УДК 517.977.80

© *В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев*

ОДНОТИПНАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ В ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

Рассматривается линейная дифференциальная игра с заданным моментом окончания p. Множества достижимости игроков являются n-мерными шарами. Терминальное множество в игре определяется условием принадлежности нормы фазового вектора отрезку с положительными концами. Множество, определяемое данным условием, названо в работе кольцом. Тот факт, что терминальное множество не является выпуклым, потребовал привлечения дополнительной теории, позволяющей находить сумму и разность Минковского для кольца и шара в n-мерном пространстве.

На выбор управления первого игрока накладывается импульсное ограничение. Возможности первого игрока определяются запасом ресурсов, который он может использовать при формировании своего управления. В отдельные моменты времени возможно отделение части запаса ресурсов, что может привести к «мгновенному» изменению фазового вектора, тем самым усложняя задачу. Управление второго игрока стеснено геометрическими ограничениями.

Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна.

Построен максимальный стабильный мост, ведущий в заданный момент времени на терминальное множество. Стабильный мост определяется функциями внешнего и внутреннего радиусов, которые вычислены в явном виде.

Ключевые слова: импульсное управление, дифференциальная игра, стабильный мост.

Введение

К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы [1]. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы и известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории управления гарантированным результатом.

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектории управляемой системы могут быть разрывными.

В работе [2] предложен метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. Возможность применения этого метода к задачам импульсного управления рассматривалась, например, в работах [3, 4]. В работе [4] приводится пример импульсной «мягкой» встречи двух управляемых материальных точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости. Обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. В работе [5] этот метод применяется при решении конкретных задач импульсной встречи.

В работе [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно.

В работах [7–13] предложены разные подходы к исследованию дифференциальных игр и задач управления при наличии помех в случае импульсных управлений.

Известно, что линейную управляемую систему с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [14] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоят только управления.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим игру в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$dz = -a(t)\,du + b(t)v\,dt, \quad t \leqslant p.$$

Здесь p — заданный момент времени; $a(t)$ и $b(t)$ — неотрицательные скалярные функции, причем функция $a(t)$ является непрерывной на полуоси $(-\infty, p]$, а функция $b(t)$ суммируема на каждом отрезке $[\tau_1, \tau_2] \subset (-\infty, p]$.

На каждом отрезке $[t, \tau] \subset (-\infty, p]$ допустимым программным управлением первого игрока является функция $u : [t, \tau] \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной вариацией:

$$\int_t^\tau \|du(r)\| = \sup \sum \|u(r_{l+1}) - u(r_l)\|.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, а верхняя грань берется по всем разбиениям r_i отрезка $[t, \tau]$.

Допустимым программным управлением второго игрока является измеримая функция $v : [t, \tau] \to S$, где

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| \leqslant 1\}.$$

Позицией игры является точка (t, z, μ), где $t \leqslant p$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$. Здесь посредством $\mathbb{R}_+$ обозначено множество неотрицательных чисел. Число μ характеризует количество запасов ресурсов, которое можно использовать на формирование допустимого программного управления $u : [t, p] \to \mathbb{R}^n$.

При выбранных на отрезке $[t, \tau]$ допустимых программных управлениях игроков правило перехода позиции задается формулами

$$\mu(\tau) = \mu(t) - \int_t^\tau \|du(r)\|, \quad z(\tau) = z(t) - \int_t^\tau a(r)\,du(r) + \int_t^\tau b(r)v(r)\,dr. \tag{1.1}$$

Первый интеграл во второй формуле (1.1) понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Условие не перерасхода имеющегося запаса ресурсов записывается в виде неравенства $\mu(\tau) \geqslant 0$.

Для чисел $g_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, обозначим

$$S(g_1, g_2) = \{z \in \mathbb{R}^n : g_1 \leqslant \|z\| \leqslant g_2\}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что множество (1.2) непусто тогда и только тогда, когда $g_2 \geqslant \max(g_1; 0)$. При $g_2 \geqslant g_1 > 0$ оно является кольцом.

Заданы числа $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$, с помощью которых в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ определено терминальное множество

$$Z = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : z \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ \mu \geqslant 0\}. \tag{1.3}$$

Цель первого игрока заключается в том, чтобы вывести позицию (z, μ) в момент времени p на терминальное множество (1.3). Цель второго игрока противоположна.

Отметим, что случай $\varepsilon_1 = 0$ рассмотрен в работе [8].

Наличие импульсного управления может привести к мгновенному изменению позиции. Поэтому условие попадания позиции в момент времени p на терминальное множество запишем в следующем виде [5, 9]:

$$z(p) \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \mu(p)a(p)S, \quad \mu(p) \geqslant 0.$$

Здесь использовались операции Минковского [15] сложения двух множеств $Z_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, и умножение множества Z_1 на число γ:

$$Z_1 + Z_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = z_1 + z_2,\ z_i \in Z_i\}, \quad \gamma Z_1 = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \gamma z_1,\ z_1 \in Z_1\}.$$

§ 2. Максимальный стабильный мост

Построим максимальный стабильный мост [14] $W(t) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ при $t \leqslant p$, ведущий в момент времени p на множество (1.3). С этой целью введем оператор программного поглощения [9,16].

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, $t < \tau \leqslant p$. Тогда $T_t^\tau(X)$ — множество точек $(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, для каждой из которых по любому допустимому программному управлению $v : [t, \tau] \to S$ второго игрока можно указать допустимое программное управление $u : [t, \tau] \to \mathbb{R}^n$ первого игрока такое, чтобы точка $(z(\tau), \mu(\tau))$, определяемая формулами (1.1) при $\mu(t) = \mu$ и $z(t) = z$, принадлежала множеству X. Полагаем, что $T_t^\tau(\varnothing) = \varnothing$.

Определение 1. *Максимальным стабильным мостом, ведущим в момент времени p на множество Z*, называется семейство множеств $W(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) $W(p) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : z \in Z + \mu a(p) S,\ \mu \geqslant 0\}$;

(2) $t < \tau \leqslant p \Rightarrow W(t) \subset T_t^\tau(W(\tau))$;

(3) если $t_0 < p$ и $(z, \mu) \notin W(t_0)$, то существует разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_k < t_{k+1} = p \tag{2.1}$$

такое, что

$$(z, \mu) \notin T_\omega(Z) = T_{t_0}^{t_1}\big(T_{t_1}^{t_2}\big(\ldots T_{t_k}^{p}(Z)\ldots\big)\big). \tag{2.2}$$

Максимальный стабильный мост, ведущий в момент времени p на множество (1.3) (см. [9, 16]), равен $W(t) = \bigcap\limits_{\omega} T_\omega(Z)$. Здесь пересечение берется по всем разбиениям ω (2.1).

Будем считать, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ можно рассматривать как предельный, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2^{(k)}$, где последовательность $\varepsilon_2^{(k)} > \varepsilon_2^{(k+1)} > \varepsilon_1$ и $\varepsilon_2^{(k)} \to \varepsilon_1$. Тогда $Z^{(k+1)} \subset Z^{(k)}$ и $\bigcap_{k \geqslant 1} Z^{(k)} = Z$, где $Z^{(k)}$ определяется формулой (1.3) с заменой ε_2 на $\varepsilon_2^{(k)}$. Обозначим через $W^{(k)}(t)$ максимальный стабильный мост, ведущий в момент времени p на множество $Z^{(k)}$. Тогда $W(t) = \bigcap_{k \geqslant 1} W^{(k)}(t)$ (см. [9,16]).

§ 3. Формулировка результатов

Обозначим

$$m(t) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} a(\tau). \tag{3.1}$$

Предположение 1. При любом $t < p$ выполнено неравенство $m(t) > 0$.

При любых $t < p$ и $\mu \geqslant 0$ положим

$$\nu(t) = \inf_{t \leqslant \tau < p} \left(\frac{\varepsilon_1}{m(\tau)} + \frac{1}{m(\tau)} \int_\tau^p b(r)\, dr \right), \tag{3.2}$$

$$G(t, \mu) = \varepsilon_2 + \mu m(t) - \int_t^p b(r)\, dr, \quad t \leqslant p; \tag{3.3}$$

$$g(t, \mu) = \begin{cases} \max(\varepsilon_1 - \mu m(p); 0) & \text{при} \quad t = p,\ \mu \geqslant 0, \\ \varepsilon_1 - \mu m(t) + \displaystyle\int_t^p b(r)\, dr & \text{при} \quad t < p \text{ и } 0 \leqslant \mu < \nu(t), \\ 0 & \text{при} \quad t < p \text{ и } \nu(t) \leqslant \mu. \end{cases} \tag{3.4}$$

Введем момент времени

$$q = \inf \left\{ t < p : \int_t^p b(r)\, dr \leqslant \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \right\}. \tag{3.5}$$

Отметим, что из условия $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ следует неравенство $q < p$.

Теорема 1. *При $q \leqslant t \leqslant p$ максимальный стабильный мост $W(t)$, ведущий в момент времени p на множество* (1.3), *задается формулой*

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : g(t, \mu) \leqslant \|z\| \leqslant G(t, \mu)\}. \tag{3.6}$$

Пусть $q > -\infty$. Тогда из формулы (3.5) и из монотонности функции (3.1) следует, что

$$\int_t^p b(r)\,dr \leqslant \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} = \int_q^p b(r)\,dr \text{ при } q \leqslant t \leqslant p. \tag{3.7}$$

Обозначим при $t \leqslant p$ и $\mu \geqslant 0$

$$D(t) = \int_t^q \frac{b(r)}{m(r)}\,dr. \tag{3.8}$$

$$\widehat{\nu}(t) = \min\left\{\nu(q); \min_{t\leqslant r\leqslant q}\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(r)} + D(r)\right)\right\}, \tag{3.9}$$

$$\widehat{G}(t, \mu) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(t)(\mu - D(t)), \tag{3.10}$$

$$\widehat{g}(t, \mu) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - m(t)(\mu - D(t)) & \text{при} \quad 0 \leqslant \mu < \widehat{\nu}(t), \\ 0 & \text{при} \quad \widehat{\nu}(t) \leqslant \mu. \end{cases} \tag{3.11}$$

Определим момент времени

$$q_1 = \inf\{t < q : D(t) < \widehat{\nu}(t)\}. \tag{3.12}$$

Теорема 2. *При $q_1 \leqslant t \leqslant q$ максимальный стабильный мост $W(t)$, ведущий в момент времени p на множество* (1.3), *задается формулой*

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \widehat{g}(t, \mu) \leqslant \|z\| \leqslant \widehat{G}(t, \mu)\}. \tag{3.13}$$

Замечание 1. Из формул (3.2) и (3.7) следует, что если $q > -\infty$, то $0 < \nu(q) \leqslant \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$. Отсюда и из (3.9) получим, что $\widehat{\nu}(q) = \nu(q)$. Далее, положим в формулах (3.3) и (3.4) $t = q$ и учтем равенство в (3.7). Получим равенства $G(t, \mu) = \widehat{G}(t, \mu)$, $g(t, \mu) = \widehat{g}(t, \mu)$. Следовательно, при $t = q$ множества (3.6) и (3.12) совпадают.

Пусть $q_1 > -\infty$. Тогда из формулы (3.11), учитывая монотонность и непрерывность функций (3.7) и (3.8), получим, что

$$D(t) > \widehat{\nu}(t) \text{ при } t < q_1; \quad D(q_1) = \widehat{\nu}(q_1); \quad D(t) < \widehat{\nu}(t) \text{ при } q_1 < t \leqslant q. \tag{3.14}$$

Определим момент времени

$$q_2 = \inf\left\{t < q_1 : \int_t^{q_1} b(r)\,dr \leqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right\}. \tag{3.15}$$

Теорема 3. *При $q_2 \leqslant t \leqslant q_1$ максимальный стабильный мост $W(t)$, ведущий в момент времени p на множество* (1.3), *задается формулой*

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|z\| \leqslant G_1(t, \mu), \mu \geqslant D(q_1)\}. \tag{3.16}$$

Здесь обозначено

$$G_1(t, \mu) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \int_t^{q_1} b(r)\,dr + m(t)(\mu - D(q_1)). \tag{3.17}$$

Замечание 2. Из равенства (3.14) $D(q_1) = \widehat{\nu}(q_1)$ и из формул (3.10) и (3.11) следует, что $\widehat{G}(q_1, \mu) \geqslant \widehat{g}(q_1, \mu)$ при $\mu \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\mu \geqslant D(q_1)$. Поэтому при $t = q_1$ множества (3.13) и (3.16) совпадают.

Рассмотрим случай, когда $q_2 > -\infty$.

Теорема 4. *При $t \leqslant q_2$ максимальный стабильный мост $W(t)$, ведущий в момент времени p на множество* (1.3)*, задается формулой*

$$W(t) = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|z\| \leqslant G_2(t, \mu), \mu \geqslant D_*(t)\}. \tag{3.18}$$

Здесь обозначено

$$G_2(t, \mu) = m(t)(\mu - D_*(t)), \quad D_*(t) = D(t) + D(q_1) - D(q_2) \geqslant 0. \tag{3.19}$$

Замечание 3. Из формулы (3.15) следует, что $\displaystyle\int_{q_2}^{q_1} b(r)\, dr = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$. Отсюда и из равенства $D_*(q_2) = D(q_1)$ получим, что при $t = q_2$ множества (3.16) и (3.18) совпадают.

Для доказательства формул (3.5), (3.12), (3.15) и (3.16) необходимо вычислить значение оператора программного поглощения на множестве, имеющем форму кольца.

§ 4. Вычисление значения оператора программного поглощения на кольце

Вычислим множество $T_t^\tau(X)$ при $t < \tau \leqslant p$, когда

$$X = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : l(\mu) \leqslant \|z\| \leqslant L(\mu)\}, \tag{4.1}$$

где полунепрерывная снизу функция $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и непрерывная функция $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ таковы, что множество

$$\Lambda = \{\mu \geqslant 0 : l(\mu) \leqslant L(\mu)\} = [D, +\infty) \text{ при некотором числе } D \geqslant 0. \tag{4.2}$$

При $t < \tau \leqslant p$ обозначим

$$A(t, \tau) = \max_{t \leqslant r \leqslant \tau} a(r), \quad B(t, \tau) = \int_t^\tau b(r)\, dr. \tag{4.3}$$

Тогда области достижимости игроков равны [11]:

$$\left\{\int_t^\tau a(r)\, du(r) : \int_t^\tau \|du(r)\| = \nu \geqslant 0\right\} = \nu A(t, \tau) S, \quad \left\{\int_t^\tau b(r) v(r)\, dr : \|v(r)\| \leqslant 1\right\} = B(t, \tau) S.$$

Запишем множество X (4.1) в форме кольца (1.2). Тогда из определения множества $T_t^\tau(X)$ и из формул (4.1), (4.2) следует, что $(z, \mu) \in T_t^\tau(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $v \in S$ найдутся $\eta \in [D, \mu]$ и $u \in S$ такие, что $z - (\mu - \eta) A(t, \tau) u + B(t, \tau) v \in S(l(\eta), L(\eta))$. Отсюда, используя определение геометрической разности

$$Z_1 \dot{-} Z_2 = \{z \in \mathbb{R}^n : z + Z_2 \subset Z_1\} = \bigcap_{z \in Z_2} (-z + Z_1)$$

двух множеств $Z_i \subset \mathbb{R}^n$ [15], получим, что точка $(z, \mu) \in T_t^\tau(X)$ тогда и только тогда, когда

$$z \in \left\{\bigcup_{D \leqslant \eta \leqslant \mu} (S(l(\eta), L(\eta)) + (\mu - \eta) A(t, \tau) S)\right\} \dot{-} B(t, \tau) S. \tag{4.4}$$

Если $\mu < D$, то множество (4.4) является пустым.

Лемма 1 (см. [17]). *Для любых чисел $0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$ и $\sigma \geqslant 0$ выполнены равенства*

$$S(\delta, \varepsilon) + \sigma S = S(\max(0; \delta - \sigma), \varepsilon + \sigma), \tag{4.5}$$

$$S(\delta, \varepsilon) \dot{-} \sigma S = \begin{cases} \varnothing & \textit{при} \quad f(\delta, \sigma) > \varepsilon - \sigma, \\ S(f(\delta, \sigma), \varepsilon - \sigma) & \textit{при} \quad f(\delta, \sigma) \leqslant \varepsilon - \sigma. \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь обозначено

$$f(0,\sigma)=0 \text{ при любом } \sigma\geqslant 0;\ f(\delta,\sigma)=\delta+\sigma \text{ при любых } \delta>0 \text{ и } \sigma\geqslant 0. \tag{4.7}$$

Теорема 5. *Верно равенство*

$$T_t^\tau(X)=\{(z,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ : \delta_t^\tau(l)(\mu)\leqslant\|z\|\leqslant\sigma_t^\tau(L)(\mu), \mu\geqslant D\}, \tag{4.8}$$

где

$$\sigma_t^\tau(L)(\mu)=\max_{D\leqslant\eta\leqslant\mu}(L(\eta)+(\mu-\eta)A(t,\tau))-B(t,\tau), \tag{4.9}$$

$$\delta_t^\tau(l)(\mu)=f\Big(\max\Big(0;\min_{D\leqslant\eta\leqslant\mu}(l(\eta)-(\mu-\eta)A(t,\tau))\Big), B(t,\tau)\Big). \tag{4.10}$$

Доказательство. Обозначим

$$\phi(\eta)=\max(0;l(\eta)-(\mu-\eta)A(t,\tau)),\quad \psi(\eta)=L(\eta)+(\mu-\eta)A(t,\tau). \tag{4.11}$$

Тогда из формул (4.4) и (4.5) получим, что

$$T_t^\tau(X)=\Big\{(z,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ : z\in\Big(\bigcup_{D\leqslant\eta\leqslant\mu}S(\phi(\eta),\psi(\eta))\Big)\dot{-}B(t,\tau)S\Big\}. \tag{4.12}$$

Из формул (4.11) следует, что функция $\phi(\eta)$ является полунепрерывной снизу, а функция $\psi(\eta)$ непрерывна. Далее, $\phi(\eta)\leqslant\psi(\eta)$ при $D\leqslant\eta\leqslant\mu$. Отсюда можно получить, что

$$\bigcup_{D\leqslant\eta\leqslant\mu}S(\phi(\eta),\psi(\eta))=S\Big(\min_{D\leqslant\eta\leqslant\mu}\phi(\eta),\max_{D\leqslant\eta\leqslant\mu}\psi(\eta)\Big).$$

Подставим эту формулу в (4.12) и применим формулу (4.6). Получим формулы (4.8)–(4.10). □

Вычислим $T_t^p(Z)$ для множества Z (1.3).

Следствие 1. *При любом* $q\leqslant t\leqslant p$

$$T_t^p(Z)=\{(z,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+ : \delta_t^p(\varepsilon_1)(\mu)\leqslant\|z\|\leqslant G(t,\mu)\}, \tag{4.13}$$

где

$$\delta_t^p(\varepsilon_1)(\mu)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \dfrac{\varepsilon_1}{m(t)}\leqslant\mu,\\ \varepsilon_1-\mu m(t)+B(t,p) & \text{при}\quad 0\leqslant\mu<\dfrac{\varepsilon_1}{m(t)}.\end{cases} \tag{4.14}$$

Доказательство. Из формул (3.1) и (4.3) следует, что $m(t)=A(t,p)$ и при $t\leqslant\tau\leqslant p$

$$m(t)=\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}(\lambda m(\tau)+(1-\lambda)A(t,\tau))=\max(m(\tau);A(t,\tau)). \tag{4.15}$$

Подставив $l(\mu)=\varepsilon_1$, $L(\mu)=\varepsilon_2$, $D=0$ в формулы (4.8)–(4.10), получим, что $\sigma_t^p(\varepsilon_2)(\mu)=$ $=G(t,\mu)$ и

$$\delta_t^p(\varepsilon_1)(\mu)=f\Big(\max\Big(0;\min_{0\leqslant\eta\leqslant\mu}(\varepsilon_1-(\mu-\eta)m(t))\Big), B(t,p)\Big)=f\left(\max\left(0;\varepsilon_1-\mu m(t)\right), B(t,p)\right).$$

Отсюда и из (4.7) получим формулу (4.14). Из определения числа q (3.5) можно получить, что функция (4.14) удовлетворяет неравенствам $G(t,\mu)\geqslant\delta_t^p(\varepsilon_1)(\mu)\geqslant 0$ при всех $\mu\geqslant 0$. □

§ 5. Доказательство теоремы 1

Зафиксируем число $q \leqslant t_0 < p$ и разбиение ω (2.1). Рассмотрим множество $T_\omega(Z)$ (2.2).

Лемма 2. *Выполнено равенство*

$$T_\omega(Z) = \{(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : g_\omega(t_0,\mu) \leqslant \|z\| \leqslant G(t_0,\mu)\}, \tag{5.1}$$

где

$$g_\omega(t_i,\mu) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu \geqslant \nu_\omega(t_i), \\ \varepsilon_1 - \mu m(t_i) + B(t_i,p) & \text{при} \quad 0 \leqslant \mu < \nu_\omega(t_i), \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\nu_\omega(t) = \min\left(\frac{\varepsilon_1}{m(t_k)}, \frac{\varepsilon_1 + B(t_k,p)}{m(t_{k-1})}, \frac{\varepsilon_1 + B(t_{k-1},p)}{m(t_{k-2})} \ldots, \frac{\varepsilon_1 + B(t_{i+1},p)}{m(t_i)}\right), \quad i = \overline{0,k}. \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$W_\omega(t_i) = T_{t_i}^{t_{i+1}}\left(T_{t_{i+1}}^{t_{i+2}}\left(\ldots T_{t_k}^{t_{k+1}}(Z)\ldots\right)\right), \quad i = \overline{0,k}. \tag{5.4}$$

Покажем, что множество (5.4) задается формулой (5.1) при $t = t_i$. Доказательство проведем индукцией по числу i. При $i = k$ множество $W_\omega(t_k) = T_{t_k}^p(Z)$. Отсюда и из формулы (4.13) получим, что множество $W_\omega(t_k)$ определяется формулой (5.1) с $t = t_k$. Из формул (5.2) и (5.3) следует, что функция $g_\omega(t_i,\mu) \geqslant 0$ при всех $\mu \geqslant 0$ и полунепрерывно снизу зависит от μ. Далее, из формул (3.7) и (4.3) следует, что $2B(t_i,p) \leqslant \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Поэтому из (3.3) получим, что $G(t_i,\mu) \geqslant 0.5(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \mu m(t_i) > 0$. Следовательно, если $\mu \geqslant \nu_\omega(t_i)$, то $G(t_i,\mu) > 0 = g(t_i,\mu)$. Пусть $0 \leqslant \mu < \nu_\omega(t_i)$. Тогда $G(t_i,\mu) - g_\omega(t_i,\mu) = 2m(t_i)\mu + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - 2B(t_i,p) \geqslant 0$.

Таким образом, множество, стоящее в правой части доказываемого равенства (5.1), удовлетворяет всем требованиям, которые накладываются на множество X (4.1) с $\Lambda = [0,+\infty)$.

Из формулы (5.4) следует, что $W_\omega(t_{i-1}) = T_{t_{i-1}}^{t_i}(W_\omega(t_i))$. Применим теорему 5. Тогда

$$\sigma_{t_{i-1}}^{t_i}(G(t_i,\cdot))(\mu) = \max_{0\leqslant\eta\leqslant\mu}(\varepsilon_2 + \eta m(t_i) - B(t_i,p) + (\mu-\eta)A(t_{i-1},t_i)) - B(t_{i-1},t_i).$$

Отсюда и из формул (4.3), (4.15) получим, что $\sigma_{t_{i-1}}^{t_i}(G(t_i,\cdot))(\mu) = G(t_{i-1},\mu)$.

Покажем, что

$$\delta_{t_{i-1}}^{t_i}(g_\omega(t_i,\cdot))(\mu) = g_\omega(t_{i-1},\mu). \tag{5.5}$$

В самом деле, из (4.10) следует, что

$$\delta_{t_{i-1}}^{t_i}(g_\omega(t_i,\cdot))(\mu) = f(C, B(t_{i-1},t_i)), \tag{5.6}$$

где

$$C = \max\left(0; \min_{0\leqslant\eta\leqslant\mu}(g_\omega(t_i,\eta) - (\mu-\eta)A(t_{i-1},t_i))\right). \tag{5.7}$$

Пусть $\mu \geqslant \nu_\omega(t_i)$. Тогда

$$\min_{0\leqslant\eta\leqslant\mu}(g_\omega(t_i,\eta) - (\mu-\eta)A(t_{i-1},t_i)) \leqslant g_\omega(t_i,\mu) = 0.$$

Следовательно, $C = 0$. Отсюда и из формул (4.7) и (5.6) получим, что $\delta_{t_{i-1}}^{t_i}(g_\omega(t_i,\cdot))(\mu) = 0$. Далее, из (5.3) следует, что $\nu_\omega(t_i) \geqslant \nu_\omega(t_{i-1})$. Поэтому $\mu \geqslant \nu_\omega(t_{i-1})$ и, следовательно, $g_\omega(t_{i-1},\mu) = 0$. Таким образом, при $\mu \geqslant \nu_\omega(t_i)$ равенство (5.5) выполнено.

Рассмотрим случай $0 \leqslant \mu < \nu_\omega(t_i)$. Тогда из (5.2) получим, что

$$g_\omega(t_i,\eta) = \varepsilon_1 - \eta m(t_i) + B(t_i,p) > 0 \text{ при всех } 0 \leqslant \eta \leqslant \mu.$$

Поэтому из формул (4.15) и (5.7) следует, что

$$C = \max\left(0; \varepsilon_1 - \mu m(t_{i-1}) + B(t_i, p)\right). \tag{5.8}$$

Пусть

$$\mu \geqslant \frac{\varepsilon_1 + B(t_i, p)}{m(t_{i-1})}. \tag{5.9}$$

Тогда из (5.3) следует, что $\mu \geqslant \nu_\omega(t_{i-1})$. Поэтому $g_\omega(t_{i-1}, \mu) = 0$. Далее, из (5.8) получим, что $C = 0$. Отсюда и из формул (4.7) и (5.6) следует равенство (5.5).

Пусть неравенство (5.9) не выполнено. Тогда из условия $0 \leqslant \mu < \nu_\omega(t_i)$ и из формулы (5.3) следует, что $0 \leqslant \mu < \nu_\omega(t_{i-1})$. Поэтому

$$g_\omega(t_{i-1}, \mu) = \varepsilon_1 - \mu m(t_{i-1}) + B(t_{i-1}, p). \tag{5.10}$$

Далее, из (5.8) получим, что $C = \varepsilon_1 - \mu m(t_{i-1}) + B(t_i, p) > 0$. Из формул (4.7), (5.6) и (5.10) следует равенство (5.5).

Положим в (5.4) $i = 0$. Получим требуемую формулу (5.4). □

Лемма 3. *При любых $q \leqslant t < \tau \leqslant p$ выполнено включение*

$$T_t^\tau(W(\tau)) \supset W(t). \tag{5.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.3) и (3.4) следует, что функция $g(\tau, \mu)$ полунепрерывно снизу зависит от μ и $G(\tau, \mu) \geqslant g(\tau, \mu) \geqslant 0$ при всех $\mu \geqslant 0$. Поэтому множество $W(\tau)$ удовлетворяет всем требованиям, которые накладываются на множество X (4.1) с $\Lambda = [0, +\infty)$. Применим теорему 5. Получим

$$\sigma_t^\tau(G(\tau, \cdot))(\mu) = G(t, \mu), \quad \delta_t^\tau(g(\tau, \cdot))(\mu) = f(C, B(t, \tau)),$$

где

$$C = \max\Big(0; \min_{0 \leqslant \eta \leqslant \mu} \big(g(\tau, \eta) - (\mu - \eta) A(t, \tau)\big)\Big). \tag{5.12}$$

Поэтому включение (5.11) будет выполнено, если

$$f(C, B(t, \tau)) \leqslant g(t, \mu). \tag{5.13}$$

Пусть $\mu \geqslant \nu(\tau)$. Тогда из (3.4) и (5.12) получим, что $C = 0$. Поэтому $f(0, B(t, \tau)) = 0 \leqslant \leqslant g(t, \mu)$.

Пусть $\mu < \nu(\tau)$. Тогда из (3.4) и (5.12) следует, что $C = \max(0; \varepsilon_1 - \mu m(t) + B(\tau, p))$. Поэтому если $\varepsilon_1 + B(\tau, p) \leqslant m(t)\mu$, то $C = 0$ и, следовательно, неравенство (5.13) выполнено.

Пусть

$$0 \leqslant \mu < \frac{\varepsilon_1 + B(\tau, p)}{m(t)}. \tag{5.14}$$

Тогда $C = \varepsilon_1 - \mu m(t) + B(\tau, p) > 0$. Поэтому $f(C, B(t, \tau)) = \varepsilon_1 - \mu m(t) + B(t, p)$. Далее, из неравенства (5.14) и из монотонности функций $m(r)$ и $B(r, p)$ следует, что

$$\mu < \frac{\varepsilon_1 + B(r, p)}{m(r)} \text{ при всех } t \leqslant r \leqslant \tau.$$

Отсюда, учитывая неравенство $\mu < \nu(\tau)$ и формулу (3.2), получим, что $\mu < \nu(t)$. Учитывая формулу (3.4), будем иметь, что неравенство (5.13) выполнено и в этом случае. □

Лемма 4. *Пусть $q \leqslant t_0 < p$ и $(z, \mu) \notin W(t_0)$. Тогда существует разбиение ω* (2.1), *при котором выполнено* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (3.6) возможен случай $\|z\| > G(t_0, \mu)$. Тогда из формулы (4.13) получим, что $(z, \mu) \notin T_{t_0}^{p}(Z)$.

Пусть $\|z\| < g(t_0, \mu)$. Тогда из (3.2) и (3.4) следует, что

$$\|z\| < \varepsilon_1 - \mu m(t_0) + B(t_0, p) \text{ и } 0 \leqslant \mu < \frac{\varepsilon_1 + B(\tau, p)}{m(\tau)} \text{ при всех } t_0 \leqslant \tau < p. \tag{5.15}$$

Из последнего неравенства получим, что $m(p) > 0$. Используя непрерывность функций $m(\tau)$ и $B(\tau, p)$ на отрезке $[t, p]$, можно показать, что существует число $h > 0$ такое, что

$$0 \leqslant \mu < \frac{\varepsilon_1 + B(r, p)}{m(\tau)} \text{ при всех } t \leqslant \tau < r \leqslant \tau + h \leqslant p. \tag{5.16}$$

Возьмем любое разбиение (2.1), у которого $t_{i+1} < t_i + h$. Тогда из (5.3) и (5.16) следует, что $\mu < \nu_\omega(t_0)$. Отсюда, используя формулу (5.2) и первое неравенство в (5.15), получим, что $\|z\| < g_\omega(t_0, \mu)$. Следовательно, выполнено (2.2). □

Отметим, что свойство 1, которое участвует в определении 1, непосредственно следует из формул (3.3), (3.4), (3.6) и (4.5).

Из этого замечания и из лемм 2–4 следует утверждение теоремы 1.

§ 6. Доказательство теоремы 2

Лемма 5. *При $q_1 \leqslant r \leqslant q$ выполнено неравенство $\widehat{g}(r, \mu) \geqslant 0$ при любом $\mu \geqslant 0$ и*

$$\Big\{\mu \geqslant 0 : \widehat{g}(r, \mu) \leqslant \widehat{G}(r, \mu)\Big\} = [D(r), +\infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.9) следует, что $\widehat{\nu}(r) \leqslant \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(r)} + D(r)$. Отсюда и из формул (3.11) получим, что $\widehat{g}(r, \mu) \geqslant 0$ при всех $\mu \geqslant 0$. Далее, из формул (3.10) и (3.11) следует, что

$$\widehat{G}(r, \mu) - \widehat{g}(r, \mu) = \begin{cases} 2m(r)(\mu - D(r)) & \text{при} \quad 0 \leqslant \mu < \widehat{\nu}(r), \\ \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(r)(\mu - D(r)) & \text{при} \quad \widehat{\nu}(r) \leqslant \mu. \end{cases}$$

Согласно формуле (3.12) $D(r) \leqslant \widehat{\nu}(r)$. Отсюда и из предыдущей формулы получим требуемое равенство. □

Лемма 6. *При $q_1 \leqslant t < \tau \leqslant q$ семейство множеств* (3.13) *удовлетворяет включению* (5.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(z, \mu) \in W(t)$. Тогда $\widehat{g}(t, \mu) \leqslant \|z\| \leqslant \widehat{G}(t, \mu)$ и, как следует из леммы 5, $\mu \geqslant D(t)$.

Из формул (3.11) и (3.12), учитывая лемму 5, получим, что множество $W(\tau)$ имеет вид (4.1) с параметрами $L(\mu) = \widehat{G}(\tau, \mu)$, $l(\mu) = \widehat{g}(\tau, \mu)$, $\Lambda = [D(\tau), +\infty)$. Из теоремы 5 следует, что $(z, \mu) \in T_t^\tau(W(\tau))$ тогда и только тогда, когда $0 \leqslant \delta_t^\tau(\widehat{g}(\tau, \cdot))(\mu) \leqslant \|z\| \leqslant \sigma_t^\tau(\widehat{G}(\tau, \cdot))(\mu)$. Поэтому, если покажем, что

$$\widehat{G}(t, \mu) \leqslant \sigma_t^\tau(\widehat{G}(\tau, \cdot))(\mu) \text{ и } \delta_t^\tau(\widehat{g}(\tau, \cdot))(\mu) \leqslant \widehat{g}(t, \mu) \text{ при } \mu \geqslant D(t), \tag{6.1}$$

получим включение $(z, \mu) \in T_t^\tau(W(\tau))$.

Отметим, что $D(\tau) \leqslant D(t) \leqslant \mu$. Из формул (3.10) и (4.9) имеем, что

$$\sigma_t^\tau(\widehat{G}(\tau,\cdot))(\mu) = \max_{D(\tau)\leqslant\eta\leqslant\mu}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + m(\tau)(\eta - D(\tau)) + (\mu-\eta)A(t,\tau)\right) - B(t,\tau) =$$
$$= \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} + m(t)\left(\mu - D(\tau) - \frac{B(t,\tau)}{m(t)}\right).$$

Здесь также использована формула (4.15). Из формулы (3.8) и из монотонности функции $m(r)$ следует неравенство

$$D(\tau) + \frac{B(t,\tau)}{m(t)} \leqslant D(t). \tag{6.2}$$

Отсюда и из предыдущей формулы получим первое неравенство в (6.1).

Из формулы (4.10) следует, что

$$\delta_t^\tau(\widehat{g}(\tau,\cdot))(\mu) = f(C, B(t,\tau)), \tag{6.3}$$

где

$$C = \max(0; L), \quad L = \min_{D(\tau)\leqslant\eta\leqslant\mu}(\widehat{g}(\tau,\eta) - (\mu-\eta)A(t,\tau)). \tag{6.4}$$

Пусть $D(t) \leqslant \mu < \widehat{\nu}(t)$. Тогда, используя неравенство $\widehat{\nu}(t) \leqslant \widehat{\nu}(\tau)$ и формулы (3.11) и (4.15), получим, что

$$L = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - m(t)(\mu - D(\tau)). \tag{6.5}$$

Если $L \leqslant 0$, то $C = 0$. Тогда $f(0, B(t,\tau)) = 0$. Из формул (4.7) и (6.3) получим, что второе неравенство в (6.1) выполнено.

Если $L > 0$, то $C = L$. Из формул (4.7), (6.3) и (6.5) получим, что

$$\delta_t^\tau(\widehat{g}(\tau,\cdot))(\mu) = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - m(t)\left(\mu - D(\tau) - \frac{1}{m(t)}B(t,\tau)\right).$$

Отсюда и из неравенства (6.2) следует, что

$$\delta_t^\tau(\widehat{g}(\tau,\cdot))(\mu) \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} - m(t)(\mu - D(t)) = \widehat{g}(t,\mu).$$

Пусть $\widehat{\nu}(t) \leqslant \mu$. Тогда $\widehat{g}(t,\mu) = 0$. Поэтому второе неравенство в (6.1) выполнено, если выполнено равенство $\delta_t^\tau(\widehat{g}(\tau,\cdot))(\mu) = 0$. Из (6.3) и (6.4) следует, что это равенство выполнено при $L \leqslant 0$. Последнее неравенство выполнено, если существует $\eta_* \in [D(\tau), \mu]$ такое, что

$$\widehat{g}(\tau,\eta_*) - (\mu - \eta_*)A(t,\tau) \leqslant 0. \tag{6.6}$$

Пусть $\widehat{\nu}(t) \leqslant \mu < \widehat{\nu}(\tau)$. Из формулы (3.9) и из неравенства $\mu < \widehat{\nu}(\tau)$ следует, что

$$\mu < \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2m(r)} + D(r) \text{ при } \tau \leqslant r \leqslant q.$$

Далее,

$$\widehat{\nu}(t) = \min\left(\widehat{\nu}(\tau); \min_{t\leqslant r\leqslant\tau}\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2m(r)} + D(r)\right)\right) \leqslant \mu.$$

Следовательно, существует момент времени $t_* \in [t,\tau)$ такой, что

$$\mu \geqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2m(t_*)} + D(t_*) = \eta_*. \tag{6.7}$$

Случай 1. Пусть $m(t_*) = A(t_*, \tau)$. Поскольку $t \leqslant t_* < \tau$, то $D(\tau) \leqslant D(t_*) \leqslant D(t) \leqslant \mu$. Подставим в левую часть (6.6) $\eta_* = D(t_*)$ и получившееся значение обозначим N.

Если $D(t_*) \geqslant \widehat{\nu}(\tau)$, то из (3.11) получим, что $N = -(\mu - D(t_*))A(t, \tau) \leqslant 0$. Пусть $D(t_*) < \widehat{\nu}(\tau)$. Тогда

$$N = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - m(\tau)(D(t_*) - D(\tau)) - (\mu - D(t_*))A(t, \tau).$$

Отсюда, учитывая неравенства $A(t_*, \tau) \leqslant A(t, \tau)$ и (6.7), получим, что $N \leqslant -m(\tau)(D(t_*) - D(\tau)) \leqslant 0$.

Случай 2. Пусть $m(t_*) > A(t_*, \tau)$. Тогда $m(t_*) = m(\tau)$. Число η_* (6.7) удовлетворяет неравенству $\eta_* \geqslant D(\tau)$. Подставим это число η_* в выражение (6.6). Из формулы (3.11) получим, что

$$\widehat{g}(\tau, \eta_*) - (\mu - \eta_*)A(t, \tau) =$$

$$= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - m(\tau)\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(t_*)} + D(t_*) - D(\tau)\right) - \left(\mu - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(t_*)} - D(t_*)\right)A(t, \tau) =$$

$$= -m(\tau)\left(D(t_*) - D(\tau)\right) - \left(\mu - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(t_*)} - D(t_*)\right)A(t_*, \tau) \leqslant 0.$$

Здесь использованы неравенства $D(t_*) \geqslant D(\tau)$ и (6.7).

Пусть $\widehat{\nu}(\tau) \leqslant \mu$. Тогда при $\eta_* = \mu$ левая часть неравенства (6.6) равна нулю. □

Зафиксируем число $q_1 \leqslant t_0 < q$ и разбиение ω (2.1) с $p = q$. Обозначим

$$D_\omega(t_i) = \sum_{s=i}^{k} \frac{1}{m(t_s)} \int_{t_s}^{t_{s+1}} b(r)\, dr,$$

$$\widehat{\nu}_\omega(t_i) = \min\left(\nu(q); \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(t_k)}; \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(t_{k-1})} + D_\omega(t_k); \ldots; \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2m(t_i)} + D_\omega(t_{i+1})\right), \quad i = \overline{0, k},$$

$$\widehat{G}_\omega(t_i, \mu) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + m(t_i)(\mu - D_\omega(t_i)),$$

$$\widehat{g}_\omega(t_i, \mu) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - m(t_i)(\mu - D_\omega(t_i)) & \text{при} \quad 0 \leqslant \mu < \nu_\omega(t_i), \\ 0 & \text{при} \quad \mu \geqslant \nu_\omega(t_i). \end{cases}$$

Лемма 7. *Пусть $q_1 \leqslant t_0 < q$. Тогда для любого разбиения ω (2.1) с $p = q$ множество $T_\omega(W(q))$ имеет вид (4.1) с параметрами $l(\mu) = \widehat{g}_\omega(t_i, \mu)$, $L(\mu) = \widehat{G}_\omega(t_i, \mu)$, $\Lambda = [D_\omega(t_0), +\infty)$.*

Доказательство проводится индукцией по числу $i = \overline{0, k}$ по аналогии с доказательством леммы 2.

Лемма 8. *Пусть $q_1 \leqslant t_0 < q$ и $(z, \mu) \notin W(t_0)$. Тогда существует разбиение ω (2.1) с $p = q$, при котором $(z, \mu) \notin T_\omega(W(q))$.*

Доказательство следует из леммы 7 с использованием того факта, что

$$D_\omega(t_0) \to D(t_0), \quad \widehat{\nu}_\omega(t_0) \to \widehat{\nu}(t_0), \quad \widehat{G}_\omega(t_0) \to \widehat{G}(t_0), \quad \widehat{g}_\omega(t_0) \to \widehat{g}(t_0) \text{ при } \max_{0 \leqslant i \leqslant k}(t_{i+1} - t_i) \to 0.$$

Таким образом, из лемм 6–8 следует, что семейство множеств (3.12) при $q_1 \leqslant t \leqslant q$ является максимальным стабильным мостом, ведущим в момент времени q на множество $W(q)$. С учетом теоремы 1 получим утверждение теоремы 2.

§ 7. Доказательство теорем 3 и 4

Лемма 9. *При любых* $q_2 \leqslant t < \tau \leqslant q_1$ *выполнено равенство*

$$T_t^\tau(W(\tau)) = W(t). \tag{7.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По аналогии с доказательством теоремы 5 из определения оператора программного поглощения и из формул (3.16) получим, что $(z,\mu) \in T_t^\tau(W(\tau))$ тогда и только тогда, когда

$$\|z\| \leqslant \max_{D(q_1)\leqslant\eta\leqslant\mu}(G_1(\tau,\eta) + (\mu-\eta)A(t,\tau)) - \int_t^\tau b(r)\,dr.$$

Из формул (3.17) получим, что выражение, стоящее в правой части этого неравенства, равно $G_1(t,\mu)$. □

Из равенства (7.1) следует, что семейство множеств (3.15) при $q_2 \leqslant t \leqslant q_1$ является максимальным стабильным мостом, ведущим в момент времени q_1 на множество $W(q_1)$. С учетом теорем 1 и 2 получим утверждение теоремы 3.

Перейдем к доказательству теоремы 4. При $\tau \leqslant q_2$ и $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим множество

$$F(\tau,\alpha) = \{(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|z\| \leqslant m(\tau)(\mu-\alpha)\}. \tag{7.2}$$

Лемма 10. *При* $t < \tau$ *выполнено равенство*

$$T_t^\tau(F(\tau,\alpha)) = \{(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|z\| \leqslant m(t)(\mu-c)\}, \quad c = \alpha + \frac{1}{m(t)}\int_t^\tau b(r)\,dr. \tag{7.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (7.2) следует, что $(z,\mu) \in T_t^\tau(F(\tau,\alpha))$ тогда и только тогда, когда

$$\|z\| \leqslant \max_{0\leqslant\eta\leqslant\mu}(m(\tau)(\eta-\alpha) + (\mu-\eta)A(t,\tau)) - \int_t^\tau b(r)\,dr.$$

Отсюда следует формула (7.3). □

Лемма 11. *При любых* $t < \tau \leqslant q_2$ *выполнено включение* (5.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.18) и (3.19) следует, что множество $W(\tau)$ имеет вид (7.2) с $\alpha = D_*(\tau)$. Поэтому множество $T_t^\tau(W(\tau))$ определяется формулой (7.3) при

$$c = D_*(\tau) + \frac{1}{m(t)}\int_t^\tau b(r)\,dr \leqslant D_*(\tau) + \int_t^\tau \frac{b(r)}{m(r)}\,dr.$$

Здесь использовано неравенство $m(t) \geqslant m(r)$ при $t \leqslant r \leqslant \tau$. Используя формулы (3.8) и (3.19), получим, что $c \leqslant D(t)$. Отсюда получим требуемое включение (5.11). □

Лемма 12. *Пусть* $t_0 < q_2$*, а* ω *— разбиение* (2.1) *с* $p = q_2$*. Тогда*

$$T_\omega(W(q_2)) = \{(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \|z\| \leqslant m(t)(\mu - D_\omega(t_0))\},$$
$$D_\omega(t_i) = \sum_{s=i}^{k}\frac{1}{m(t_s)}\int_{t_s}^{t_{s+1}} b(r)\,dr + D(q_1). \tag{7.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (3.18) и (3.19) видно, что множество $W(q_2)$ имеет вид (7.2) при $\tau = q_2$, $\alpha = D(q_1)$. Поэтому, применяя лемму 10, получим формулу (7.4). □

Лемма 13. *Пусть* $t_0 < q_2$ *и* $(z,\mu) \notin W(t_0)$*. Тогда существует разбиение* ω (2.1) *с* $p = q_2$*, при котором* $(z,\mu) \notin T_\omega(W(q_2))$.

Доказательство следует из леммы 12 с использованием того факта, что $D_\omega(t_0) \to D_*(t_0)$ при $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k}(t_{i+1}-t_i) \to 0$.

Таким образом, из лемм 12 и 13 следует, что семейство множеств (3.16) при $t \leqslant q_2$ является максимальным стабильным мостом, ведущим в момент времени q_2 на множество $W(q_2)$. С учетом теорем 1, 2 и 3 получим утверждение теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 244–254.
3. Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2. № 5. С. 587–599.
5. Пожарицкий Г.К. Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 579–589.
6. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для дифференциальной игры сближения–уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 397–406.
7. Петров Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
8. Ухоботов В.И. Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38. Вып. 4. С. 590–598.
9. Ухоботов В.И. Об одном классе дифференциальных игр // Кибернетика. 1974. № 1. С. 127–130.
10. Ухоботов В.И. Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 355–362.
11. Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005. 124 с.
12. Ухоботов В.И., Зайцева О.В. Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 186–198.
13. Чикрий А.А., Матичин И.И., Чикрий К.А. Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 6. С. 15–29.
14. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
15. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
16. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
17. Ухоботов В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца // Некоторые задачи динамики и управления: сб. научных трудов. Челябинский государственный университет. Челябинск, 2005. С. 108–123.

Поступила в редакцию 28.04.2015

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: ukh@csu.ru

Изместьев Игорь Вячеславович, аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: j748e8@gmail.com

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest'ev

Single-type problem of pulse meeting in fixed time with terminal set in form of a ring

Keywords: pulse control, differential game, stable bridge.

MSC: 91A23, 49N75

We consider a linear differential game with the fixed end time p. Attainability domains of players are n-dimensional balls. The terminal set of a game is determined by a condition for assigning the norm of a phase vector to a segment with positive ends. A set defined by this condition is named in the article as ring. The fact that the terminal set is not convex required an additional theory allowing us to calculate Minkowski sum and difference for a ring and a ball in n-dimensional space.

Control of the first player has a pulse constraint. Abilities of the first player are determined by the stock of resources that can be used by the player at formation of his control. At certain moments of time the separation of a part of the resources stock is possible, which may implicate an "instantaneous" change of a phase vector, thereby complicating the problem. Control of the second player has geometrical constraints.

The aim of the first player is to lead a phase vector to the terminal set at fixed time. The aim of the second player is opposite.

The maximal stable bridge leading at fixed time to the terminal set has been constructed. A stable bridge is determined by the functions of internal and external radii, which are calculated explicitly.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.
2. Krasovskii N.N. On a problem of tracking, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 27, no. 2, pp. 363–377.
3. Krasovskii N.N., Repin Yu.M., Tret'yakov V.E. Some game situations in theory of control systems, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1965, no. 4, pp. 3–23 (in Russian).
4. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. To problem about pursuit in case of constraints on pulses of control forces, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 5, pp. 587–599 (in Russian).
5. Pozharitskii G.K. Game problem of impulse encounter with an opponent limited in energy, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, no. 4, pp. 555–565.
6. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter–evasion differential game with constraints on the momenta of the players' controls, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 376–385.
7. Petrov N.N. A problem of group pursuit in the class of impulse strategies of pursuers, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 2, pp. 199–205.
8. Ukhobotov V.I. On a class of linear differential games with impulse controls, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1974, vol. 38, no. 4, pp. 550–557.
9. Ukhobotov V.I. About one class of linear differential games, *Kibernetika*, 1974, no. 1, pp. 127–130 (in Russian).
10. Ukhobotov V.I. A linear differential game with constraints imposed on the control impulses, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 52, no. 3, pp. 277–283.
11. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* (Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints), Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2005, 124 p.
12. Ukhobotov V.I., Zaitseva O.V. A linear problem of pulse encounter at a given time under interference, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 215–228.
13. Chikrii A.A., Matichin I.I., Chikrii K.A. Conflict control processes with discontinuous trajectories, *Kibernetika i sistemnyi analiz*, 2004, no. 6, pp. 15–29 (in Russian).
14. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
15. Pontryagin L.S. Linear differential games, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 910–912.
16. Pshenichnyi B.N., Sagaidak M.I. About differential games with fixed time, *Kibernetika*, 1970, no. 2, pp. 54–63 (in Russian).
17. Ukhobotov V.I. Single-type differential game with terminal set in form of a ring, *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya: sbornik nauchnykh trudov* (Some problems of dynamic and control: Transactions), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 2005, pp. 108–123 (in Russian).

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 2

Received 28.04.2015

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: ukh@csu.ru

Izmest'ev Igor' Vyacheslavovich, Post-Graduate Student, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: j748e8@gmail.com