

УДК 512.77, 517.912

© С. В. Соколов, И. С. Кольцов

## ХАОТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ ТОЧЕЧНОГО ВИХРЯ КРУГОВЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ, ДВИЖУЩИМСЯ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

В статье рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести твердого тела, обладающего формой кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. В отличие от предыдущих работ в данном случае циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается равной нулю. Уравнения движения системы представлены в гамильтоновой форме. Указаны первые интегралы системы — горизонтальная и вертикальная компоненты импульса, — последний из которых, очевидно, неавтономный. Используя автономный интеграл, проведена редукция системы на одну степень свободы в ранее не рассматриваемом случае нулевой циркуляции. Показано, что в отличие от случая циркуляционного обтекания в отсутствие точечных вихрей, в котором движение цилиндра будет происходить в ограниченной горизонтальной полосе, при наличии вихрей и циркуляции, равной нулю, вертикальная координата цилиндра неограниченно убывает. Дальнейшее внимание в работе сконцентрировано на численном исследовании динамики системы, которая при нулевой циркуляции обладает некомпактными траекториями. Построены различные виды функций рассеяния вихря на цилиндре. Вид этих функций свидетельствует о хаотическом характере рассеяния и, следовательно, об отсутствии дополнительного аналитического интеграла.

*Ключевые слова:* точечные вихри, твердое тело, хаотическое рассеяние, гамильтоновы системы, редукция.

### § 1. Введение

Задача о падении твердого тела в жидкости является одной из фундаментальных проблем, рассматривалась как в классических работах [1–3], так и в современных, например [4–6]. Некоторые физические феномены (авторотация твердого тела) можно описать, только находясь в рамках модели вязкой жидкости, и, следовательно, их строгое рассмотрение должно опираться на уравнение Навье–Стокса с граничными условиями на подвижных границах. Решение таких задач обычно получают численно, а верификация полученных результатов возможна только при сравнении с данными экспериментов.

Падение тела в вязкой среде сопровождается сопротивлением движению, которое обусловлено, с одной стороны, внутренним трением жидкости, а с другой — потерями энергии на генерацию вихрей. В качестве первого приближения обычно рассматривают вместо схода вихрей в вязкой жидкости движение тела в идеальной жидкости, в которой существует завихренность.

Завихренность может учитываться, как, например, в работах [5, 7–9], посредством отличной от нуля циркуляции при обтекании тела. Дальнейшим развитием является задача о движении тела при наличии точечных вихрей, гамильтонов формализм для которых первоначально был развит уже Кирхгофом [10], а в работах [11–14] этот формализм был распространен на случай движения цилиндрического твердого тела и точечных вихрей в отсутствие тяжести.

Далее в 60-х годах XX века была предложена модель Брауна–Майкла (Brown–Michael), где сход вихрей с острой кромки тела постулируется, а их интенсивность меняется со временем. Движение тела и вихрей исследуется с помощью модели Брауна–Майкла, например, в работе [15]. Наконец, в отличие от точечных вихрей падение тела в присутствии распределенной завихренности («вихревая пелена») изучено в работе [16].

Отметим в заключение работы [17, 18], где рассмотрено движение вихря в предположении поступательного движения цилиндра, а также исследована возможность хаотических режимов движения вихря при возмущении движения цилиндра.

В работах [19–23] исследуется движение твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра, под действием силы тяжести в безграничном объеме идеальной жидкости в присутствии точечных вихрей и отличной от нуля циркуляции. Первоначально в [19, 20] результаты [11, 12] были развиты в случае движения тела и одного точечного вихря в поле силы тяжести. В работах [21, 22] было получено обобщение на случай  $N$  вихрей. Наконец, в [23] была рассмотрена система цилиндра и двух вихрей, аналогичная по конфигурации решению Фёппля [24], но находящаяся в поле силы тяжести. В данной работе, как и в [19, 20], влияние завихренности на падение тела в жидкости рассмотрено на примере простейшей задачи о движении массивного цилиндра и вихря в поле тяжести.

## § 2. Уравнения движения

Как и в работах [19, 20], исследуется движение твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра, под действием силы тяжести в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное движение и покоящейся на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны плоскости потока. В жидкости движется прямолинейная вихревая нить, параллельная образующим цилиндра, имеющая интенсивность  $\Gamma_1$ . В силу очевидной симметрии системы относительно перемещения вдоль образующих цилиндра рассматривается плоская задача.

В отличие от предыдущих исследований [19–22] рассматривается такое обтекание цилиндра жидкостью, при котором циркуляция  $\Gamma = 0$  (рис. 1). Требуется качественно исследовать движение системы.

Кратко напомним, что в работе [19] приведены уравнения движения в поле силы тяжести в идеальной жидкости цилиндра и точечного вихря, которые имеют гамильтонову форму для случая произвольной циркуляции. Далее там же указаны первые интегралы, с помощью одного из которых была проведена редукция системы. Единственным ограничением, принятым в вышеуказанной работе, было предположение отличной от нуля циркуляции. При занулении циркуляции понижение порядка изложенным в данной статье способом оказывалось невозможным.

Рассмотрим случай циркуляции, равной нулю. Следуя обозначениям, принятым в [19], полагая  $\Gamma = 0$ , уравнения движения цилиндра и точечного вихря в поле силы тяжести получаем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}, \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= -\lambda_1(\tilde{y}_1 - \dot{y}_1), \\ a\dot{v}_2 &= \lambda_1(\tilde{x}_1 - \dot{x}_1) - ag, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$  — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат  $Oxy$ ;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — скорость цилиндра;  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$  — вектор, соединяющий центр цилиндра с вихрем;  $\tilde{\mathbf{r}}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = R^2\mathbf{r}_1/r_1^2$  — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом вихря (рис. 1);  $R$  — радиус цилиндра;  $a$  — константа, включающая массу и присоединенную массу цилиндра;  $ag$  — величина силы тяжести, действующей на цилиндр;  $\lambda$  и  $\lambda_1$  — постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью вихря соотношениями  $\lambda = \Gamma/(2\pi)$ ,  $\lambda_1 = \Gamma_1/(2\pi)$ . Плотность жидкости полагается равной  $2\pi$ . Функция  $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$  является потенциалом течения  $\varphi(\mathbf{r})$  идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \lambda_1 \left( \text{arctg} \left( \frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \text{arctg} \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \right).$$

Следуя рассуждениям, приведенным в [19], легко показать, что конечномерная система (2.1), описывающая движение цилиндра и вихря в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамильтоновой форме:

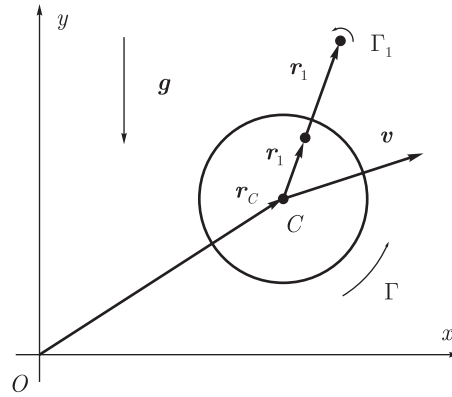


Рис. 1. Круговой цилиндр и точечный вихрь в поле силы тяжести

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k},$$

где  $\zeta_i$  — координаты фазового вектора системы (2.1):

$$\zeta = \{x_1, y_1, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

гамильтониан системы

$$H = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) + agy_c, \quad (2.2)$$

отличные от нуля компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры

$$\begin{aligned} \{v_1, x_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 - R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, & \{v_1, y_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, \\ \{v_2, x_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, & \{v_2, y_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 + R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, \\ \{v_1, v_2\} &= -\frac{\lambda_1 r_1^4 - R^4}{a^2 r_1^4}, & \{x_1, y_1\} &= -\frac{1}{\lambda_1}, & \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

### § 3. Первые интегралы и редукция

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы, что приводит к несохранению соответствующего интеграла момента. Тем не менее у системы существует два первых интеграла, отвечающих трансляциям, — автономный интеграл  $P$ , соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл  $Q$ , соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned} Q &= a(v_2 + gt) - \lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1), \\ P &= av_1 + \lambda_1(\tilde{y}_1 - y_1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя автономный интеграл  $P$ , можно понизить порядок исходной системы (2.1), обладающей тремя степенями свободы, на одну степень.

Рассмотрим систему на поверхности уровня интеграла  $P$ . Для этого положим  $P = p$  в выражении (3.1), где константа  $p$  определяется начальными данными. Тогда, выразив из полученного равенства  $v_1$ , подставим в первое из уравнений (2.1) и гамильтониан (2.2). Исключив

из (2.1) уравнения на  $v_1$  и  $x_c$ , получим редуцированную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\lambda_1}{a}(\tilde{y}_1 - y_1) - \frac{p}{a} + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right|_{r=r_1}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right|_{r=r_1}, \\ a\dot{v}_2 &= \lambda_1(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag, \\ \dot{y}_c &= v_2.\end{aligned}$$

с гамильтонианом

$$H_c = \frac{1}{2}a \left( v_2^2 + \left( \frac{p}{a} - \frac{\lambda_1}{a}(\tilde{y}_1 - y_1) \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) + agy_c$$

и пуассоновой структурой, определяемой компонентами структурного тензора, получаемого из (2.3) вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих переменным  $v_1$  и  $x_c$ .

Отметим, что на поверхности уровня интеграла  $P$  уравнение для  $v_1$  системы (2.1) превращается в тождество.

#### § 4. Классификация возможных движений

В общем случае циркуляции, отличной от нуля [19], найдены частные решения, позволяющие сказать, что существует три возможных типа движений системы «цилиндр–вихрь» (рис. 2):

- (1) цилиндр и вихрь движутся вместе в ограниченной полосе изменений координаты  $y$  (рис. 2, *a*);
- (2) цилиндр «покидает» вихрь и движется в ограниченной полосе изменений координаты  $y$  (рис. 2, *b*);
- (3) цилиндр «покидает» вихрь и движется в направлении действия силы тяжести (рис. 2, *c*).

По поводу приведенной классификации стоит отметить, что в системе наблюдаются движения с захватом вихря цилиндром, аналогичные описанным в работе [17], а также движения в ограниченной полосе, аналогичные описанным в работах [8, 9].

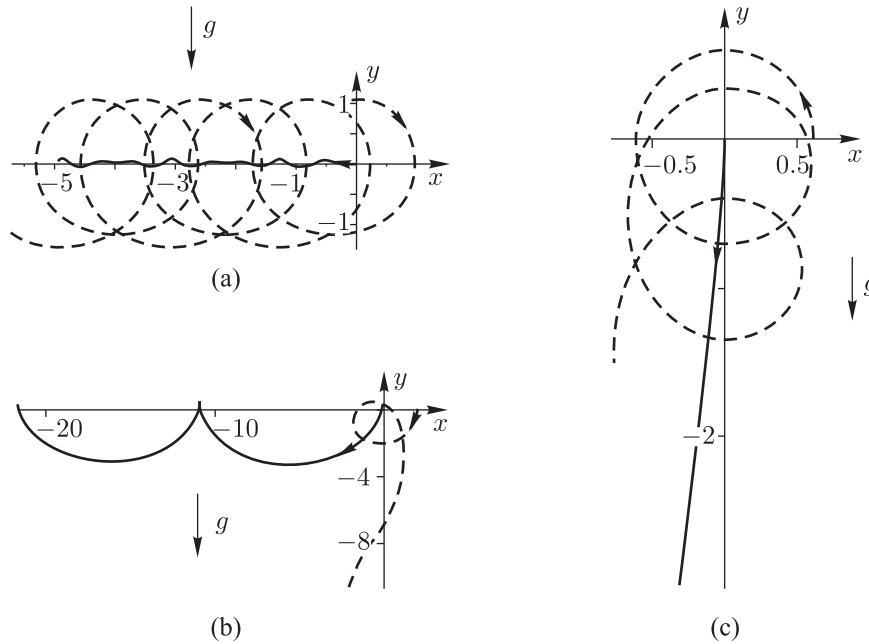
Отметим, что в рассматриваемом в данной работе случае  $\lambda = 0$  можно доказать утверждение относительно характера движения системы в одном частном случае:

**Предложение 1.** *Если вихрь бесконечно удаляется от цилиндра, то дальнейшее движение цилиндра происходит при неограниченном убывании функции  $y_c(t)$ , то есть цилиндр «тонет».*

**Доказательство.** Предположим, что цилиндр «отрывается» от вихря. Тогда второе слагаемое в гамильтониане (2.2) неограниченно возрастает, при этом первое слагаемое, очевидно, неотрицательно. Из сохранения интеграла энергии с необходимостью следует утверждение о неограниченном убывании функции  $y_c(t)$ .  $\square$

#### § 5. Хаотическое рассеяние

В одной из пионерских работ [25] рассмотрена задача рассеяния двух составных объектов на примере рассеяния вихревых пар. Там же авторами описано свойство стохастичности двухчастичного рассеяния в случае наличия у «частиц» внутренней структуры. Дальнейшее развитие идей хаотического рассеяния вихревых систем можно найти, например, в работах [18, 26]. Основные результаты в вышеуказанных работах были приведены в виде функций рассеяния: зависимостей угла между скоростями разлетающихся вихревых пар от прицельного параметра, а также зависимостей времени прохождения пары некоей актуальной зоны взаимодействия от прицельного параметра.



**Рис. 2.** Движение цилиндра (сплошная линия) и вихря (пунктир) в поле силы тяжести: (а) вихрь захвачен цилиндром, они движутся в ограниченной горизонтальной полосе; (б) цилиндр, покинув вихрь, движется в ограниченной горизонтальной полосе; (с) цилиндр, покинув вихрь, движется вниз

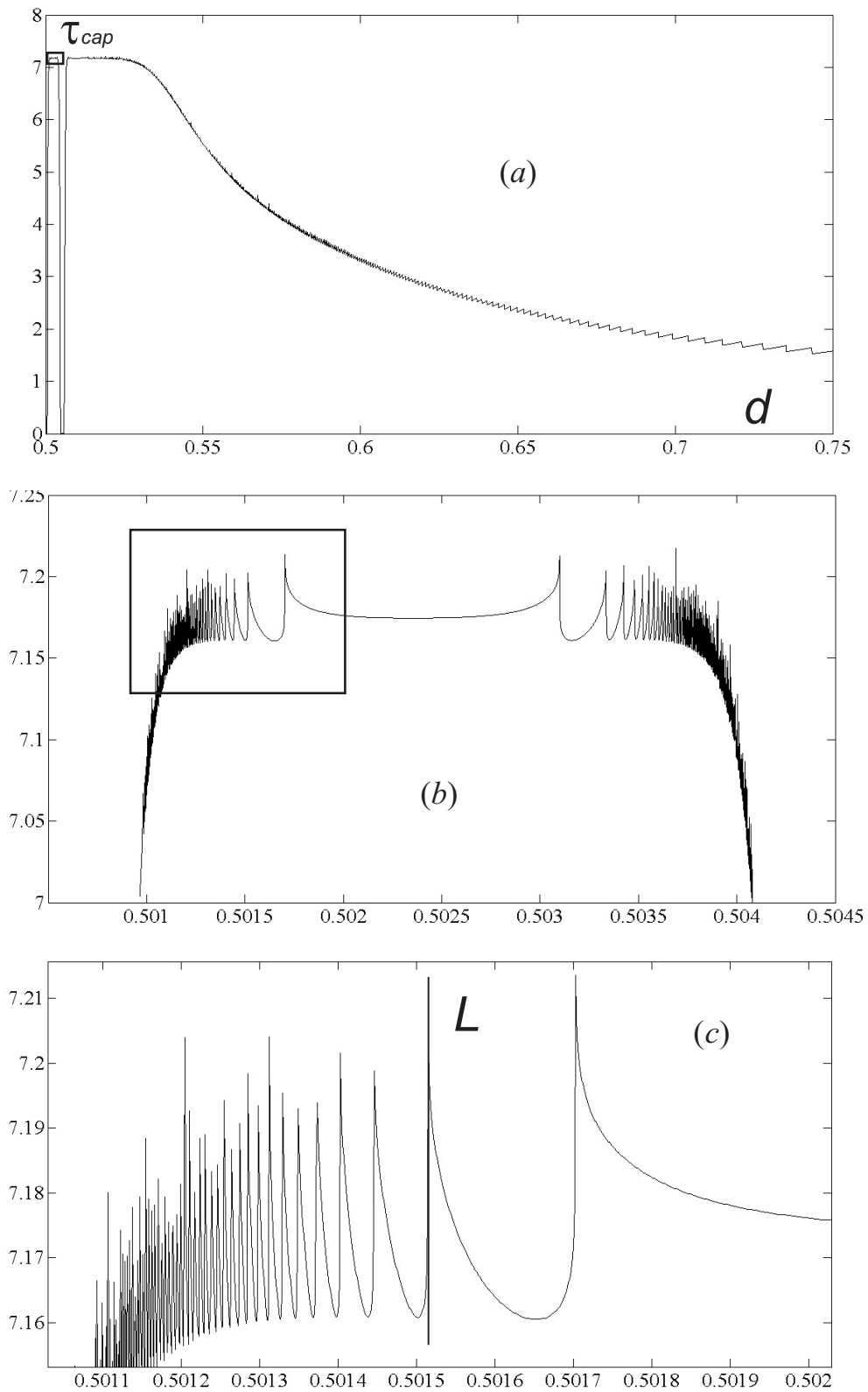
Во всех работах [18, 25, 26] применение функции рассеяния для исследования динамики системы вихрей обусловлено невозможностью построения сечения Пуанкаре вследствие некомпактности траекторий системы, принадлежащих поверхностям уровня гамильтониана.

В нашей задаче построение функции рассеяния в том же виде, что и в только что упомянутых работах, не представляется возможным. Это связано с тем, что в отличие от вихревой пары, которая в отсутствие внешних воздействий обладает возможностью двигаться в жидкости с постоянной скоростью и, следовательно, допускает, как и в случае рассеяния частиц, классическую постановку задачи рассеяния двух таких пар, в ситуации уединенного вихря его самопродвижение в жидкости невозможно. Как только вихрь удаляется на значительное расстояние от цилиндра и, следовательно, от находящегося внутри границ тела инверсного образа, с которым он взаимодействует, вихрь практически перестает перемещаться.

В связи с этим для анализа динамики системы «цилиндр–вихрь» мы предлагаем применить функцию рассеяния, модифицированную следующим образом: пусть фиксированы начальное положение и скорость цилиндра, а начальное положение вихря относительно цилиндра изменяется. При исследовании динамики такой системы было обнаружено, что вихрь отрывается от цилиндра спустя различное количество времени, совершив то или иное количество оборотов вокруг движущегося цилиндра. Тогда можно исследовать зависимость времени  $\tau_{cap}$ , которое вихрь находится в окрестности цилиндра, не удаляясь от него, (времени захвата) как функцию начального расстояния  $d$  вихря от цилиндра. Начальное расстояние является в определенном смысле аналогом введенного в работах [18, 25, 26] прицельного параметра.

Зависимость времени захвата — времени жизни связанного состояния цилиндра и вихря — от начального расстояния имеет вид, приведенный на рисунке 3. Для построения приведенного на рисунке 3 графика для каждого значения  $d \in (0.5, 0.75)$  с шагом 0.001 вычислялось время (с точностью 0.00001), спустя которое расстояние между центром цилиндра и вихрем станет больше, чем  $1.5d$ . График построен для следующего набора параметров:  $y_1 = 0$ ,  $x_1 = d$ ,  $a = 10$ ,  $R = 0.5$ ,  $g = 10$ ,  $\lambda_1 = 20$ . Как видно, зависимость имеет нерегулярный характер, что особенно заметно при начальных положениях вихря вблизи поверхности цилиндра.

Чтобы проиллюстрировать фрактальный характер зависимости  $\tau_{cap}(d)$ , общий вид которой



**Рис. 3.** Функция рассеяния: зависимость времени захвата цилиндром вихря от начального расстояния вихря до центра цилиндра: (a) общий вид; (b) увеличенный фрагмент рисунка (a), выделенного прямоугольником; (c) детальное изображение фрагмента, выделенного на рисунке (b)

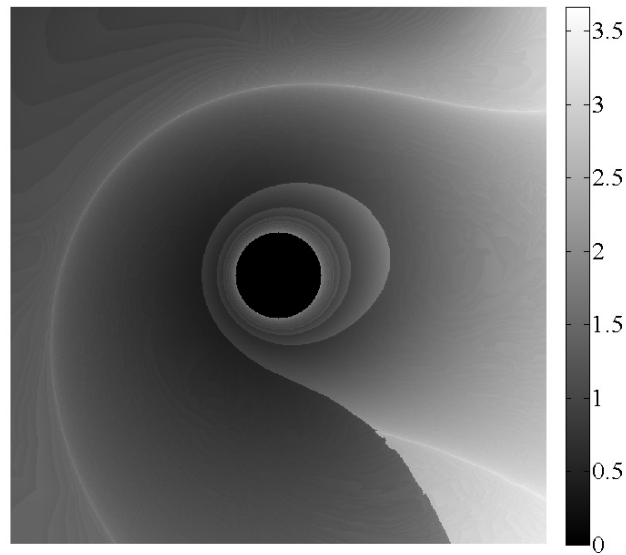


Рис. 4. Зависимость времени захвата цилиндром вихря от начальных координат вихря относительно цилиндра

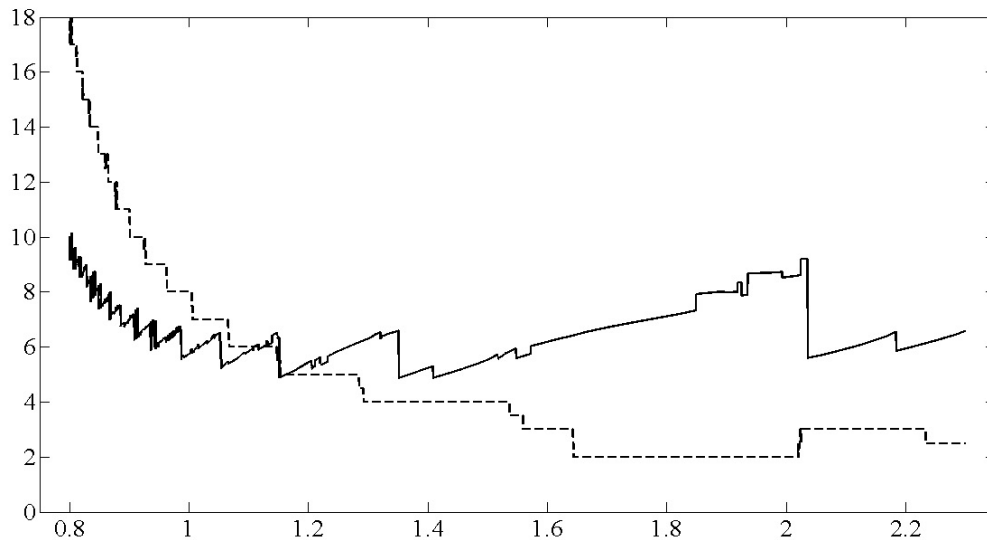
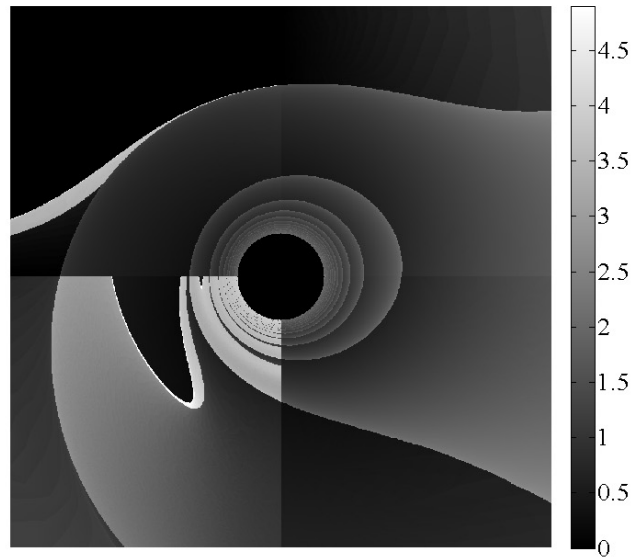


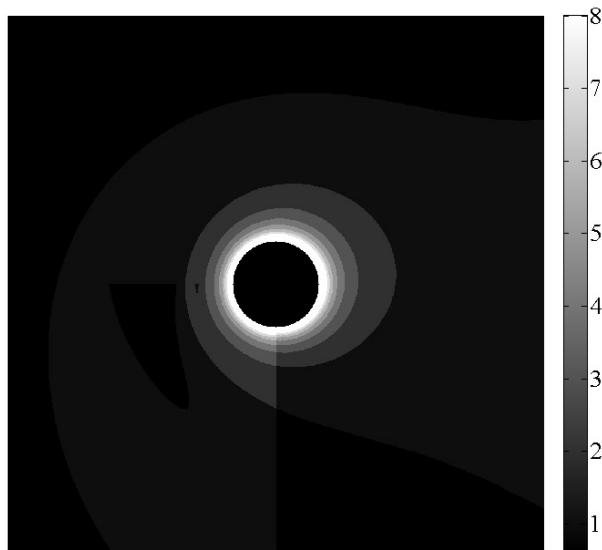
Рис. 5. Зависимости времени захвата и количества оборотов от прицельного параметра. Сплошной линией обозначено  $\tau_{cap}(x_1, 0)$ , пунктирной — количество оборотов  $n(x_1, 0)$ , совершаемых вихрем до отрыва от цилиндра

изображен на рисунке 3, *a*, мы приводим на рисунках 3, *b* и 3, *c* последовательно увеличенные изображения фрагмента, выделенного прямоугольной границей на исходной зависимости.

Отметим, что одним из проявлений сложной динамики рассматриваемой системы служит интервал  $d \in (0.50482, 0.50598)$ , где  $\tau_{cap} = 0$ . Другая особенность, которую необходимо отметить, — это наличие мелкомасштабных скачкообразных изменений времени захвата на фоне плавного убывания, которое обусловлено уменьшением интенсивности взаимодействия вихря



**Рис. 6.** Зависимость времени захвата  $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$  от координат начального положения вихря относительно цилиндра

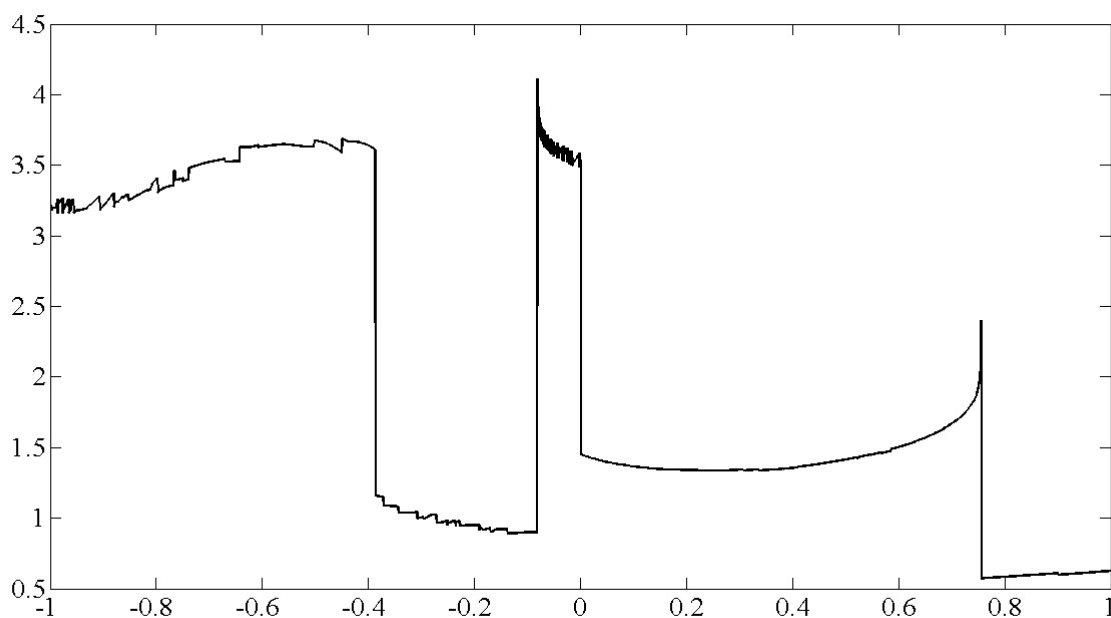


**Рис. 7.** Зависимость количества оборотов  $n(x_1, y_1)$  от координат начального положения вихря относительно цилиндра

и образа при увеличении расстояния между ними.

Наконец, при увеличении масштаба (рис. 3, *c*) отчетливо видно наличие особенностей функции  $\tau_{cap}(d)$ , которые имеют характер полюсов рассеяния. Пример асимптотического поведения времени захвата показан с помощью вертикальной прямой  $L$ , к которой, судя по данным численных экспериментов, зависимость времени захвата стремится экспоненциально. Особенности





**Рис. 8.** Зависимость времени захвата  $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$  при  $y_1 = -1.5$ ,  $x_1 \in (-1, 1)$  с шагом 0.0001

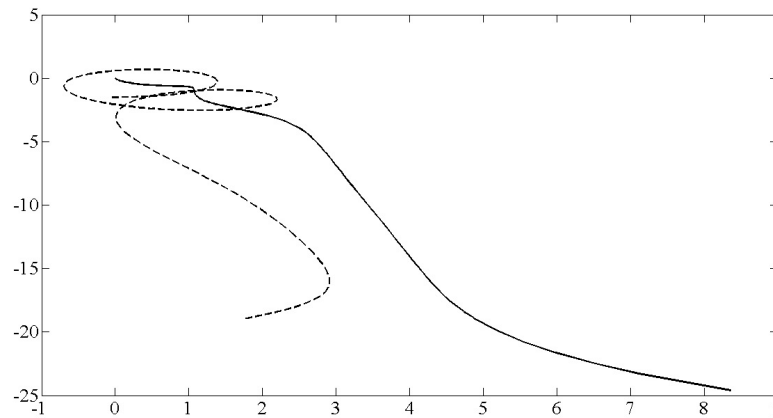
функции рассеяния сгущаются на наклонных участках.

Чтобы описать детально характер зависимости времени захвата цилиндра вихрем от взаимного расположения вихря и цилиндра, а также учесть влияние на вид функции рассеяния гравитационного поля, можно рассмотреть функцию  $\tau_{cap}(x_1, y_1)$ , где  $(x_1, y_1)$  — координаты вихря относительно центра цилиндра. Внешний вид подобной функции показан на рисунке 4. Начальные координаты вихря  $x_1 \in (-5, 5)$ ,  $y_1 \in (-5, 5)$ , пространственное разрешение по  $x_1$  и  $y_1$  равно 0.01, время анализа  $t \in (0, 20)$ , шаг по времени 0.000001, для численного интегрирования системы использован метод Дорманда–Принса. Черный круг в центре рисунка обозначает местонахождение цилиндра и его 0.3-окрестность. Оттенки белого на рисунке распределены по продолжительности времени захвата — чем больше время жизни связанного состояния, тем светлее оттенок. Черный обозначает нулевое время захвата, белый — захват продолжительностью не менее 3.5 (в исследуемой области  $\tau_{cap}$  не превысило 3.667).

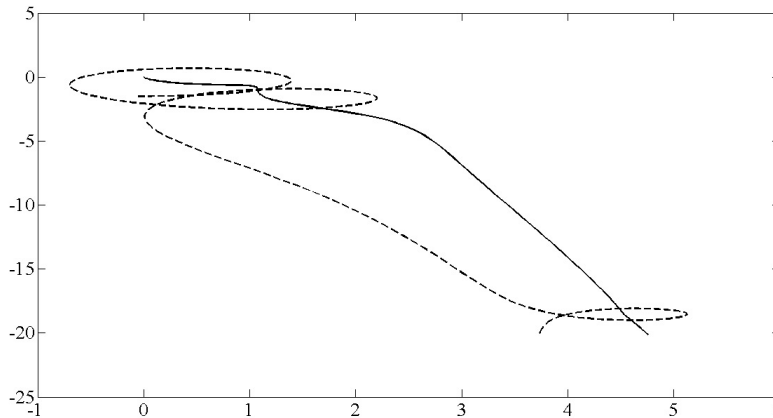
В процессе исследований была выдвинута гипотеза о связанности осцилляций функции  $\tau_{cap}(d)$  с увеличением количества оборотов, совершаемых вихрем вокруг цилиндра (в системе координат, связанной с цилиндром), однако результаты экспериментов, один из которых приведен на рисунке 5, не подтвердили данной гипотезы — время захвата испытывает скачки даже при неизменном количестве оборотов. Отметим, что для того, чтобы изобразить обе функции в одном диапазоне изменения, значение функции  $\tau_{cap}(d)$  было умножено на 5.

Для отображения одновременно времени захвата и количества оборотов, совершаемых вихрем вокруг цилиндра, можно рассмотреть еще одну разновидность функции рассеяния. Пусть под «временем захвата»  $\tilde{\tau}_{cap}$  понимается время от начала движения и до момента, когда расстояние между цилиндром и вихрем становится в среднем неубывающей функцией времени. Условие неубывания в среднем является необходимым, поскольку даже при сравнительно большом удалении вихря от цилиндра цилиндр может совершать вертикальные колебания, пересекая горизонтальную прямую, проведенную через вихрь. В таком случае расстояние между цилиндром и вихрем может незначительно убывать, однако будет неубывающим в среднем.

На рисунке 6 представлен вид функции  $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$ , полученной с теми же условиями, что были при построении  $\tau_{cap}(x_1, y_1)$  на рисунке 4. На рисунке 7 приведена зависимость количества



**Рис. 9.** Траектории цилиндра и вихря, соответствующие точке 1 на графике 8 ( $x_1 = -0.0808$ ).  
Сплошной линией обозначена траектория цилиндра, пунктирной — вихря



**Рис. 10.** Траектории цилиндра и вихря, соответствующие точке 2 на графике 8 ( $x_1 = -0.0807$ ).  
Сплошной линией обозначена траектория цилиндра, пунктирной — вихря

оборотов  $n(x_1, y_1)$  вихря вокруг цилиндра в зависимости от начальных координат вихря, вычисленная при аналогичных условиях. Стоит отметить, что все из перечисленных зависимостей (рис. 4, 6, 7) обладают явной асимметрией. Очевидно, это связано с выбором определенного знака интенсивности вихря.

Отображение зависимости  $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$  на рисунке 6 обладает достаточно низким разрешением по координатам. Для детального представления характера зависимости времени захвата от прицельного параметра рассмотрим фрагмент рисунка 6 при  $y_1 = -1.5$ ,  $x_1 \in (-1, 1)$ , с шагом по  $x_1$ , равным 0.0001. На рисунке 8 представлен график времени захвата в зависимости от  $x_1$ . Данные значения  $x_1$  и  $y_1$  были выбраны, поскольку цилиндр под действием силы тяжести «падает» на вихрь, что приближает рассмотрение к классической постановке задачи рассеяния.

На рисунке 8 видно, что время захвата для точки 1 существенно меньше, чем для точки 2, несмотря на их близость (в точке 1 координата  $x_1 = -0.0808$ , а в точке 2 соответственно  $x_1 = -0.0807$ ). Это обуславливается тем, что в точке 1 (рис. 9) цилиндр и вихрь после вращения некоторое время движутся вместе, а затем «разлетаются», тогда как в точке 2 цилиндр и вихрь после вращения движутся параллельно, а затем снова сближаются и совершают еще один виток (рис. 10). Время движения вдоль траекторий на рисунках 9 и 10 одинаково и равно 2.5.

Как и в работах [18, 25, 26], опираясь на вышеперечисленные свойства функции рассеяния, мы можем сделать заключение о нерегулярном характере рассеяния и, видимо, об отсутствии дополнительного аналитического интеграла.

## § 6. Заключение

В данной работе рассмотрена задача о падении в поле тяжести в идеальной жидкости массивного кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в частном случае нулевой циркуляции. Показано, что в отличие от случая циркуляционного обтекания в отсутствие точечных вихрей, при наличии вихрей и  $\Gamma = 0$  цилиндр «тонет».

Исследована задача рассеяния вихря на цилиндре. Вид полученной функции рассеяния свидетельствует о хаотическом характере процесса рассеяния.

Авторы выражают благодарность за плодотворные обсуждения А. В. Борисову и И. С. Мамаеву.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maxwell J.K. On a particular case of descent of a heavy body in a resisting medium // Camb. and Dubl. Math. Journ. 1854. Vol. 9. P. 145–148.
2. Жуковский Н.Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья первая // Собр. соч.: В 7 т. М.–Л., 1937. Т. 5. С. 72–80.
3. Жуковский Н.Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья вторая // Собр. соч.: В 7 т. М.–Л., 1937. Т. 5. С. 100–115.
4. Козлов В.В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. Математика. Механика. 1990. № 1. С. 79–86.
5. Borisov A.V., Mamaev I.S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos. 2006. Vol. 16. Issue 1. 013118.
6. Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S. Asymptotic stability and associated problems of falling rigid body // Regular and Chaotic Dynamics. 2007. Vol. 12. № 5. P. 531–565.
7. Чаплыгин С.А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло // Полн. собр. соч. Т. 3. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 3–64.
8. Козлов В.В. О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 113–117.
9. Рамоданов С.М. О влиянии циркуляции на характер падения тяжелого твердого тела в жидкости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 5. С. 19–24.
10. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962.
11. Borisov A.V., Mamaev I.S. An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. Vol. 8. № 2. P. 163–166.
12. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices // Discrete and Contin. Dyn. Syst. B. 2005. Vol. 5. № 1. P. 35–50.
13. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamic interaction of point vortices and a two-dimensional cylinder // J. Math. Phys. 2007. Vol. 48. № 6. 065403.
14. Shashikanth B.N. Poisson brackets for the dynamically interacting system of a 2D rigid cylinder and  $N$  point vortices: the case of arbitrary smooth cylinder shapes // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10. № 1. P. 1–14.
15. Michelin S., Smith S.G.L. Falling cards and flapping flags: understanding fluid-solid interaction using an unsteady point vortex model // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2010. Vol. 24. P. 195–200.
16. Jones M.A., Shelly M.J. Falling cards // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 540. P. 393–425.
17. Kadtke J.B., Novikov E.A. Chaotic capture of vortices by a moving body. I. The single point vortex case // Chaos. 1993. Vol. 3. № 4. P. 543–553.
18. Luithardt H.H., Kadtke J.B., Pedrizzetti G. Chaotic capture of vortices by a moving body. II. Bound pair model // Chaos. 1994. Vol. 4. № 4. P. 681–691.
19. Соколов С.В., Рамоданов С.М. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с точечным вихрем, в поле силы тяжести // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 617–628.
20. Sokolov S.V., Ramodanov S.M. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18. № 1–2. P. 184–193.

21. Соколов С.В. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с  $N$  точечными вихрями, в поле силы тяжести // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10. № 1. С. 1–14.
22. Sokolov S.V. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices // *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*. 2014. Vol. 2. № 1. P. 99–113.
23. Соколов С.В. Движение кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой парой, в поле силы тяжести в идеальной жидкости // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2014. № 2. С. 86–99.
24. Föppl L. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder // *Sitzungsberichte der Baäyrischen Akademie der Wissenschaften*. 1913.
25. Манаков С.В., Щур Л.Н. Стохастичность в двухчастичном рассеянии // *Письма в ЖЭТФ*. 1983. Т. 37. № 1. С. 45–48.
26. Tophøj L., Aref H. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs revisited // *Phys. of Fluids*. 2008. Vol. 20. 093605.

Поступила в редакцию 02.04.2015

Соколов Сергей Викторович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4.  
E-mail: sokolovsv72@mail.ru

Кольцов Иван Сергеевич, младший научный сотрудник, Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 101990, Россия, г. Москва, Малый Харитоньевский пер., 4.  
E-mail: ivankolt@gmail.com

*S. V. Sokolov, I. S. Koltsov*

### Chaotic scattering of the point vortex by falling circular cylinder

*Keywords:* point vortices, rigid body, chaotic scattering, Hamiltonian systems, reduction.

MSC: 70Hxx, 70G65

We consider a system which consists of a circular cylinder subject to gravity interacting with a point vortex in a perfect fluid. In contrast to previous works, in this paper the circulation about the cylinder is assumed to be zero. The governing equations are Hamiltonian and admit evident integrals of motion: the horizontal and vertical components of the momentum; the latter is obviously non-autonomous. Using autonomous integral we reduce the order of the system by one degree of freedom in a case of zero circulation which early was not considered. Unlike nonzero circulation in the absence of point vortices when the cylinder moves inside a certain horizontal stripe it is shown that in the presence of vortices and with circulation equal to zero a vertical coordinate of the cylinder is unbounded decreasing. We then focus on the numerical study of dynamics of our system. In a case of zero circulation trajectories are noncompact. The different kinds of the scattering function of the vortex by cylinder were obtained. The form of these functions argues to chaotic behavior of the scattering which means that an additional analytical integral is absent.

### REFERENCES

1. Maxwell J.K. On a particular case of descent of a heavy body in a resisting medium, *Camb. and Dubl. Math. Journ.*, 1854, vol. 9, pp. 145–148.
2. Zhukovski N.E. On light elongated bodies that fall in the air while rotating around the longitudinal axis: I, *Complete Works in 7 vol.*, Moscow–Leningrad: Glav. Red. Aviats. Lit., 1937, vol. 5, pp. 72–80 (in Russian).
3. Zhukovski N.E. On light elongated bodies that fall in the air while rotating around the longitudinal axis: II, *Complete Works in 7 vol.*, Moscow–Leningrad: Glav. Red. Aviats. Lit., 1937, vol. 5, pp. 100–115 (in Russian).
4. Kozlov V.V. On the problem of a heavy rigid body falling in a resistant medium, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. Mat. Mekh.*, 1990, no. 1, pp. 79–86 (in Russian).

5. Borisov A.V., Mamaev I.S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation, *Chaos*, 2006, vol. 16, no. 1, 013118.
6. Borisov A.V., Kozlov V.V., Mamaev I.S. Asymptotic stability and associated problems of falling rigid body, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2007, vol. 12, no. 5, p. 531–565.
7. Chaplygin S.A. On the effect of a plane-parallel air flow on a cylindrical wing moving in it, *Complete Works: Vol. 3*, Leningrad: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1933, pp. 3–64 (in Russian).
8. Kozlov V.V. On a heavy cylindrical body falling in a fluid, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 1993, no. 4, pp. 113–117 (in Russian).
9. Ramodanov S.M. The effect of circulation on the fall of a heavy rigid body, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 1996, no. 5, pp. 19–24 (in Russian).
10. Kirchhoff G.R. *Vorlesungen über mathematische physik*, Teubner, Leipzig, 1876, vol. I.
11. Borisov A.V., Mamaev I.S. An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 2, pp. 163–166.
12. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices, *Discrete and Contin. Dyn. Syst. B*, 2005, vol. 5, no. 1, pp. 35–50.
13. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dynamic interaction of point vortices and a two-dimensional cylinder, *J. Math. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 6, 065403.
14. Shashikanth B.N. Poisson brackets for the dynamically interacting system of a 2D rigid cylinder and  $N$  point vortices: the case of arbitrary smooth cylinder shapes, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 1–14.
15. Michelin S., Smith S.G.L. Falling cards and flapping flags: understanding fluid-solid interaction using an unsteady point vortex model, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2010, vol. 24, pp. 195–200.
16. Jones M.A., Shelly M.J. Falling cards, *J. Fluid Mech.*, 2005, vol. 540, pp. 393–425.
17. Kadtke J.B., Novikov E.A. Chaotic capture of vortices by a moving body. I. The single point vortex case, *Chaos*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 543–553.
18. Luithardt H.H., Kadtke J.B., Pedrizzetti G. Chaotic capture of vortices by a moving body. II. Bound pair model, *Chaos*, 1994, vol. 4, no. 4, pp. 681–691.
19. Sokolov S.V., Ramodanov S.M. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex, *Nelineinaya dinamika*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 617–628 (in Russian).
20. Sokolov S.V., Ramodanov S.M. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 1–2, pp. 184–193.
21. Sokolov S.V. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Nelineinaya dinamika*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 1–14 (in Russian).
22. Sokolov S.V. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 99–113.
23. Sokolov S.V. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a vortex pair in a perfect fluid, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 2, pp. 86–99 (in Russian).
24. Föppl L. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder, *Sitzungsberichte der Bäuyrischen Akademie der Wissenschaften*, 1913.
25. Manakov S.V., Shchur L.N. Stochastic aspect of two-particle scattering, *JETP Lett.*, 1983, vol. 37, no. 1, pp. 54–57.
26. Tophøj L., Aref H. Chaotic scattering of two identical point vortex pairs revisited, *Phys. of Fluids*, 2008, vol. 20, 093605.

Received 02.04.2015

Sokolov Sergei Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Machines Science named after A. A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Malyy Khariton'evskiy per., 4, Moscow, 101990, Russia.

E-mail: sokolovsv72@mail.ru

Koltsov Ivan Sergeevich, Junior Researcher, Institute of Machines Science named after A. A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences, Malyy Khariton'evskiy per., 4, Moscow, 101990, Russia.

E-mail: ivankolt@gmail.com