоты нароста (4.6) рассматриваемое сейчас МП в пространстве у/ф не допускает стандартной реализации.

§ 5. Преобразование наростов

Сейчас мы возвращаемся к построениям § 3 (см., в частности, предложение 3.1). Однако сначала напомним некоторые положения [15, 17–19], фиксируя хаусдорфово ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ $\mathbf{H} \neq \varnothing$, и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (напомним, что $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$). Тогда (см. § 1) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, а потому (см. (2.1)) $\forall f \in \mathbf{H}^E \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall h \in \mathbf{H}$

$$\Big(f^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} h\Big) \iff \big(N_{\tilde{\tau}}(h) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{U}]]\big). \tag{5.1}$$

С учетом (5.1) напомним (см., в частности, [15, (5.1)]), что

$$\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}] \overset{\triangle}{=} \Big\{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \exists h \in \mathbf{H}: \ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} h\Big\} \in \mathcal{P}'\left(\mathbf{H}^E\right). \tag{5.2}$$

Отметим, что в [17–19] указаны конкретные классы отображений из $\mathbf{H}^E$, являющихся элементами множества (5.2) (отображения с ярусными компонентами и, в частности, ярусные отображения; при этом, конечно, накладываются некоторые дополнительные условия на $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, которые, впрочем, не являются обременительными для практически значимых постановок).

Полагаем до конца настоящего параграфа, что $\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}]$ (возможные конкретизации см., в частности, в [17–19]). В этом случае [15, § 5] определен оператор $\varphi_{\lim}[\mathbf{r}] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, который в данной работе для краткости условимся обозначать через φ. Итак, $\varphi \overset{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\mathbf{r}] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ и при этом

$$\mathbf{r}^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.3}$$

Заметим в связи с (5.3), что [15, (5.3), (5.4)]

$$\varphi^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathfrak{E})) = \Big\{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathfrak{E}): \ \mathbf{r}^1[\mathcal{U}] \overset{\tilde{\tau}}{\Longrightarrow} h\Big\} \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathfrak{E}] \ \ \forall \mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \tag{5.4}$$

(при $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ из (5.4) извлекается нужная конкретизация, касающаяся рассматриваемого варианта ОАХ, определяемого семейством $\mathcal{E}$).

Полагаем до конца настоящего параграфа, что $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ есть регулярное [13, 1.5] ТП (иными словами, $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ является T_1- и T_3-пространством). В этом случае

$$\varphi \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tilde{\tau}). \tag{5.5}$$

Пусть до конца настоящего параграфа $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, то есть $(E, \mathcal{L})$ есть отделимое ИП. Тогда с учетом (1.3) определено отображение

$$x \longmapsto ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x]: \ E \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),$$

обозначаемое, как и ранее, через $((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]$ и для которого

$$\mathbf{r} = \varphi \circ ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]. \tag{5.6}$$

Тогда с учетом (1.9), (2.4), (5.5) и (5.6) получаем оценку

$$\varphi^1(\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))) \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]. \tag{5.7}$$

Полагаем до конца настоящего параграфа, что ТП (4.7) компактно; тогда (4.7) — нульмерный компакт и (см. [15, предложение 6])

$$\varphi^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbf{r}^1(E),\tilde{\tau})$$

(напомним, что ИП $(E,\mathcal{L})$ отделимо, а ТП $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ регулярно). При этом (см. (1.9), [15, теорема 1])

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] = \varphi^1(\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))); \tag{5.8}$$

В связи с (5.7), (5.8) напомним (3.1), (3.2) и отметим, что (см. (5.5), (5.6)) набор

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E],((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot],\varphi)$$

является (при наших условиях) компактификатором. Здесь же отметим, что [15, предложение 7]

$$(\mathcal{E}\subset\mathcal{L}) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] = \varphi^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}))).$$

Из предложения 3.1 вытекает (в общем случае семейства $\mathcal{E}$), что

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] \subset \varphi^1((\mathrm{rem})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}]). \tag{5.9}$$

Кроме того, из (3.3) следует, что при $A\in\mathcal{P}(E)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\left(\mathbf{r}^1(A),\tilde{\tau}\right) &= \varphi^1\left(\mathrm{cl}\left(((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})\,[\cdot]^1(A),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right)\right) = \\ &= \varphi^1\left(\mathrm{cl}\left(\{((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[x]:\ x\in A\},\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right)\right)\end{aligned} \tag{5.10}$$

(в связи с (5.9) и (5.10) отметим, что $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ является, в частности, хаусдофовым ТП). В частности, из (5.10) имеем, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{r}^1(L),\tilde{\tau}) = \varphi^1(\Phi_{\mathcal{L}}(L))\ \ \forall\, L\in\mathcal{L}. \tag{5.11}$$

Заметим, что согласно (5.9) и предложению 4.1 при $\mathcal{E}\subset\mathcal{L}$ и $E_0\in\mathcal{L}$

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] \subset \varphi^1((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Fr})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})]). \tag{5.12}$$

В этой связи полагаем до конца настоящего параграфа, что $\mathcal{E}\subset\mathcal{L}$ и выполнено (4.4), то есть $E_0\in\mathcal{L}$. Тогда справедливо (5.12), откуда, в частности, следует, что

$$((\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]\neq\varnothing) \Longrightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Fr})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})]\neq\varnothing). \tag{5.13}$$

Имея в виду использование (5.13), полагаем до конца настоящего параграфа, что

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]\neq\varnothing. \tag{5.14}$$

Тогда, как видно из (5.13) и (5.14), реализуется свойство

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Fr})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})]\neq\varnothing. \tag{5.15}$$

В этом случае с учетом (1.7) и (4.5) получаем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \neq \mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})],\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{5.16}$$

(учитываем также свойство открыто-замкнутости всех множеств $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$, $L\in\mathcal{L}$), поскольку в рассматриваемом случае

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})]\cup(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Fr})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})].$$

Следовательно, в рассматриваемом сейчас случае (5.14) (а также при условиях $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ и $E_0 \in \mathcal{L}$, оговоренных ранее) согласно (1.18) и (5.16)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \notin (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \tag{5.17}$$

Пусть до конца настоящего параграфа $\mathcal{L} \in \pi_0'[E]$. В дополнение к (5.17) учтем (4.2) и предложение 4.2. В самом деле, согласно предложению 4.1 и (5.15) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(E_0) \neq \varnothing$, то есть истинна посылка импликации (4.8). Теперь из предложения 4.2 вытекает очевидное

Предложение 5.1. *Имеет место свойство* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \neq \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|A] \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

Следствие 5.1. $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \neq \mathrm{cl}\left(((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

Для доказательства следует наряду с предложением 5.1 учесть (1.19).

Замечание 5.1. Из следствия 5.1 вытекает, что в рассматриваемом случае (несмотря на (4.1)) вспомогательное МП не допускает стандартной реализации, каким бы ни выбиралось п/м E, погружаемое затем в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Отметим, что условие (4.4) выполняется в случае $E_0 = \varnothing$, который выделяет весьма интересный класс задач. Речь идет о задачах о достижимости (с ОАХ), в которых отсутствуют точные решения (см. введение работы [1]).

Свойство, определяемое в следствии 5.1, проиллюстрируем на простейшем примере (см. [20]). Полагаем далее в пределах настоящего замечания, что $E = [0,1]$, а $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$ есть алгебра, порожденная семейством

$$\mathfrak{I} \stackrel{\triangle}{=} \{J \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, c \in E\; \exists\, d \in E:\; (\,]c,d[\subset J)\;\&\;(J \subset [c,d])\}$$

(используем соглашения [21, с. 35, 36], допускающие реализацию $\varnothing$ в виде соответствующего промежутка); данное семейство есть [22, (6.3.15), предложение 6.3.2] полуалгебра п/м E. В рассматриваемом случае известно [23] исчерпывающее описание $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, которое напомним сейчас предельно кратко. Заметим, что при $t \in]0,1]$ определен у/ф

$$\mathcal{U}_t^{(-)} \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in [0,t[:\; [c,t[\subset L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \tag{5.18}$$

аналогичным образом при $t \in [0,1[$ имеем у/ф

$$\mathcal{U}_t^{(+)} \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, c \in]t,1]:\,]t,c] \subset L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.19}$$

При этом у/ф, указанные в (5.18) и (5.19), являются свободными: для каждого из этих у/ф пересечение всех его множеств пусто. Тогда [23] в рассматриваемом случае

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \left\{\mathcal{U}_t^{(-)}:\; t \in]0,1]\right\} \cup \left\{\mathcal{U}_t^{(+)}:\; t \in [0,1[\right\} \cup \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}).$$

Заметим, кстати, что в нашем случае $\mathcal{L} \in \pi_0'[E]$ (имеем, в частности, π-систему с синглетонами). Пусть в данном примере $\mathcal{E} = \{\,]0,\varepsilon[:\; \varepsilon \in]0,1]\}$. Ясно, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ и $E_0 = \varnothing \in \mathcal{L}$. Кроме того, $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$.

Полагаем, что $\mathbf{H} = E$ (итак, $\mathbf{H} = [0,1]$), а $\tilde{\tau}$ есть обычная топология $\mathbf{H}$, порожденная метрикой-модулем. Тогда $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ — компакт и, в частности, регулярное ТП. Наконец, $\mathbf{r}$ определяем как тождественное отображение: $\mathbf{r}(x) = x \;\forall x \in E$. С использованием положений [17–19] легко проверяется, что в нашем случае $\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tilde{\tau}]$ (действительно, $\mathbf{r}$ является, в частности, ярусной функцией из E в $\mathbf{H}$, где E оснащено алгеброй множеств $\mathcal{L}$, а $\mathbf{H}$ — метрикой-модулем; см. в этой связи [19, с. 308]).

Поскольку $E_0 = \varnothing$, имеем в силу (2.8) очевидное равенство

$$(\mathrm{rem})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}].$$

При этом согласно (2.3) $0 \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tilde{\tau};\mathbf{r};\mathcal{E}]$. Таким образом, (5.14) также выполнено. Следовательно, все условия, предполагаемые в связи со следствием 5.1, в нашем случае выполнены и мы можем дать сейчас соответствующую иллюстрацию данного следствия.

Для этого заметим, что в рассматриваемом примере $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \left\{\mathcal{U}_0^{(+)}\right\}$ (синглетон, содержащий $\mathcal{U}_0^{(+)}$). В самом деле, при $\varepsilon \in]0,1]$ имеем, что

$$\left]\, 0, \frac{\varepsilon}{2}\, \right] \subset]0,\varepsilon[,$$

где $]0,\varepsilon[\in \mathcal{L}$, а потому $]0,\varepsilon[\in \mathcal{U}_0^{(+)}$ согласно (5.19). В итоге $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_0^{(+)}$ и, стало быть, $\mathcal{U}_0^{(+)} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, то есть $\left\{\mathcal{U}_0^{(+)}\right\} \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Для дальнейшего построения отметим легко проверяемое обстоятельство, вытекающее (см. (4.2)) из пустоты множества E_0:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = (\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];((E,\mathcal{L})-\mathrm{ult})[\cdot];\mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}), \tag{5.20}$$

где (в рассматриваемом сейчас случае) справедливо равенство

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \left\{\mathcal{U}_t^{(-)}:\ t \in]0,1]\right\} \cup \left\{\mathcal{U}_t^{(+)}:\ t \in [0,1[\right\}. \tag{5.21}$$

Учтем (5.20) и (5.21). Если $\xi \in]0,1]$, то согласно (5.18) имеем

$$\left]0, \frac{\xi}{2}\right[\ \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{U}_\xi^{(-)}, \tag{5.22}$$

поскольку из (5.18) имеем с очевидностью, что $\left[\dfrac{\xi}{2}, \xi\right[\in \mathcal{U}_\xi^{(-)}$. Поэтому согласно (5.22) $\mathcal{U}_\xi^{(-)} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Коль скоро и выбор ξ был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{U}_t^{(-)} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})\ \ \forall\, t \in]0,1]. \tag{5.23}$$

Если же $\theta \in]0,1[$, то, как легко видеть с учетом (5.19), $]0,\theta[\in \mathcal{E} \setminus \mathcal{U}_\theta^{(+)}$, поскольку $]\theta,1] \in \mathcal{U}_\theta^{(+)}$ и при этом $]0,\theta[\cap]\theta,1] = \varnothing$. В итоге $\mathcal{U}_\theta^{(+)} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Коль скоро выбор θ был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{U}_t^{(+)} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})\ \ \forall\, t \in]0,1[. \tag{5.24}$$

Из (5.20), (5.21), (5.23) и (5.24) получаем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \subset \{\mathcal{U}_0^+\}$, и, как следствие, справедливо нужное равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \{\mathcal{U}_0^+\}, \tag{5.25}$$

где, однако, $\mathcal{U}_0^+ \notin \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})$, а потому (см. (5.25)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ не допускает стандартной реализации.

§ 6. Применение компактификации Стоуна–Чеха

В настоящем параграфе полагаем, что $(\mathbf{H},\tilde{\tau})$ — компакт (то есть отделимое компактное ТП). Фиксируем произвольные (целевой) оператор $\mathbf{r} \in \mathbf{H}^E$ и семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Используем конструкцию предыдущего параграфа в случае $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$ (для этого, конечно, следует убедиться в том, что $\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tilde{\tau}]$ при данной конкретизации $\mathcal{L}$; это свойство легко следует из положений, связанных с компактификацией Стоуна–Чеха (см., например, [13, § 3.6]), но для наших целей более удобно использовать схему работы [17]). Итак, согласно [17, предложение 5.1] имеем требуемое включение:

$$\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tilde{\tau}]. \tag{6.1}$$

С учетом этого определяем φ (5.5); в нашем случае

$$\varphi \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_0^*[E],\mathbf{H},\tilde{\tau}) \tag{6.2}$$

(см. § 1). Напомним, что ТП (1.14) есть экстремально несвязный компакт (для дискрета $(E, \mathcal{P}(E))$ реализуется компактификация Стоуна–Чеха). При этом φ (6.2) может расматриваться как непрерывное продолжение $\mathbf{r}$ (6.1), поскольку согласно (5.6)

$$\mathbf{r} = \varphi \circ (E - \mathrm{ult})[\cdot]. \tag{6.3}$$

Из (6.2), (6.3) следует, что $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_0^*[E], (E - \mathrm{ult})[\cdot], \varphi)$ есть компактификатор,

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = \varphi^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]), \tag{6.4}$$

где $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]; \tau_0^*[E]; (E - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]$ является вспомогательным МП (в (6.4) учтено (4.2)). Напомним, что [1, теорема 5.1]

$$(\tau_0^*[E] - \mathrm{Int})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] = \Phi_0(E_0|E),$$

где (как и в (4.4)) E_0 есть пересечение всех множеств $\Sigma \in \mathcal{E}$. Из (5.9) вытекает, что

$$(\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \subset \varphi^1((\mathrm{rem})[E; \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]; \tau_0^*[E]; (E - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]). \tag{6.5}$$

Согласно (5.11) $\mathrm{cl}(\mathbf{r}^1(A), \tilde{\tau}) = \varphi^1(\Phi_0(A|E))\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$. Учитывая предложение 4.1 и (6.5), получаем (как вариант (5.12)), что

$$(\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \subset \varphi^1((\tau_0^*[E] - \mathrm{Fr})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]]). \tag{6.6}$$

В свою очередь, из (6.6) следует, конечно, импликация

$$((\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \neq \varnothing) \Longrightarrow \big((\tau_0^*[E] - \mathrm{Fr})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] \neq \varnothing\big). \tag{6.7}$$

Заметим, что условие посылки в (6.7) можно считать непосредственно «наблюдаемым», в то время как следствие (6.7) таковым не является, что связано с отсутствием конкретных представлений для свободных у/ф из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$; (6.7) как раз и можно рассматривать как вариант косвенной проверки свойства непустоты границы множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$. Вместе с тем (см. (6.2), (6.3)) по свойствам компактификатора имеем с учетом (2.8), (3.2), что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = \mathrm{cl}\left(\mathbf{r}^1(E_0), \tilde{\tau}\right) \cup \varphi^1\left((\tau_0^*[E] - \mathrm{Fr})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]]\right).$$

Напомним, что согласно предложению 4.1 $(\tau_0^*[E] - \mathrm{Fr})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E} \setminus \Phi_0(E_0|E)$ характеризует нарост вспомогательного МП. Возвращаясь к (6.7), полагаем до конца настоящего параграфа, что

$$(\mathrm{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \neq \varnothing,$$

чем обеспечивается справедливость свойства $(\tau_0^*[E] - \mathrm{Fr})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]] \neq \varnothing$. Поскольку $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$ при $x \in E$, получаем из следствия 5.1, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \neq \mathrm{cl}\left((E - \mathrm{ult})[\cdot]^1(A), \tau_0^*[E]\right) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

(иными словами, вспомогательное МП не допускает стандартной реализации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ченцов А.Г. К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 90–109.
2. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
4. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1975. 230 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

6. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения $\mathbb{N}$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
9. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16.
10. Терпе Ф., Флаксмайер Ю. О некоторых приложениях теории расширений топологических пространств в теории меры // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32. № 5 (197). С. 125–162.
11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
12. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
13. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
14. Бурбаки Н. Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
15. Ченцов А.Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101.
16. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
17. Ченцов А.Г. К вопросу о представлении элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия вузов. Математика. 2012. № 10. С. 45–59.
18. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–55.
19. Ченцов А.Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314.
20. Chentsov A.G. The nonsequential approximate solutions in problems of asymptotic analysis // Soochow Journal of Mathematics. 2006. Vol. 32. № 3. P. 441–475.
21. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2008. 388 с.
22. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 541 с.
23. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.

Поступила в редакцию 15.04.2015

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems

Keywords: remainder, attraction set, ultrafilter.

MSC: 28A33

An abstract attainability problem under constraints of asymptotic character is considered; the corresponding solution is identified with an attraction set in the class of ultrafilters of the space of ordinary solutions. The remainder of the above-mentioned set with respect to closuring the set of results supplied by precise solutions is investigated (the given notion of a precise solution conceptually corresponds to Warga scheme although it is applied to the case of more general constraints). To represent the above-mentioned (basic) attraction set, the corresponding analog (of the last set) realized in the space of generalized elements is used. For thus obtained auxiliary attraction set, the remainder is analyzed; its connection with the remainder of the basic attraction set is investigated. Conditions of identifying the remainders for basic and auxiliary attraction sets are obtained. General statements are detailed for the case when generalized elements are defined in the form

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 2

of ultrafilters of widely interpreted measurable spaces where free ultrafilters are responsible for the realization of remainders. It is established that, under existence of a remainder, the set of generalized admissible elements does not coincide with closuring a set of ordinary solutions (this set does not admit standard realization).

REFERENCES

1. Chentsov A.G. To the validity of constraints in the class of generalized elements, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 90–109 (in Russian).
2. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).
3. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
4. Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya* (Foundations of optimal control), Tbilisi: Izd. Tbilis. Univ., 1975, 230 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
6. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 518 p.
7. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.
8. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian).
9. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
10. Flachsmeyer J., Terpe F. Some applications of the theory of compactifications of topological spaces and measure theory, *Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, no. 5, pp. 133–171. DOI: 10.1070/RM1977v032n05ABEH003866
11. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
12. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.
13. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.
14. Burbaki N. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.
15. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).
16. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002, 408 p.
17. Chentsov A.G. Representation of attraction elements in abstract attainability problems with asymptotic constraints, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 10, pp. 38–49.
18. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: Equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 28–44.
19. Chentsov A.G. Tier mappings and ultrafilter-based transformations, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314 (in Russian).
20. Chentsov A.G. The nonsequential approximate solutions in problems of asymptotic analysis, *Soochow Journal of Mathematics*, 2006, vol. 32, no. 3, pp. 441–475.
21. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (The elements of finitely additive measures theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2008, 388 p.
22. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* (The elements of finitely additive measures theory, II), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2010, 541 p.
23. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian).

Received 15.04.2015

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
E-mail: chentsov@imm.uran.ru