

УДК 531.01+531.47+531.536

© В. В. Чистяков

## О ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ ДИНАМИКИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕГЛАВНОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОСИ ИНЕРЦИИ ПРИ СУХОМ ТРЕНИИ В ОПОРАХ

Рассмотрена динамика вращения твердого тела (ротатора) вокруг неглавной оси  $Oz$ , проходящей через его центр масс, с учетом диссипативных моментов: сухого трения  $M_{fr}$ , возникающего в опорах из-за поперечных динамических реакций, и квадратичного по угловой скорости  $\omega$  аэродинамического сопротивления  $M_R = -c|\omega|\omega$ . Показано, что уравнение динамики и вытекающие из него кинетики вращения тела качественно различны в общем и частном случаях инерционных и диссипативных параметров: осевого момента инерции  $J_{zz}$ , коэффициентов  $c$  и  $\alpha = M_{fr}/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$  ( $\varepsilon$  — угловое ускорение). В частном случае равенства  $J_{zz} = c = \alpha$  обнаружено отсутствие физически возможного решения для вращения по инерции в рамках динамики абсолютно твердого тела. Парадокс разрешается через нормализующее причинно-следственные связи введение запаздывающих величин  $\varepsilon(t - \tau)$  и  $\omega(t - \tau)$ , определяющих в согласии с принципом Даламбера поперечные реакции в опорах оси  $M_{x,y}(t - \tau)$  и пару  $M_{fr}(t - \tau)$ . Последняя же определяла темп потери кинетического момента  $dK_z(t)/dt$  в момент времени  $t$ . Кинетика вращения при этом имеет импульсивный характер так называемого *фрикционно-аэродинамического удара*. Также путем численного интегрирования продемонстрирована необычная угловая кинетика  $\phi(t)$  затухающих колебаний ротатора под действием упругого момента  $M_e = -\kappa\phi$ , характеризующаяся наличием двух фаз: кратковременного стартового участка, зависящего от начальных условий, затем резко переходящего в фазу почти синусоидальных колебаний с медленно убывающей амплитудой.

*Ключевые слова:* центральная ось инерции, инерционные пары сил, сухое трение, парадокс, квадратичное сопротивление, запаздывающее ускорение, фрикционно-аэродинамический удар.

### Введение

При вращении ротатора вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, но не являющейся осью свободного вращения, неизбежно возникают поперечные реакции в опорах, одна из которых рассматривается как неподвижная ( $O$ ), другая — как скользящая подвижная ( $B$ ) (рис. 1). Наличие трения скольжения, направленного противоположно угловой скорости  $\omega$  и подчиняющегося законам Кулона–Амонтона, воздействует на динамику ротатора, наряду с другими осевыми моментами формируя его угловое ускорение  $\varepsilon$ .

Рассматривая трение как проявление неидеальности связи, А. И. Лурье в § 7.12 своей монографии [1] приводит вывод выражений для обобщенных реакций отбрасываемых связей через введение так называемых избыточных обобщенных координат  $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+m}$  по числу  $m$  точек контакта тел. В [2] автор, опираясь на этот метод, выводит точку приложения и выражение для силы нормальной реакции  $N$  и силы трения  $\Phi$  для последующей подстановки и решения динамического уравнения колебаний маятника с сухим трением в оси. При этом само уравнение получается существенно нелинейным, с возможностью эффекта самоотторжения и сопутствующего ему удара.

В случае заведомо астатичного ротатора, ось которого имеет две опоры, нет проблемы с определением точек приложения нормальных сил  $N_O$  и  $N_B$ , так как они выступают только в паре и характеризуются инвариантным моментом  $M_{fr}$ . И здесь есть два пути нахождения  $N_O$  и  $N_B$ . Первый, согласно методу А. И. Лурье [1], через введение в рассмотрение избыточных координат, например углов поворота оси вокруг центральных направлений  $x$  и  $y$ , чтобы тем самым обеспечить неподвижность центра масс  $C$  и, следовательно, перманентную астатичность ротатора. Второй путь заключается в том, чтобы рассматривать силы трения в качестве активных сил, а связи — идеальными [3]. Тогда можно применить принцип Даламбера для нахождения реакций опор вращающегося твердого тела. Но в этом случае искомая пара сил

зависит не только от угловой скорости  $\omega$  и центробежных моментов инерции  $J_{zx}$  и  $J_{zy}$ , но и от ускорения  $\varepsilon$  (!). Хотя ни одна из аксиом механики формально здесь не нарушается, тем не менее складывается парадоксальная ситуация: угловое ускорение  $\varepsilon$  зависит от момента трения  $M_{fr}$ , а сам момент — от ускорения. Разумеется, в реальности из-за конечности скорости звука в материале ротатора угловое ускорение, входящее в реакции опор, должно быть отнесено к более раннему моменту времени, нежели это же ускорение, определяющее темп изменения осевого кинетического момента ротатора. В идеальной динамике абсолютно твердого тела (*а.т.т.*) скорость звука  $u$  считается бесконечно большой, и все пусть бесконечно малые, но деформации как от активных, так и от реактивных усилий передаются по телу мгновенно, и движение *а.т.т.* определяется системой одновременных уравнений. И второй способ с двусторонней причинно-следственной связью между  $\varepsilon$  и  $M_{fr}$ , и первый способ введения избыточных переменных в определенных частных случаях могут привести к несовместному в рамках динамики твердого тела уравнению движения.

Настоящая работа посвящена исследованию динамики астатического ротатора при его вращении вокруг неглавной оси в случаях различной степени вырожденности. А именно, как проявляется сухое трение в комбинации с вязким на кинетике вращения в основных режимах — вращение по инерции, под действием постоянного разгоняющего момента и упругой пары — в особых случаях параметров рассматриваемой динамической системы. И что, собственно, представляют для нее эти особые (вырожденные) случаи. В качестве такого ротатора может служить хорошо известный кельтский камень [4], насаженный на неподвижную ось своей поворотной симметрии 2-го порядка, или, например, сильно вытянутый однородный эллипсоид, просверленный наискось через центр масс (рис. 1). Главное, чтобы были значительны центробежные моменты инерции, связанные с осью вращения  $J_{zx}$  и  $J_{zy}$ .

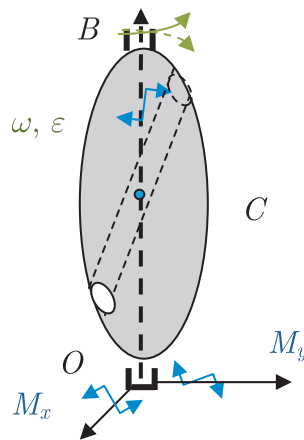


Рис. 1. Астатический ротатор с неглавной осью вращения (3D-кельтский камень)

Проблема представляет разносторонний интерес как с точки зрения теории динамических систем, так и сугубо практической. В особенности если речь заходит о чрезвычайно точном динамическом уравнивании высокоскоростного вращательного устройства (турбины, ротора, вала станка и так далее), а также в тех ситуациях, когда такое уравнивание принципиально невозможно в силу ряда специфических причин.

## § 1. Тормозящий момент

Легко показать, что два вышеописанных способа приводят к одному и тому же уравнению динамики, отличаясь между собой только в интерпретации его составных частей. В способе А. И. Лурье сила нормальной реакции  $N$  не зависит от углового ускорения  $\varepsilon$ , но только от скорости  $\omega$ , угла поворота  $\phi$  и времени  $t$  в самом общем случае.

В способе, базирующемся на принципе Даламбера, нормальные динамические реакции в осях вращающегося тела в подвижной ( $B$ ) и неподвижной ( $O$ ) опорах определяются как

(см., например, [5])

$$\begin{cases} B_x = \frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h} \\ B_y = \frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h} \end{cases}, \quad \begin{cases} O_x = -\frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h} \\ O_y = -\frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h} \end{cases}, \quad h = OB.$$

Эти несимметричные по отношению к обращению времени величины тем не менее, складываясь своими проекциями по теореме Пифагора, дают пару поперечных сил, не зависящую от направления вращения,

$$N_A = N_B = \frac{\sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)(\varepsilon^2 + \omega^4)}}{h},$$

и вызывающую силы трения с их тормозящим осевым моментом,

$$M_{fr} = -\text{sign}(\omega) \frac{2\delta \sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)(\varepsilon^2 + \omega^4)}}{h} = -\text{sign}(\omega) \alpha \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Размерность коэффициента  $\alpha$  здесь совпадает с размерностью инвариантного при повороте эффективного центробежного момента инерции  $\sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$ . Согласно третьему закону Кулона, возникающий при движении момент  $M_{fr}$  пропорционален итоговой силе  $\vec{N}_A + \vec{N}_B$  нормального давления на опоры. Что же касается сил аэродинамического/жидкостного сопротивления вращению, то они традиционно описываются квадратичным моментом  $M_R = -c\omega|\omega|$ , от ускорения не зависят и во времени изменяются плавным образом. Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  здесь также имеет смысл некоторого момента инерции.

## § 2. Вращение по инерции (общий случай)

Пусть тело имеет угловую скорость  $\omega_0$ , когда перестает действовать вращающий момент, и далее оно движется лишь под действием тормозящих пар  $M_R$  и  $M_{fr}$ . Очевидно, что направление вращения не изменится, и динамика его будет описываться уравнением

$$J_{zz}\ddot{\phi} = -\alpha\sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - c\dot{\phi}^2.$$

Его разрешение относительно старшей производной возможно через перегруппировку и возведение в квадрат:

$$J_{zz}^2\ddot{\phi}^2 + 2cJ_{zz}\ddot{\phi}\dot{\phi}^2 + c^2\dot{\phi}^4 = \alpha^2\ddot{\phi}^2 + \alpha^2\dot{\phi}^4,$$

и оно неоднозначно:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{-cJ_{zz}\dot{\phi}^2 \pm \sqrt{c^2J_{zz}^2\dot{\phi}^4 + (J_{zz}^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - c^2)\dot{\phi}^4}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} = \\ &= \frac{-cJ_{zz} \pm \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Знак в корне выбирается из очевидного условия

$$J_{zz}\ddot{\phi} + c\dot{\phi}^2 = \alpha \frac{\pm J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2} - c\alpha}{J_{zz} - \alpha} \leq 0.$$

Тогда при  $J_{zz} > \alpha$  должен быть выбран «-»:

$$\ddot{\phi} = -\dot{\phi}^2 \frac{cJ_{zz} + \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \equiv -\gamma\dot{\phi}^2. \tag{1}$$

Уравнение можно представить как

$$J_{zz}\ddot{\phi} = -c\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^2 \frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}$$

и момент трения, согласно А. И. Лурье [1], определится квадратичным выражением

$$M_{fr}(\omega) = -\frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz} \sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \omega^2.$$

Уравнение (1) легко интегрируется:

$$-\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2} = \gamma \iff \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \gamma t \implies \omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0 \gamma t}, \quad \phi(t) = \frac{\ln(1 + \omega_0 \gamma t)}{\gamma}. \quad (2)$$

Здесь, в отличие от линейного по  $\omega$  сопротивления и от тормозящего постоянного момента, тормозной путь логарифмически расходится со временем, а скорость вращения убывает со временем по медленному обратно пропорциональному закону.

Таким образом, кельтский камень, закрепленный на центральной оси с трением в опорах, вращается по инерции точно так же, как и в отсутствие такого трения, но при наличии квадратичного момента сопротивления. Однако постоянная такого сопротивления, помимо аэродинамических величин, определяется целым комплексом величин: физическим коэффициентом трения  $\delta$ , центробежными моментами инерции и геометрическим расстоянием между опорами:

$$c* = \frac{cJ_{zz}^2 + \alpha J_{zz} \sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{2\delta \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}}{h}.$$

Примечательно, что квадратичная динамика сохраняется и в безвоздушном пространстве, то есть при  $c = 0$ .

Стоит отметить, что решение (2) не зависит от того, вращалось ли тело равномерно до момента своего освобождения либо угловая скорость как-то менялась, но в означенный момент приняла значение  $\omega_0$ : продолжение всегда одно и то же.

### § 3. Вращение по инерции (вырожденные случаи)

Рассмотрим случай аномально высокого трения в осях  $J_{zz} = \alpha$ . Этого возможно добиться путем не только и не столько увеличения коэффициента  $\delta$ , но прежде всего увеличением центробежных моментов инерции и уменьшением расстояния  $h$  между опорами. Тогда уравнение динамики приобретет вид:

$$\ddot{\phi} = \frac{(\alpha^2 - c^2) \dot{\phi}^2}{2cJ_{zz}} \equiv -\gamma \dot{\phi}^2.$$

Если считать параметр  $\gamma$  положительным, то нет никаких проблем с применением формул. Проблемы возникнут при  $\gamma \leq 0$ , когда выражения (2) утратят всякий смысл из-за роста угловой скорости в бесконечность при движении по инерции.

Одновременное уравнение динамики обеспечивает положительную обратную связь между угловым ускорением и угловой скоростью. В этом случае необходим учет вышеупомянутой неодновременности факторов, и уравнение динамики запишется как

$$J_{zz} \ddot{\phi}(t) = -\alpha \sqrt{\dot{\phi}^4(t - \tau) + \ddot{\phi}^2(t - \tau) - c \dot{\phi}^2(t)}, \quad (3)$$

где  $\tau \approx l/u$  — характерное время отставания сил реакции опор из-за конечности скорости звука,  $l$  — размер ротатора.

Рассмотрим пока только полностью вырожденный случай  $\alpha = c = J_{zz} = J$ . Тогда (3) приобретет универсальный вид

$$\ddot{\phi}(t) = -\sqrt{\dot{\phi}^4(t - \tau) + \ddot{\phi}^2(t - \tau) - \dot{\phi}^2(t)}. \quad (4)$$

Без учета запаздывания уравнение имеет лишь тривиальное решение: покой  $\dot{\phi} = 0$ , которое не удовлетворяет даже начальному условию. Здесь уместно вспомнить критику П. Пэнлеве [6]

законов трения в некоторых ситуациях, несовместимых с законами классической механики абсолютно твердого тела.

С учетом же запаздывания появляется шанс обретения полноценного решения, отражающего процесс естественного торможения ротатора под действием диссипативных сил. Однако (4) относится к разряду функционально-дифференциальных уравнений, решение которых даже численными методами представляет проблему.

Тем не менее, считая лаг  $\tau \ll \frac{1}{\omega_0}$ , можно записать приближенно

$$\ddot{\phi}(t) + \dot{\phi}^2(t) \approx -\sqrt{\dot{\phi}^4(t) - 4\dot{\phi}^3(t)\ddot{\phi}(t)\tau + \ddot{\phi}^2(t) - 2\ddot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t)\tau}.$$

После возведения в квадрат и сокращения одинаковых членов и множителей получается уравнение номинально третьего, но фактически второго порядка:

$$\begin{aligned} 2\ddot{\phi}(t)\dot{\phi}^2(t) &\approx -4\dot{\phi}^3(t)\ddot{\phi}(t)\tau - 2\ddot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t)\tau \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\phi}(t) &\approx -\frac{\dot{\phi}^2(t)}{\tau} - 2\dot{\phi}^3(t). \end{aligned}$$

Здесь фигурирует угловое ускорение второго порядка, называемое еще алгебраическим *угловым рывком* [7], равное  $\ddot{\phi}(t) = \varepsilon'_\omega \cdot \varepsilon(\omega)$ . Тогда

$$\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon_0^2}{2} \approx \frac{\omega_0^3}{3\tau} + \frac{\omega_0^4}{2} - \frac{\omega^3}{3\tau} - \frac{\omega^4}{2} \Rightarrow \varepsilon \approx -\sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{2\omega_0^3}{3\tau} + \omega_0^4 - \frac{2\omega^3}{3\tau} - \omega^4}.$$

Выражение для  $\varepsilon$  содержит параметр  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ , определяемый из (4) в предположении, что до момента отключения ведущих осевых пар ротатор двигался равномерно:  $\ddot{\phi}(0 - \tau) = 0$  и, следовательно,  $\varepsilon_0 = -2\omega_0^2$ .

Тогда

$$\frac{d\omega}{dt} \approx -\sqrt{\frac{2\omega_0^3}{3\tau} + 5\omega_0^4 - \frac{2\omega^3}{3\tau} - \omega^4} \Rightarrow t(\omega) \approx -\sqrt{\tau} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega'}{\sqrt{\frac{2\omega_0^3}{3} + 5\omega_0^4\tau - \frac{2\omega'^3}{3} - \omega'^4\tau}}. \quad (5)$$

Аналогично: для угла поворота

$$\phi(\omega) \approx -\sqrt{\tau} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\frac{2\omega_0^3}{3} + 5\omega_0^4\tau - \frac{2\omega'^3}{3} - \omega'^4\tau}}. \quad (6)$$

В знаменателях подынтегральных выражений в (5)–(6) можно пренебречь слагаемыми, содержащими параметр  $\tau$ . Однако интегрирование таких выражений, сведение их к эллиптическим функциям выполняется через полиномы четвертой степени [8]; потому они оставлены.

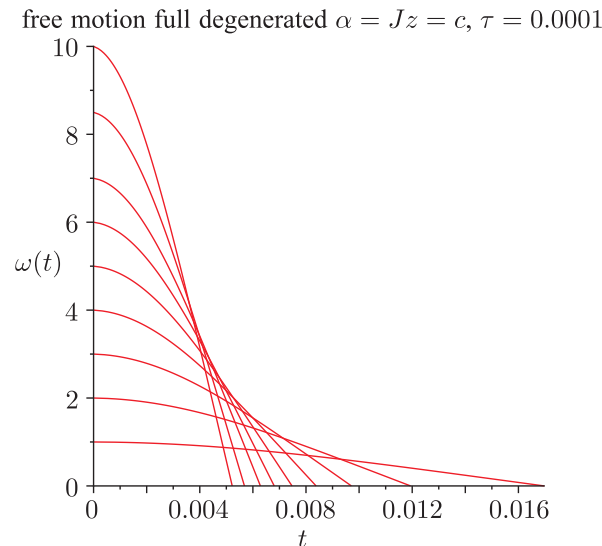
Численное интегрирование для различных начальных угловых скоростей дает определенно парадоксальную картину для тормозного времени: чем больше угловая скорость  $\omega_0$ , тем оно меньше (рис. 2).

При  $\tau = 10^{-4}$  с времена движения лежат в миллисекундном диапазоне, а углы поворота — порядка сотых долей *рад*, что позволяет говорить об импульсивном характере движения. При этом угловые ускорения нарастают по модулю по мере приближения к точке останова, достигая значений порядка  $10^3$  с<sup>-2</sup> (рис. 3). По сути, сразу после отключения ведущего момента развивается катастрофически нарастающий процесс *фрикционно-аэродинамического удара*.

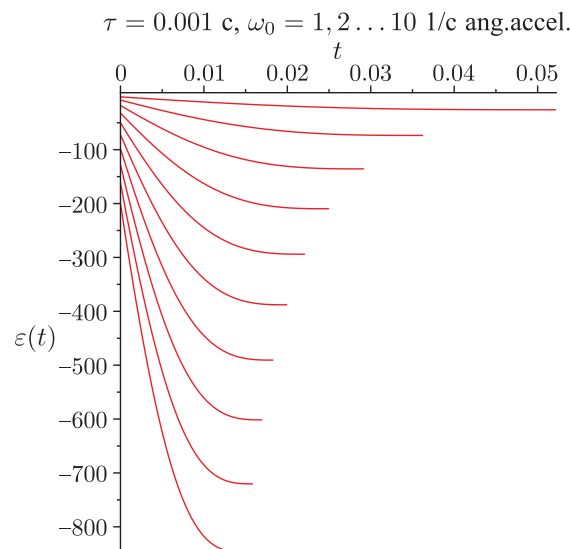
Говорить об эффекте самоотторжения здесь не приходится, так как в состоянии длительного покоя рассматриваемое сухое трение не реализуется. Убывание же углового тормозного пути  $\phi$  к нулю при  $\tau \rightarrow 0$  (рис. 4) подтверждает тривиальное решение  $\dot{\phi} = 0$ , полученное без учета запаздывания.

Полученные результаты вполне объяснимы: коэффициенты трения и аэродинамических сил очень велики. Так, при подаче на ось ведущего момента в 1 Н·м ротатор с  $J_{zz} = \alpha = c = 1$  кг × м<sup>2</sup> развивает скорость всего 0.71 рад/с (см. далее).

Случай  $\gamma = -\frac{\alpha^2 - c^2}{2cJ_{zz}} < 0$  достоин отдельного обсуждения в рамках предложенного выше тезиса о разновременности факторов и в настоящей работе не исследуется.



**Рис. 2.** Кривые торможения  $\omega(t)$  в вырожденном случае



**Рис. 3.** Зависимости для углового ускорения  $\varepsilon(t)$  при различных  $\omega_0$

#### § 4. Разгон под действием постоянного момента

Пусть к покоящемуся ротатору приложен постоянный по величине момент  $M$  и по-прежнему выполняется условие полного вырождения  $\alpha = c = J_{zz} = J$ .

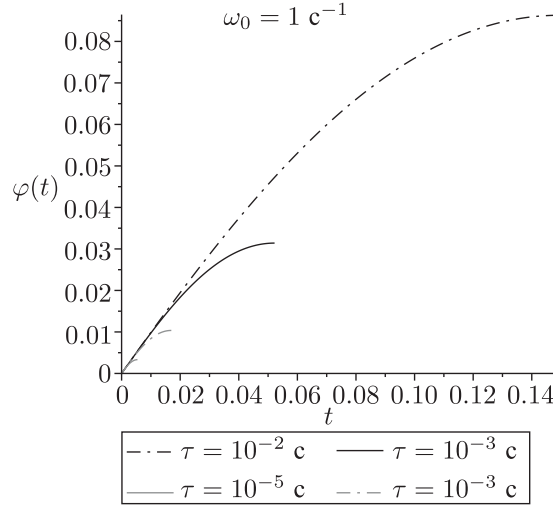
В этом случае добавки, зависящие от временного лага  $\tau$ , являются всего лишь малым возмущением и фактором разновременности можно пренебречь.

Уравнение динамики разгона есть

$$\ddot{\phi} = \frac{M}{J} - \sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - \dot{\phi}^2. \quad (7)$$

Предельная скорость разгона  $\omega_\infty$  определится из условия  $\ddot{\phi} \rightarrow 0$ :

$$\frac{M}{J} - \dot{\phi}^2 - \sqrt{\dot{\phi}^4} = 0 \Rightarrow \omega_\infty = \sqrt{\frac{M}{2J}}.$$



**Рис. 4.** Динамика угла поворота для разных значений лага

Разрешая (7) относительно старшей производной, получим

$$-2\ddot{\phi}J(M - J\dot{\phi}^2) + M^2 - 2J\dot{\phi}^2M = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{(M - 2J\dot{\phi}^2)M}{2J(M - J\dot{\phi}^2)}.$$

Оно равносильно

$$\frac{d\omega}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{(M - 2J\dot{\phi}^2)M}{2J(M - J\dot{\phi}^2)} \Leftrightarrow \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{2J(M - J\omega^2)\omega}{(M - 2J\omega^2)M},$$

решение которого в параметрическом виде есть

$$\phi(\omega) = \frac{J\omega^2}{2M} - \sqrt{\frac{J}{8M}} \ln \left( 1 - \frac{2J\omega^2}{M} \right), \tag{8}$$

$$t(\omega) = \frac{J\omega}{2M} - \sqrt{\frac{J}{8M}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{M}{2J}} - \omega}{\omega + \sqrt{\frac{M}{2J}}} \right). \tag{9}$$

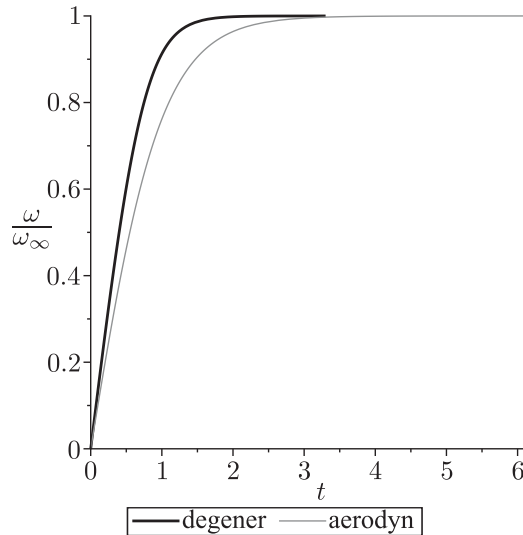
Выражения (8) и (9) дают в общем-то стандартную динамику разгона (рис. 5), отличающуюся некоторой быстротой от аналогичной динамики вырожденного ротатора того же момента инерции  $J$ , но при вдвое меньшем моменте  $M/2$  (чтобы совпали предельные скорости) и под действием только квадратичного сопротивления. В последнем случае кинетика задается уравнением

$$\ddot{\phi} = \frac{M}{2J} - \dot{\phi}^2 \Leftrightarrow \frac{d\omega}{d\phi}\omega = \frac{M}{2J} - \omega^2 \Leftrightarrow \phi = -\frac{\ln \left( 1 - \frac{2J\omega^2}{M} \right)}{2}, \quad t = -\sqrt{\frac{J}{2M}} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{M}{2J}} - \omega}{\omega + \sqrt{\frac{M}{2J}}} \right).$$

### § 5. Свободные колебания вырожденного ротатора

Пусть на ротатор, помимо диссипативных сил сухого трения и аэродинамического сопротивления, действует также консервативный возвращающий момент  $M_e = -\kappa\phi$ . Пусть при этом все коэффициенты, имеющие размерность момента инерции, равны:  $J_{zz} = \alpha = c = J$ . Тогда после преобразования динамического уравнения

$$J_{zz}\ddot{\phi} = -\alpha \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - \kappa\phi - \operatorname{sign}(\dot{\phi}) c\dot{\phi}^2$$



**Рис. 5.** Кинетика разгона вырожденного ротатора под действием трения в осях и квадратичного сопротивления, и только квадратичного сопротивления

получается

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} 2J \left( J \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + \kappa\phi \right) &= -\kappa\phi \left( 2J\dot{\phi}^2 \operatorname{sign}(\dot{\phi}) + \kappa\phi \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \ddot{\phi} &= \frac{-2\kappa J\phi\dot{\phi}^2 \operatorname{sign}(\dot{\phi}) - \kappa^2\phi^2}{2J^2 \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + 2J\kappa\phi} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \ddot{\phi} &= -\frac{\kappa\phi}{J} - \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + \frac{\kappa^2\phi^2 + 2J\kappa\phi \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + 2J^2\dot{\phi}^4}{2J \left( J \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + \kappa\phi \right)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь слагаемые в правой части отвечают за упругий момент, квадратичное сопротивление и момент сухого трения. Последний равен

$$M_{fr} = \frac{\kappa^2\phi^2 + 2J\kappa\phi \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + 2J^2\dot{\phi}^4}{2 \left( J \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + \kappa\phi \right)} = \frac{J \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + \kappa\phi}{2} + \frac{J^2\dot{\phi}^4}{2 \left( J \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \dot{\phi}^2 + \kappa\phi \right)}. \tag{11}$$

Действие его, как следует из (11), сводится к уменьшению вдвое упругой и аэродинамической составляющих плюс некоторая добавка, способная принимать как отрицательные, так и положительные значения. При этом она стремится увести ротатор от положения равновесия.

В том же случае, когда аэродинамический и упругий моменты взаимно компенсируются, знаменатель (11) обращается в ноль при ненулевом числителе. Тогда угловое ускорение обратится в бесконечность, что может, но не должно означать скачок угловой скорости.

Впрочем, подобные скачки как раз и являются одними из множественных парадоксов [6], декларирующих неприменимость в некоторых ситуациях сухого трения динамики абсолютно твердого тела.

Однако никто не отменяет справедливость этой динамики до момента обращения вышеозначенного знаменателя в ноль. Так, численное решение (10) при помощи продукта Maple 15 для различных начальных условий дает при сравнительно сильном упругом моменте кинетику аperiодического вращения (рис. 6), из которой видно, что знаменатель (10)–(11) обращается в нуль по причине естественного останова ротатора в положении устойчивого равновесия  $\phi = 0$ .

Что касается слабых упругих свойств, то здесь решение продолжается сравнительно долго (рис. 7) и имеет вид медленно убывающих гармонических колебаний, о чем свидетельствует вид диаграммы на фазовой плоскости (рис. 8).



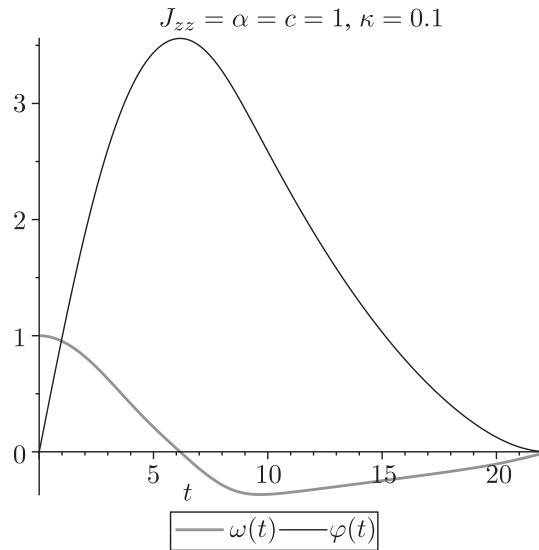


Рис. 6. Кинетика изменения угла и угловой скорости ротатора в вырожденном случае при  $J_{zz} = \alpha = c = 1$ ,  $\kappa = 0.1$

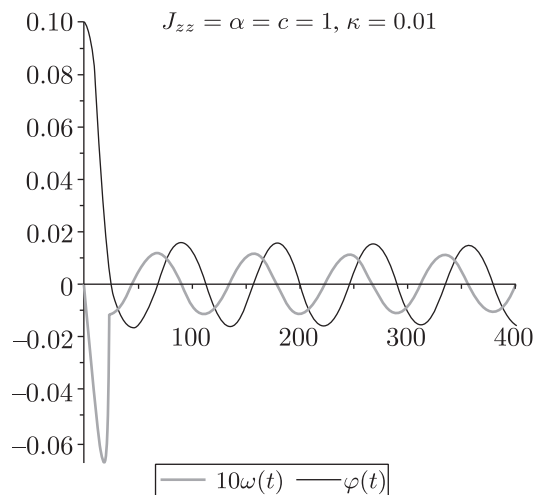


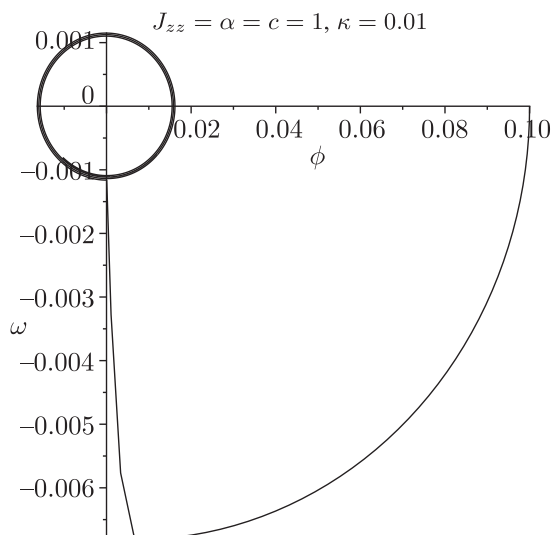
Рис. 7. Кинетика изменения угла и угловой скорости ротатора в вырожденном случае при  $J_{zz} = \alpha = c = 1$ ,  $\kappa = 0.01$

Из нее также следует, что стартует система вполне по гармоническому закону, но по прошествии некоторого времени начальная круглая дуга резко изламывается в сторону положения равновесия, а последующие два излома выводят ротатор на медленно сужающуюся круглую же спираль.

Объем настоящей работы не позволяет сравнить нештатный вырожденный случай со штатным невырожденным, весьма схожим по свойствам со стандартными линейными затухающими колебаниями (в печ.). Автор отмечает только хотя и понятное (10), но все же удивительное отсутствие в нештатной ситуации изломов на кривых  $\omega(t)$  в точках разворота ротатора, но наличие их в другие моменты (рис. 7). Тем более что в штатной ситуации эти изломы тем ярче выражены, чем больше коэффициент сухого трения  $\alpha$  и тем самым ближе к  $J_{zz}$ .

## § 6. Выводы

Таким образом, изучен важный тип динамической системы с вполне реалистичными свойствами: астатический ротатор с неглавной осью вращения и сухим трением в ее опорах.



**Рис. 8.** Фазовый портрет системы со слабыми упругими свойствами

Рассмотрены как штатные, так и особые случаи, в частности те, при которых не работает одновременное динамическое уравнение, и необходим учет временного лага для углового ускорения.

Аналитический и численный расчеты показывают о наличии нарастающих ударных воздействий в осях вращающегося по инерции тела, так называемый фрикционно-аэродинамический удар, средняя величина момента которого растет опережающим образом со стартовой угловой скоростью  $\omega_0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
2. Смирнов Ю.П. Об уравнениях динамики систем с трением // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 184–188.
3. Козлов В.В. Лагранжева механика и сухое трение // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 4. С. 855–868.
4. Астапов И.С. Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестник Московского университета. Сер. I. Математика. Механика. 1980. № 2. С. 97–100.
5. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
6. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
7. Сомов О.И. Об ускорениях различных порядков в относительном движении // Зап. имп. акад. наук. 1866. Т. 9. С. 121–132.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 01.02.2014

Чистяков Виктор Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Ярославская государственная сельхозакадемия, 150042, Россия, г. Ярославль, Тутаевское ш., 58.  
E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru

*V. V. Chistyakov*

**On some particular cases of the rotational dynamics of a rigid body around central but non-principal axis of inertia under action of dry friction in supports**

*Keywords:* central axis of inertia, inertia caused torques, dry friction, paradox, quadratic drag, delayed acceleration, aerodynamic-frictional impact.

MSC: 70E40, 70F40, 74H15, 70K40

The article studies the rotational dynamics of a rigid body (rotator) around the central but non-principal axis  $Oz$  passing through its center of mass under the action of dry frictional torque  $M_{fr} = \alpha\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$  caused by inertia forces in the axis's supports and the drag momentum  $M_R = -c|\omega|\omega$  quadratic in angular speed  $\omega$ . It has been shown that the dynamical equations and the equations of the kinetics of the body's rotation, which follow from the dynamical equations, are qualitatively different in general and particular cases of the inertial and dissipative parameters involved: the axial moment of inertia  $J_{zz}$  and the coefficients  $c$  and  $\alpha = M_{fr}/\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$  where ( $\omega$  is the angular acceleration). It is found that in the particular case of the equality  $J_{zz} = c = \alpha$  a physical feasible solution for the inertial rotation within the dynamics of a perfectly rigid body is absent. The paradox is resolved by the introduction of the lagged angular velocity  $\omega(t - \tau)$  and acceleration  $\varepsilon(t - \tau)$  as factors defining due to D'Alembert principle the supports' transversal reactions  $M_{x,y}(t - \tau)$  and hence the value of  $M_{fr}(t - \tau)$ . The last one determines the loss rate of kinetic momentum, i.e. the  $dK_z(t)/dt$  at time  $t$ . The rotational kinetics had a type of frictional-aerodynamic impact. Also, by numerical integration, there was shown the unusual angular kinetics  $\phi(t)$  of the damping oscillations of the rotator under the action of the elastic torque  $M_e = -\kappa\phi$ . The kinetics was characterized by the presence of two phases: the short starting part strongly depending on initial conditions followed by the phase of almost sine wave oscillations with extremely slow damping.

#### REFERENCES

1. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika* (Analytical mechanics), Moscow: Nauka, 1961.
2. Smirnov Yu.P. On dynamical equations of the systems with dry friction, *Sbornik nauchno-metodicheskikh statei po teoreticheskoi mekhanike*, Moscow: Vysshaya shkola, 1981, vol. 11, pp. 184–188 (in Russian).
3. Kozlov V.V. Lagrangian mechanics and dry friction, *Nelineinaya Dinamika*, 2010, vol. 6, no. 4, pp. 855–868 (in Russian).
4. Astapov I.S. On rotational stability of Celtic stone, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika, Mekhanika*, 1980, no. 2, pp. 97–100 (in Russian).
5. Markeev A.P. *Teoreticheskaya mekhanika* (Theoretical mechanics), Moscow: CheRo, 1999, 572 p.
6. Painleve P. *Le cons sur le frottement*, Paris: Hermann, 1895. Translated under the title *Lektsii o trenii*, Moscow: Gostekhizdat, 1954, 316 p.
7. Somov O.I. On the acceleration of various orders of magnitude in relative motion, *Zap. Imp. Akad. Nauk*, 1866, vol. 9, pp. 121–132 (in Russian).
8. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook*, McGraw-Hill Book Company, 1968.

Received 01.02.2014

Chistyakov Viktor Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Yaroslavl State Agricultural Academy, Tutaevskoe sh., 58, Yaroslavl, 150042, Russia.

E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru