

УДК 532.5.032

© *И. И. Потапов, К. С. Снигур***ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПОПЕРЕЧНОЙ РУСЛОВОЙ ПРОРЕЗИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТРАНЗИТНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА<sup>1</sup>**

В работе предложена одномерная по пространству русловая математическая модель. В модели использована оригинальная равновесная формула движения влекомых наносов, учитывающая влияние морфологии дна, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на процесс транспорта влекомых наносов. Формула не содержит в себе новых феноменологических параметров. Гидродинамический поток описывается стационарными уравнениями движения в рамках теории «мелкой воды». Предложен численный алгоритм решения уравнений математической постановки методом контрольных объемов. В качестве верификации предложенной модели рассмотрена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней транзитного гидродинамического потока. Выполнено сравнение полученных решений с экспериментальными данными и расчетами других авторов. Предлагаемая модель хорошо восстанавливает фронт движения подветренной и напорной частей каверны и ее глубину. В среднем по области получено высокое согласование результатов численных расчетов с экспериментальными данными, средняя относительная погрешность полученных данных относительно экспериментальных данных близка к 5%. По результатам верификации предложенной модели сделан вывод о том, что математическая модель качественно и количественно описывает процесс деформации донной поверхности под действием гидродинамического потока.

*Ключевые слова:* поперечная русловая прорезь, транспорт донных наносов, русловые процессы.

**Введение**

В работе предложена одномерная русловая математическая модель, учитывающая транспорт донного материала во влекомом и взвешенном состоянии. В отличие от аналогичных моделей других авторов [1–4] предложенная модель не содержит в себе новых феноменологических параметров, связанных с морфологическим процессом. В качестве транспортного уравнения влекомых наносов используется формула, предложенная в работе [5] и хорошо зарекомендовавшая себя в работах [6, 7]. Формула учитывает влияние морфологии дна, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на процесс транспорта влекомых наносов. В качестве верификации модели рассмотрена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней гидродинамического потока. Выполнено сравнение результатов численного эксперимента по предложенной модели с экспериментальными данными и расчетами других авторов.

**§ 1. Математическая модель задачи**

Предложенная математическая модель руслового потока включает в себя:

– уравнение мелкой воды [8]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2g} + \eta \right) + \frac{\tau}{gH\rho_w} = 0, \quad Q = UH; \quad (1)$$

– уравнение переноса взвешенных наносов [2, 9]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial SU}{\partial x} = \alpha \frac{W}{H} (S_* - S); \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке фонда РФФИ (грант № 12-01-98518-р восток (а)) и фонда ДВО РАН (грант X9 12-III-A-03-034).

– уравнение Эйснера [5]

$$(1 - \varepsilon)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = -\alpha \frac{W}{H}(S_* - S). \quad (3)$$

Математическая постановка (1)–(3) замыкается начальными условиями

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0(x), \quad S(x, 0) = S_*(x) \quad (4)$$

и граничными условиями

$$\zeta(L, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = J, \quad G(0, t) = G^0, \quad H(L, t) = H^0. \quad (5)$$

Здесь  $x, t$  – пространственная и временная координаты соответственно,  $U$  – осредненная по глубине скорость потока,  $H$  – глубина потока,  $Q = \text{const}$  – расход потока,  $\eta = H + \zeta$  – уровень свободной поверхности,  $\zeta$  – уровень донной поверхности,  $\tau$  – придонные касательные напряжения,  $\rho_w$  – плотность воды,  $\rho_s$  – плотность песка,  $g$  – ускорение свободного падения,  $S$  – средняя субстанциальная мутность (находимая путем осреднения мутности по живому сечению потока без учета скорости течения),  $S_*$  – транспортирующая способность потока,  $W$  – гидравлическая крупность,  $d$  – диаметр частиц,  $\varepsilon$  – пористость донного материала,  $G$  – удельный массовый расход влекомых наносов,  $J$  – основной уклон донной поверхности,  $G^0$  – удельный массовый расход влекомых наносов на входе в расчетную область,  $H^0$  – глубина потока на выходе из расчетной области.

Транспортирующая способность потока  $S_*$  зависит от скорости течения воды  $U$ , глубины  $H$  и гидравлической крупности  $W$ , а также от условия взмучивания / осаждения донных частиц [9]

$$S_* = \begin{cases} 0.2 \frac{U^3}{WgH}, & W < u_*, \\ 0, & W \geq u_*, \end{cases} \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_w}}. \quad (6)$$

Для определения напряжений гидравлического сопротивления потоку  $\tau$  используется формула Шези [10]

$$\tau = \rho_w g \frac{U^2}{C^2}, \quad C = \frac{1}{n_s} H^{\frac{1}{6}}, \quad (7)$$

в которой коэффициент шероховатости  $n_s$  выражается как

$$n_s = \frac{(H^0)^{\frac{5}{3}} \sqrt{J}}{Q}.$$

Поток влекомых наносов  $G$  определяется по формуле Петрова [5]

$$G = G_0 \tau^{\frac{3}{2}} \left[ (1 - \chi) - \frac{1}{\text{tg } \varphi \cos \gamma} \left( 1 - \frac{\chi}{2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right], \quad (8)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m}{\kappa \sqrt{\rho_w} (\rho_s - \rho_w) g \text{tg } \varphi \cos \gamma}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi \leq 1, \\ 0, & \chi > 1, \end{cases}$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\tau_*}{\tau}}, \quad \tau_* = \frac{3 \kappa^2 d (\rho_s - \rho_w) g \text{tg } \varphi \cos \gamma}{c_x}, \quad (9)$$

где  $\tau_*$  – критическое придонное касательное напряжение,  $\varphi$  – угол внутреннего трения частиц,  $c_x$  – лобовое сопротивление частиц,  $\gamma$  – острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной линией,  $\kappa = 0.4$  – постоянная Кармана.

## § 2. Алгоритм решения задачи

Задача (1)–(9) решается с помощью метода конечных разностей. Построим явную двухслойную по времени и симметричную по пространству разностную схему. Воспользуемся равномерной сеткой по пространству с узлами  $x_i = i\Delta x$ ,  $i = 0, \dots, N$  и шагом  $\Delta x = \frac{L}{N-1}$ , на которой определены основные неизвестные величины  $H$ ,  $U$ ,  $S$ ,  $\zeta$ . Используется также вспомогательная сетка по пространству с узлами  $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + 0.5)\Delta x$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ , на которой определены вспомогательные неизвестные величины  $\tau$ ,  $\chi$ ,  $G_0$ ,  $G$ . Сетка по времени состоит из слоев  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, \dots, N_t$  с шагом  $\Delta t = \frac{T}{N_t-1}$ , где  $N_t$  — количество временных слоев,  $T$  — характерное время наблюдения.

Индекс временного слоя  $(n + 1)$  опускается там, где это не вызывает противоречий.

Для решения задачи был предложен следующий алгоритм

1. Вводим параметры гидродинамики и донного материала.
2. Устанавливаем начальные условия для  $\zeta$  и  $H$  из (4).
3. Начиная с  $(N - 1)$ -ого и заканчивая 1-ым пространственным узлом, выполняем решение задачи гидродинамики методом обратного хода [11]:

- (а) исходя из условия  $H_N = H^0$ , вычисляем глубину на предыдущем пространственном узле по формуле

$$H_{i-1} = H_i + \Delta x \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1} + \lambda Fr_i}{1 - Fr_i \left(1 - \frac{3\lambda\Delta x}{2H_i}\right)}, \quad Fr_i = \frac{U_i^2}{gH_i}, \quad \lambda = \frac{g}{C^2};$$

- (б) зная постоянный по области расход потока, вычисляем скорость потока в том же узле:

$$U_{i-1} = \frac{Q}{H_{i-1}}.$$

4. Для решения русловой части модели вычисляем значения параметров  $\tau_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $\tau_{*i+\frac{1}{2}}$ ,  $\chi_{i+\frac{1}{2}}$  по следующим формулам:

$$\tau_i = \rho_w g \frac{U_i^2}{C_i^2}, \quad \chi_i = \sqrt{\frac{\tau_{*i}}{\tau_i}}, \quad \tau_{*i} = \frac{3}{8} \frac{\kappa^2 d (\rho_s - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma_i}{c_x},$$

$$\cos \gamma_i = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + (\zeta_{i+1} - \zeta_i)^2}},$$

$$\tau_{i+\frac{1}{2}} = 0.5(\tau_i + \tau_{i+1}), \quad \tau_{i-\frac{1}{2}} = 0.5(\tau_i + \tau_{i-1}),$$

$$\chi_{i+\frac{1}{2}} = 0.5(\chi_i + \chi_{i+1}), \quad \chi_{i-\frac{1}{2}} = 0.5(\chi_i + \chi_{i-1}).$$

5. Вычисляем текущую транспортирующую способность потока:

$$S_{*i}^{n+1} = \begin{cases} 0.2 \frac{(U_i^n)^3}{W g H_i^n}, & W < u_*, \\ 0, & W \geq u_*, \end{cases} \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_{i-\frac{1}{2}}^n}{\rho_w}}.$$

6. Вычисляем среднюю субстанциальную мутность в узлах сетки расчетной области с использованием схемы бегущего счета [9, 11]:

$$S_i^{n+1} = \frac{S_i^n + U_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i-1}^{n+1} + \Delta t \frac{W}{H_i^{n+1}} (S_{*i}^{n+1} - S_i^n)}{1 + U_i^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x}}.$$

7. Вычисляем значения массового удельного расхода влекомых наносов в узлах сетки расчетной области по формулам

$$G_{0_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m (1 - \chi_{i+\frac{1}{2}})}{\kappa \sqrt{\rho_s} (\rho_s - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi \cos \gamma}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi_{i+\frac{1}{2}} \leq 1, \\ 0, & \chi_{i+\frac{1}{2}} > 1, \end{cases}$$

$$G_{i+\frac{1}{2}} = G_{0_{i+\frac{1}{2}}} \tau_{i+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[ (1 - \chi_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \cos \gamma_i} \left( 1 - \frac{\chi_{i+\frac{1}{2}}}{2} \right) \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{\Delta x} \right].$$

8. Рассчитываем уровень донной поверхности в узлах сетки расчетной области:

$$\zeta_N = \zeta_{N-1} + \Delta x J,$$

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_s (1 - \varepsilon)} \left( \frac{G_i^n - G_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{W}{H_i^n} (S_{*i}^n - S_{*i+1}^n) \right).$$

9. Повторяем действия алгоритма с п.3 до п.8, пока не дойдем до последнего временного узла, то есть пока не выполнится условие  $(n + 1) = N_t$ .

### § 3. Результаты исследований

Для примера применимости модели в русловых расчетах была решена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней гидродинамического потока. Геометрия расчетной области показана на рисунке 1, где  $L_1 = 5$  м,  $L_2 = L_3 = L_4 = 1.5$  м,  $L_5 = 10.5$  м, уклон на участках  $L_2$  и  $L_4$  составляет 1:10.

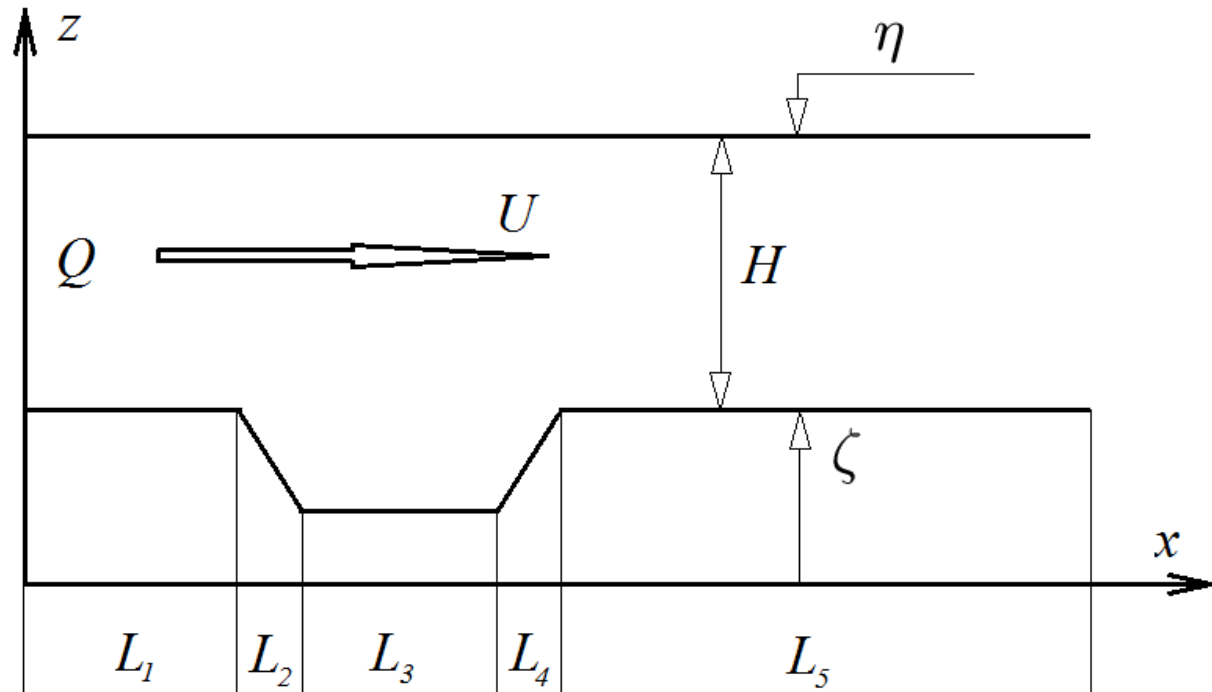


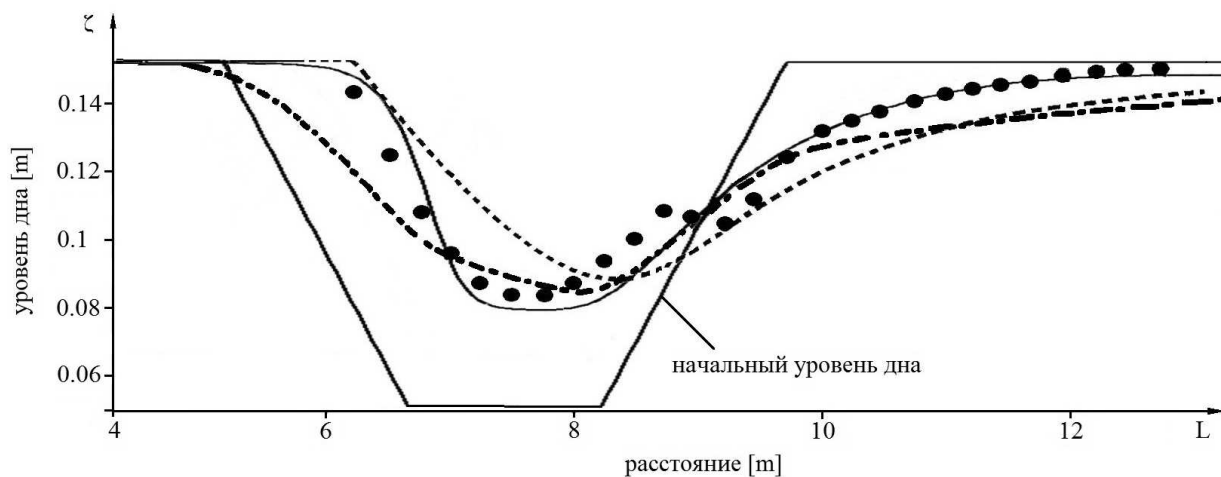
Рис. 1. Расчетная область

Физико-механические и гранулометрические параметры задачи были взяты из экспериментальной работы [12]:  $L = 20$  м;  $H = 0.255$  м;  $U = 0.18$  м/с;  $d = 0.0001$  м;  $J = 0.0002$ ;  $\varphi = 30^\circ$ ;  $c_x = 0.3$ ;  $\varepsilon = 0.4$ ;  $W = 0.001$  м/с;  $\rho_s = 2650$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\alpha = 1.7$ .

В качестве тестовой для предложенной математической модели использовалась задача по определению эволюции донной поверхности русловой прорези под действием протекающей над ней воды. Представленные на рисунке 2 данные, определяющие начальный уровень дна и уровень дна спустя 10 часов (точечное множество), взяты из экспериментальной работы [12]. Предложенные в работах [12, 13] математические модели позволили получить только качественное согласование с экспериментальными данными (пунктирная и жирная штрихпунктирная линии). Из сравнения кривых с точечным множеством видно, что решения, полученные по моделям, предложенным в работах [12, 13], не могут правильно восстанавливать фронтальное движение подветренного склона каверны, а также показывают избыточный размыв дна напорного склона каверны.

Расчеты, выполненные по предложенной в работе математической модели, представленные сплошной линией, имеют хорошее согласование с экспериментальными данными. При меньшем количестве параметров модели предлагаемая модель хорошо восстанавливает фронт движения подветренной и напорной частей каверны, ее глубину и не приводит к избыточному размыву напорного склона каверны и основной выходной части канала.

Количественно из сравнительного анализа следует, что в среднем по области согласование экспериментальных данных с решением, полученным по предложенной модели, высокое. Относительная погрешность не превышает 5 %, что близко к систематической точности экспериментальных данных. Предлагаемая модель является одномерной, и алгоритм решения задачи по ней значительно проще, чем в моделях [12, 13]. Однако решения, получаемые по модели [12] и по модели [13], при сравнении с экспериментальными данными имеют относительную погрешность в среднем по 15–20 %. Отметим, что модель [12] и модель [13] являются двумерными и неравновесными моделями. Кроме того, модель [13] учитывает влияние взвешенных и влекомых наносов, лавинный сход донного материала, включает усредненную по глубине циркуляционную модель и спектральную модель трансформации волн.



**Рис. 2.** Сравнение экспериментальных данных (точечное множество) с расчетными данными [12] (жирная штрихпунктирная линия), расчетными данными [13] (пунктирная линия) и расчетными данными по предложенной модели (сплошная линия) спустя 10 ч

Из полученных расчетов следует, что волны на поверхности воды, лавинное обрушение донного материала и процесс рециркуляции жидкости при данных условиях не оказывают значительного влияния на процесс изменения донной поверхности.

### Заключение

Предложена математическая модель руслового потока, модель влекомых наносов в которой не содержит в новых феноменологических параметров. Модель включает в себя следу-

ющие уравнения: стационарное уравнение движения водного потока, определенное в рамках приближения мелкой воды; неравновесное уравнение переноса взвешенных наносов; уравнение влекомых наносов, учитывающее геометрию дна, и уравнение баланса наносов, определяющее эволюцию геометрии донной поверхности.

Для верификации предложенной модели решена задача об изменении геометрии поперечной русловой прорези при движении над ней гидродинамического потока. Полученные расчетные данные хорошо согласуются с известными экспериментальными данными в области каверны. Средняя относительная погрешность расчетных данных близка к 5 %, что соответствует точности экспериментальных данных.

По результатам верификации предложенной модели можно сделать вывод о том, что математическая модель качественно и количественно описывает процесс деформации донной поверхности под действием гидродинамического потока. Показано, что волны на поверхности воды и лавинное обрушение донного материала в рассмотренной задаче не оказывают значительного влияния на процесс формирования донной поверхности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В.Н. Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1962. 367 с.
2. Караушев А.В. Теория и методы расчета речных наносов. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 272 с.
3. Wagnold R.A. An approach to the sediment transport problem from general physics // U.S. Geological Survey Professional Paper 422-I. 1966. 37 p.
4. Шуляк Б.А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. М.: Наука, 1971.
5. Петров П.Г. Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1991. № 5. С. 72–76.
6. Потапов И.И., Шекачева М.А. Определение скорости размыва берегового склона в реках с песчаным дном // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 116–120.
7. Крат Ю.Г., Потапов И.И. Модель стохастического развития донных волн // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 2. С. 85–91.
8. Картвелишвили Н.А. Потоки в недеформируемых руслах. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 279 с.
9. Белолипецкий В.М., Генова С.Н. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. № 2. С. 9–25.
10. Гришанин К.В. Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 143 с.
11. Потапов И.И., Снигур К.С. Анализ деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 4. С. 114–119.
12. van Rijn L.C. Sedimentation of dredged channels by currents and waves // Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 1986. Vol. 112. № 5. P. 541–559.
13. Sanchez A., Wu W. A non-equilibrium sediment transport model for coastal inlets and navigation channels // Journal of Coastal Research. 2011. Special Issue 59. P. 39–48.

Поступила в редакцию 01.12.2013

Потапов Игорь Иванович, д. ф.-м. н., заведующий лабораторией вычислительной механики, Вычислительный центр, Дальневосточное отделение Российской академии наук, 680000, Россия, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

E-mail: potapovii@rambler.ru

Снигур Ксения Сергеевна, техник, лаборатория вычислительной механики, Вычислительный центр, Дальневосточное отделение Российской академии наук, 680000, Россия, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

E-mail: snigur\_ks@rambler.ru

*I. I. Potapov, K. S. Snigur*

**The evolution of a cross-channel trench under the influence of the transit hydrodynamic flow**

*Keywords:* cross-channel trench, sediment transport, channel processes.

MSC: 76B07

The paper presents a river-bed mathematical model that is one-dimensional in space. In the model we use the original equilibrium formula of bed-load sediment motion, which takes into account the influence of bottom morphology, physical and mechanical parameters of the bottom material on bed-load sediment transport process is used. The formula does not contain new phenomenological parameters. The hydrodynamic flow is described by the steady motion equations within the bounds of the “shallow water” theory. The numerical algorithm for the solution of the governing equations by the control volume method is proposed. The problem of changing geometry of a cross-channel trench when moving over it transit hydrodynamic flow is considered as a verification of the model. The obtained solutions are compared with an experimental data and calculations of other authors. The movement front of the downstream and upstream trench regions, as well as the trench depth, are well-restored due to the model proposed. On average, we obtained a high degree of agreement between the numerical results and experimental data in the region, the mean-relative error between the calculated and measured data is close to 5%. According to the verification results of the proposed model we have concluded that the mathematical model quantitatively and qualitatively describes the process of bottom surface deformation under the influence of hydrodynamic flow.

## REFERENCES

1. Goncharov V.N. *Dinamika ruslovykh potokov* (Channel flow dynamics), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1962, 367 p.
2. Karashev A.V. *Teoriya i metody rascheta rechnykh nanosov* (The theory and methods of river sediment calculating), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1977, 272 p.
3. Bagnold R.A. An approach to the sediment transport problem from general physics, *U.S. Geological Survey Professional Paper* 422-I, 1966, 37 p.
4. Shulyak B.A. *Fizika voln na poverkhnosti sypuchei sredy i zhidkosti* (Physics of waves on the granular and liquid surface), Moscow: Nauka, 1971.
5. Petrov P.G. Motion of a bed load, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1991, vol. 32, issue 5, pp. 717–721.
6. Potapov I.I., Shchekacheva M.A. Determination of the coastal rate of erosion for the rivers with sandy bottom, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 116–120 (in Russian).
7. Krat Yu.G., Potapov I.I. Stochastic model of development of bed forms, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 2, pp. 85–91 (in Russian).
8. Kartvelishvili N.A. *Potoki v nedefirmiruemyykh ruslakh* (Flows in unyielding channels), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1973, 279 p.
9. Belolipetskii V.M., Genova S.N. The computational algorithm for determining the suspended and bottom sediments dynamics in channel, *Vychisl. Tekhnol.*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 9–25 (in Russian).
10. Grishanin K.V. *Ustoichivost' rusel rek i kanalov* (Sustainability of rivers and channels), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1974, 143 p.
11. Potapov I.I., Snigur K.S. The ground deformations analysis of the incoherent bottom of the channel in lower hydrosite bief, *Vychisl. Tekhnol.*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 114–119 (in Russian).
12. van Rijn L.C. Sedimentation of dredged channels by currents and waves, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 1986, vol. 112, no. 5, pp. 541–559.
13. Sanchez A., Wu W. A non-equilibrium sediment transport model for coastal inlets and navigation channels, *Journal of Coastal Research*, 2011, Special Issue 59, pp. 39–48.

Received 01.12.2013

Potapov Igor' Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Computational Mechanics, Computer Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kim Yu Chena, 65, Khabarovsk, 680000, Russia.

E-mail: potapovii@rambler.ru

Snigur Kseniya Sergeevna, Technician, Laboratory of Computational Mechanics, Computer Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kim Yu Chena, 65, Khabarovsk, 680000, Russia.

E-mail: snigur\_ks@rambler.ru