УДК 524.3./4.-32

© *Л. П. Осипков*

ИРРЕГУЛЯРНЫЕ И РЕГУЛЯРНЫЕ СИЛЫ В ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ

Критически обсуждаются различные способы определения иррегулярных и регулярных сил в звездных системах. Наиболее удовлетворительным кажется определение Эддингтона, согласно которому регулярная сила — это сила притяжения сплошной гравитирующей среды, получающейся «размешиванием» вещества по системе. Интерес представляет также определение регулярной силы как математического ожидания случайной силы. Подчеркивается, что время пересечения τ_c, характерное время действия регулярных сил, определяет темп коллективных процессов в системе. Существенно, что регулярные силы могут приводить и, как правило, приводят к бесстолкновительной стохастизации. В этой связи рассматривается квазиэнтропия, среднее по фазовому пространству значение произвольной выпуклой функции от крупнозернистой функции распределения. Максимум квазиэнтропии для невращающихся систем возможен только при изотропном распределении скоростей. Приводятся найденные Антоновым выражения для ее первой и второй вариаций. Если вторая вариация положительна хотя бы для некоторого изменения плотности, то это означает, что данное состояние системы не является наивероятнейшим. Отсюда следует, что эволюция вдоль последовательности политропных шаров невозможна без поступления в систему дополнительной энергии. Напоминается классификация видов фазового размешивания в бесстолкновительных системах.

Кратко рассматривается проблема столкновительной релаксации в гравитирующих системах. Излагается подход к ее решению с точки зрения теории геодезических потоков с последующим усреднением по ансамблю, что требует знания закона распределения случайной силы. Чтобы избежать обрезания распределения Хольцмарка на малых прицельных расстояниях, использовано распределение случайной силы, найденное Петровской. В этом случае оказывается, что отношение эффективного времени стохастизации к времени пересечения пропорционально $N^{1/3}/(\ln N)^{1/2}$, где $N \gg 1$ — число тел в системе. Полученная временна́я шкала столкновительной эволюции практически совпадает с шкалой, ранее предложенной Генкиным.

Ключевые слова: динамика звездных систем, моделирование звездных систем, эволюция галактик.

Введение

Астрономические объекты, изучаемые в динамике звездных систем (звездные скопления, галактики), рассматриваются как совокупности $N \gg 1$ гравитирующих точечных масс (звезд). При необходимости учитывается воздействие со стороны облаков межзвездного газа, «темного вещества», антигравитирующего фона («темной энергии») и так далее. Таким образом, на первый взгляд звездная динамика сводится к небесной механике. Такой подход описан в монографии Р. Курта [1], и он в известной степени реализуется в современных компьютерных экспериментах [2]. Вследствие неинтегрируемости задачи $N > 3$ тел (теоремы Брунса, Пенлеве, Пуанкаре) небесно-механический подход вряд ли может быть назван конструктивным. Но даже если бы можно было найти общее решение задачи N тел (с произвольными начальными условиями), само по себе оно не позволило бы судить о внутреннем строении, форме, кинематике звездных систем.

Наибольший интерес представляют результаты качественной небесной механики. Известна теорема Якоби [3], согласно которой момент инерции гравитирующей системы (относительно барицентра) для системы положительной энергии стремится к бесконечности при $|t| \to \infty$ (некоторые связанные с этим тонкости отмечены А. Уинтнером [4]). Уточнения этой теоремы доказал Г. Ф. Хильми [5].

Менее известны важные теоремы Э. Хопфа [1], современные формулировки и доказательства которых даны в [6]. Принципиальное значение имело бы разрешение альтернативы Хопфа для гравитирующих систем с отрицательной энергией: найти, когда такие системы будут распадающимися, а когда — рекуррентными.

Существенным достижением динамики является теория финальных движений Полларда–Саари [7–9]. Доказанные в рамках этой теории утверждения о скучивании можно рассматривать как строгие небесно-механические аналоги теории гравитационной неустойчивости в ньютонианской космологии [10].

Несмотря на важность этих результатов, их недостаточно для построения содержательной теории звездных систем. Становление звездной динамики оказалось возможным только после перенесения на звездные системы понятий статистической механики (концепция «звездного газа» Кельвина–Пуанкаре [11]) и разделения общего гравитационного поля на две части — регулярную и иррегулярную.

Еще в 1913 году А. С. Эддингтон [12] предложил выделять в силе, действующей на звезду, сглаженную часть, которая определяется свойствами системы как сплошной гравитирующей среды, и флуктуирующую часть, наличие которой обязано дискретности звездных систем. К. Шварцшильд [13] назвал их соответственно *регулярной* и *иррегулярной* силами.

В отечественной литературе эти термины первым использовал Б. П. Герасимович [14], а практически общепринятыми они стали после программной статьи К. Ф. Огородникова [15]. В современных публикациях регулярные силы часто называют *сглаженными* (smoothed), *средними* (mean) или *объемными* (bulk), а иррегулярные силы — *случайными* (random). В теории плазмы в аналогичном смысле используется термин *микрополе*.

Несмотря на интуитивную ясность этих понятий, в вопросе об их точном определении остается много неясного, а относительно их роли в динамической эволюции звездных систем высказывались даже противоположные мнения. Отметим статьи Т. А. Агекяна [16], И. Л. Генкина [17] и Г. Э. Кандрупа [18], а также заметки автора [19, 20].

§ 1. Определение регулярных и иррегулярных сил

Согласно самому простому определению [21], иррегулярная сила в данной точке — это суммарная сила притяжения от нескольких ближайших звезд (от 5 до 15). Такое определение наиболее удобно при компьютерных экспериментах, но, конечно, является неудовлетворительным. В. Зонн и К. Рудницкий [22] предлагали сглаживать «гравитационное поле» (потенциал, как ясно из их рис. 59). Возможность корректного проведения такой процедуры вызывала сомнения [17], хотя соответствующая техника и разрабатывалась [23, 24].

Наиболее удовлетворительным кажется первоначальное определение Эддингтона [12], согласно которому регулярная сила — это сила притяжения сплошной гравитирующей среды, получающейся «размазыванием» по системе.

Но сразу же встает вопрос о том, как производить размазывание, то есть как определять плотность $\varrho(\mathbf{r})$ в данной точке пространства в дискретной системе, на который давались различные ответы.

Традиционным является использование с этой целью такой величины, как *макроскопический элемент объема* [25, 26] (аналога *физически бесконечно малого объема* современной механики сплошных сред). Однако хотя это понятие является интуитивно понятным, оно логически противоречиво [15], к тому же оно требует достаточно высокой плотности звезд. Модификацией такого «наивного» подхода является метод экстраполяции к нулевому расстоянию [27].

Подобным же образом можно ввести и другие величины, описывающие звездную систему как сплошную среду (скорость центроида, тензор дисперсий остаточных скоростей) [28]. И. Л. Генкин [17] предлагал равномерно размазывать массы звезд внутри ячейки Дирихле–Вороного (области ближайшего соседа), а затем усреднить получающуюся плотность (ступенчатую функцию) за интервал времени порядка среднего времени пролета от звезды к звезде.

Принципиально иной подход связан с введением вероятностных представлений [29]. Пусть N гравитирующих точечных масс, составляющих звездную систему, распределены в пространстве в соответствии с некоторым вероятностным законом $p(\mathbf{r})$, так что вероятность обнаружить в области D хотя бы одну звезду

$$P(D) = \int_D p(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}.$$

Тогда плотность числа звезд $n(\mathbf{r}) = Np(\mathbf{r})$.

Вероятностный подход приводит еще к одному определению регулярных сил [18,30]. Сила $\mathbf{F}$, действующая в каждый момент времени на пробную звезду, является случайной величиной, распределенной в данной точке системы по некоторому закону $\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{r})$. Тогда регулярная (или средняя) сила в данной точке

$$\mathbf{F}_{\text{reg}}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{F}\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{r})\, d^3\mathbf{F}, \tag{1.1}$$

а иррегулярная сила — это разность между полной и регулярной силой. Из результатов Дж. Л. Камма [31] следует совпадение этого определения с предыдущим. Применив к некоторым одномерным моделям технику, разработанную С. Чандрасекаром и И. фон Нейманом [32], Г. Кандруп [18] вычислил среднюю силу (1.1), а затем исследовал функцию распределения флуктуирующей силы $\mathcal{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{reg}}$. Он заключил, что функция распределения флуктуирующей силы подтверждает, что разделение силы на случайную и среднюю носит объективный характер: закон распределения случайной силы не зависит от средней силы.

§ 2. Время пересечения

Как известно (например, [33]), характерным временем действия регулярных сил является так называемое *время пересечения*:

$$\tau_c = (R^3/G\mathcal{M})^{1/2}, \tag{2.1}$$

где G — гравитационная постоянная, $\mathcal{M}$ — масса системы, R — ее характерный размер. Это выражение следует из общих соображений размерностей [34]. Иногда используется другое выражение

$$\tau_c' = \frac{1}{(G\overline{\varrho})^{1/2}}\,, \tag{2.2}$$

где $\overline{\varrho}$ — средняя плотность. Если $\overline{\varrho} = \mathcal{M}/(\frac{4}{3}\pi R^3) \approx \mathcal{M}/(4R^3)$, то $\tau_c' = 2\tau_c$. Определение (2.2) имеет то преимущество, что размер R, входящий в (2.1), — весьма неопределенное понятие. В звездной динамике часто пользуются моделями бесконечной протяженности (а иногда и моделями бесконечной полной массы). Между тем средняя плотность $\overline{\varrho}$ (хотя бы в основной, интересующей нас части системы) — это более «осязаемая» величина. Заменяя в (2.2) среднюю плотность на локальную, можно определить локальное время пересечения. Так имеет смысл поступать в тех случаях, когда свойства системы в разных частях существенно отличаются. Тогда мы сможем, например, сравнить скорость динамической эволюции центра и окраины системы.

Каков механический смысл времени пересечения? Как известно, оно характеризует периоды орбитального обращения типичной звезды в регулярном поле [33]. Так, пусть пробная звезда движется на расстоянии R от центра по круговой орбите под действием точечной массы $\mathcal{M}$. Тогда период обращения звезды $P = 2\pi\tau_c$. Теперь пусть звезда движется по прямолинейной орбите, проходящей через центр, внутри однородного шара радиуса R и массы $\mathcal{M}$. Тогда период орбитальных колебаний

$$P' = 2\pi\tau_c = \pi\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\tau_c'.$$

Это соотношение оправдывает термин «время пересечения».

Более существенно, однако, что время пересечения характеризует коллективные процессы в системе. Проиллюстрируем это, следуя пионерской работе С. Чандрасекара и Д. Эльберт [35] (см. также [36]). Рассмотрим сферически симметричную систему. Запишем уравнение Лагранжа–Якоби с учетом сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\mathcal{E} - W. \tag{2.3}$$

Здесь I — (барицентрический) момент инерции, $\mathcal{E}$ — полная, W — потенциальная энергия. Из соображений размерности можно записать, что $I = \mathcal{M}R_i^2$, $W = -G\mathcal{M}^2/R_g$, R_i — радиус инерции, R_g — размер, характеризующий степень концентрации системы к ядру (для однородного шара радиуса a, как известно, $R_g = (5/3)a$, в случае же точечной массы R_g стремится к бесконечности). Тогда $W = -G\mathcal{M}^{5/2}\lambda I^{-1/2}$, где $\lambda = R_i/R_g$, и уравнение (2.3) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2I}{dt^2} = 4\mathcal{E} + G\mathcal{M}^{5/2}\lambda I^{-1/2}. \tag{2.4}$$

Будем считать, что $\lambda = \mathrm{const}$ (так будет, если система, например, все время остается однородным шаром переменного радиуса). По предложению В. А. Антонова автор [37] назвал это условие предположением квазигомологичности. Тогда мы не сможем исследовать, например, эволюцию с образованием структуры «гало–ядро», но такое предположение допустимо при исследовании малых отклонений от равновесия. Точную модель нелинейно колеблющегося однородного звездного шара первыми построили В. А. Антонов и С. Н. Нуритдинов [38].

Уравнение (2.4) — это уравнение одномерного движения материальной точки с координатой I. Для него существует интеграл энергии (при $\lambda = \mathrm{const}$), после чего задача сводится к квадратурам. Для стационарных систем

$$I = I_0 = \frac{\lambda^2 G^2 \mathcal{M}^5}{4(-\mathcal{E})^2}\,,$$

что означает выполнение теоремы вириала. Положим $I = I_0 + \delta I$, $|\delta I| \ll I_0$. После линеаризации уравнения (2.4) получим

$$(\delta I)^{\cdot\cdot} = -\lambda \frac{G\mathcal{M}^{5/2}}{I_0^{3/2}}\,\delta I.$$

Отсюда находим, что частота колебаний

$$\omega_I = \left(8\lambda G\mathcal{M}/R_i^3\right)^{1/2},$$

а тогда период

$$P_I = \frac{\pi}{\sqrt{2\lambda}}\left(\frac{R_i^3}{G\mathcal{M}}\right)^{1/2},$$

то есть имеет порядок времени пересечения, если параметр λ порядка единицы, а R в (2.1) — это R_i. Приближенно оценить эффект отклонения от квазигомологичности (когда $\lambda = \lambda(t)$) можно, записав для уравнения (2.4) соответствующий адиабатический инвариант. Классы моделей распределения масс в звездных системах, для которых можно считать, что $\lambda = \mathrm{const}$, описаны автором [39].

§ 3. Квазиэнтропия

Традиционно считалось, что регулярные силы определяют детерминированную эволюцию звездных систем, например сжатие [40, 41]. Выше мы упоминали об осцилляционных моделях. Вообще говоря, гравитирующим системам присуща «склонность» к колебаниям (например, [42]), о чем догадывался еще Якоби [3]. Движение звезды в регулярном периодически меняющемся поле можно уподобить колебаниям маятника, испытывающего периодические внешние толчки. Известно, что такие колебания могут стать непредсказуемыми (так называемое отображение Чирикова–Тейлора, см. [43]). Имея в виду, в частности, приведенный выше пример, мы не можем согласиться с противоположным утверждением в [44]. Реальные галактики постоянно испытывают внешние возмущения, которые являются случайными и возбуждают колебания регулярного поля. Сложные нелинейные процессы (например, взаимодействие мод) приводят к тому, что орбиты звезд становятся хаотическими и в системе происходит стохастизация [45].

По-видимому, Д. Линден-Белл [46] одним из первых ясно понял, что под действием регулярных сил звездные системы могут испытывать статистически необратимую эволюцию, которую назвал *бурной релаксацией*, и разработал статистическую механику такого процесса. В дальнейшем теорию развивали другие авторы (например, [47–49]), но сами ее основы до настоящего времени вызывают некоторые сомнения [50]. Неясен и основной физический механизм стохастизации.

В сущности, в теории бурной релаксации ставится задача отыскания максимума функционала

$$S = -\iint \tilde{f} \ln \tilde{f}\, d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}, \tag{3.1}$$

где $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — так называемая крупнозернистая фазовая плотность, получающаяся усреднением обычной (тонкозернистой) функции распределения по макроскопическим ячейкам фазового пространства. Подобный аналог больцмановской энтропии (H-функции, взятой с обратным знаком) для несжимемых фазовых потоков ввели в классическую статистическую механику А. Пуанкаре, а затем П. и Т. Эренфесты (см. [51]). Для звездных систем она первоначально обсуждалась в [52, 53].

Утверждение о возрастании больцмановской энтропии (H-теорема Больцмана) следует, как известно, из газокинетического уравнения Больцмана и рассматривается как фундаментальный закон природы [54, 55]. Доказано, что это единственный функционал, монотонно возрастающий в силу уравнения Больцмана [56]. Если же иррегулярными силами (столкновениями молекул в идеальном газе) пренебрегать (вообще, если справедлива теорема Лиувилля), то тонкозернистая фазовая плотность постоянна вдоль фазовой траектории; в этом и состоит теорема Джинса для звездных систем [33], тогда больцмановская энтропия является тождественной константой, поэтому введение ее аналога согласно (3.1) кажется естественным.

Р. Толман [57] доказал при некоторых условиях возрастание этого функционала. Однако заранее не видно, что функционал (3.1) имеет какие-либо преимущества (физические или формальные) перед другими функционалами. И. фон Нейман [58] вскользь предложил рассматривать в функционале (3.1) вместо $\ln \tilde{f}$ произвольную выпуклую функцию $C(\tilde{f})$. Руководствуясь, вероятно, этим замечанием, А. Я. Хинчин [59] исследовал функционал

$$\mathcal{K} = -\iint C(\tilde{f})\tilde{f}\, d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} \tag{3.2}$$

и доказал «эволюционную теорему» о возрастании функционала (3.2) по сравнению с начальным значением. Появился и ряд других исследований этого функционала [60].

Если постулировать, что эволюция представляет собой марковский случайный процесс, то монотонное возрастание функционала (3.2) можно строго доказать [60–62]. Очевидно, однако, что далеко не всякая эволюция звездной системы в поле меняющихся со временем регулярных сил может рассматриваться как марковский процесс. Вопрос о природе необратимости («молекулярного хаоса», понимаемого в расширенном смысле) обсуждался, в частности, В. А. Антоновым [63].

Независимо от упомянутых работ В. А. Антонов [64] рассмотрел в своей диссертации функционал (3.2) и назвал его *квазиэнтропией*. Будем далее пользоваться этим термином. Некоторые свойства квазиэнтропии указаны в [65, 66]. Позднее этот функционал ввели в звездную динамику в статье [67]. Предполагая, что в начальный момент t_0 тонкозернистое распределение совпадает с крупнозернистым, и используя свойство выпуклости функции $C(\tilde{f})$, авторы этой работы доказали, что для любого $t_1 > t_0$

$$\mathcal{K}(t_1) \geqslant \mathcal{K}(t_0)$$

(что, как отмечалось выше, первым установил еще А. Я. Хинчин [59]). Но монотонность возрастания квазиэнтропии отсюда не следует, на что сразу же обратили внимание ряд авторов [68–70]. Действительно, если для некоторого $t_2 \in (t_0, t_1)$ имеем $\mathcal{K}(t_2) > \mathcal{K}(t_0)$, то это не означает, что $\mathcal{K}(t_1) > \mathcal{K}(t_2)$. С. Шридхар [69] даже привел пример убывающей квазиэнтропии.

Легко доказывается, что максимальное значение квазиэнтропии не увеличивается. Следуя неопубликованным лекциям В. А. Антонова (1975), рассмотрим первую и вторую вариации квазиэнтропии. Будем искать максимум функционала (3.2) при условиях сохранения массы

$$\mathcal{M} = \iint \tilde{f}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v},$$

энергии

$$\mathcal{E} = \iint v^2 \tilde{f}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v} - \frac{1}{2}\, G \iiiint \frac{\tilde{f}\tilde{f}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v}\, d^3\mathbf{r}'\, d^3\mathbf{v}'$$

и момента импульса системы

$$\mathbf{L} = \iint (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\tilde{f}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v}.$$

Вводя неопределенные множители k_1, k_2, $\mathbf{k}_3$, ищем первую вариацию функции Лагранжа

$$\mathfrak{L} = \mathcal{K} + k_1\mathcal{M} + k_2\mathcal{E} + \mathbf{k}_3\mathbf{L} \tag{3.3}$$

и приравняем ее нулю. Получим, что

$$C'(\tilde{f}) = -k_1 - k_2 E - \mathbf{k}_3\mathbf{l}, \tag{3.4}$$

где E — (удельная) энергия пробной звезды, а $\mathbf{l}$ — ее (удельный) момент импульса. Выберем систему координат так, что $\mathbf{k}_3$ направлено по оси z, оси вращения. Тогда

$$\frac{1}{2}\, k_2(u^2+v^2+w^2) - k_3(xv-yu) = \frac{1}{2}\, k_2\left[\left(u-\frac{k_3}{k_2}y\right)^2 + \left(v+\frac{k_3}{k_2}x\right)^2\right] - \frac{k_3^2}{2k_2}\,(x^2+y^2),$$

где u, v, w — проекции вектора скорости на оси x, y, z. Вводя в плоскости x, y систему координат, вращающуюся с угловой скоростью $\omega = k_3/k_2$, перепишем (3.4):

$$C'(\tilde{f}) = -k_1 - k_2(E-\omega l). \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что для невращающихся систем ($\omega = 0$) максимум квазиэнтропии возможен только при изотропном распределении скоростей.

Переопределяя квазиэнтропию, будем для простоты считать, что $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Тогда имеем из (3.5)

$$C''(\tilde{f}) = \frac{d}{d\tilde{f}}\,(E-\omega l).$$

Далее, для простоты будем считать, что $\omega = 0$, и обозначим $\tilde{f}(\mathbf{r},\mathbf{v}) = F(E)$, так что

$$C''(\tilde{f}) = \frac{1}{F'(E)}\,. \tag{3.6}$$

Плотность

$$\varrho = \int F\left(\frac{1}{2}\, v^2 - \Phi\right)\, d^3\mathbf{v}$$

(Φ — регулярный потенциал) и $\dfrac{d\varrho}{d\Phi} = -\displaystyle\int \frac{dF}{dE}\, d^3\mathbf{v}$.

Согласно известному неравенству Коши–Буняковского,

$$\left(\int \delta\tilde{f}\, d^3\mathbf{v}\right)^2 \leqslant \int \frac{(\delta\tilde{f})^2}{|dF/dE|}\, d^3\mathbf{v}\cdot\int\left|\frac{dF}{dE}\right|\, d^3\mathbf{v}.$$

Будем считать, что $dF/dE < 0$, как это имеет место в известных физически правдоподобных моделях. Тогда

$$\int \frac{(\delta\tilde{f})^2}{-F'(E)}\, d^3\mathbf{v} \geqslant \frac{\left(\int \delta\tilde{f}\, d^3\mathbf{v}\right)^2}{d\varrho/d\Phi} = \frac{(\delta\varrho)^2}{d\varrho/d\Phi}\,. \tag{3.7}$$

Теперь ищем вторую вариацию функции Лагранжа (3.3):

$$\delta_2\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\iint C''(\tilde{f})(\delta\tilde{f})^2\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v} + \frac{1}{2}G\iiiint \frac{\delta\tilde{f}\,\delta\tilde{f}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v}\, d^3\mathbf{r}'\, d^3\mathbf{v}'.$$

Подставляя сюда выражение (3.6) и учитывая неравенство (3.7), получаем

$$\delta_2\mathfrak{L} \geqslant \frac{1}{2}\left[-\int \frac{(\delta\varrho)^2}{d\varrho/d\Phi}\, d^3\mathbf{r} + G\iint \frac{\delta\varrho\,\delta\varrho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{r}'\right]. \tag{3.8}$$

Если окажется, что для произвольных вариаций плотности $\delta\varrho$ вторая вариация $\delta_2\mathfrak{L}$ отрицательна, то из этого следует, что квазиэнтропия действительно достигла максимального значения. Напротив, если с помощью неравенства (3.8) мы установим, что $\delta_2\mathfrak{L} > 0$ хотя бы для некоторого $\delta\varrho$, то это означает, что данное состояние не является наивероятнейшим.

По-видимому, единственный пример приложения данных соотношений дал В. А. Антонов [71]. Он рассмотрел политропный шар со сферическим распределением скоростей (модель Эддингтона), когда фазовая плотность

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = F(E) \propto (E_0 - E)^{n-3/2}, \qquad E_0 = \text{const}, \qquad n \in (3/2, 3),$$

n — индекс политропы. В качестве квазиэнтропии брался функционал

$$\int f^{(2n-1)/(2n-3)}\, d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v}.$$

Был сделан вывод, что эволюция вдоль последовательности политроп невозможна без поступления в систему дополнительной энергии.

Уравнение для изменения квазиэнтропии (но без явного учета законов сохранения) вывел Н. Сокер [70]. Из него можно получить соотношение для $\delta\mathfrak{L}$. Но для того чтобы решать это уравнение, надо знать, как меняется крупнозернистая функция распределения (не удовлетворяющая обычному бесстолкновительному кинетическому уравнению). П.-А. Шаванис с соавторами [72] с этой целью перенесли на гравитирующие системы *принцип максимума производства энтропии*, согласно которому система в ходе эволюции стремится увеличить скорость возрастания своей энтропии, насколько это совместимо с ограничениями, накладываемыми динамикой.

Для квазиэнтропии (3.2) отсюда приходим к уравнению $\delta_2\mathfrak{L} = 0$, которое, по-видимому, никем не исследовалось. Сам Шаванис рассмотрел функционал (3.1) [73]. Постулируя, что крупнозернистое распределение меняется случайным образом (гипотеза обобщенного «молекулярного хаоса», [63]), он получил и исследовал уравнение типа диффузионного, которое может описывать бурную релаксацию. Н. Сокер [70] вслед за авторами работы [67] показал, что в начальный момент квазиэнтропия возрастает (независимо от закона взаимодействия частиц), а для произвольного момента времени нашел, что для возрастания квазиэнтропии необходимо, чтобы более плотные области в среднем сжимались, а более разреженные — расширялись.

§ 4. Фазовое размешивание

Обычно считается, что под действием регулярных сил система приходит в состояние, как говорят, динамического равновесия [74]. Такой процесс происходит за несколько времен пересечения и называется размешиванием [74, 75].

В то же время понятие размешивания было введено Э. Хопфом в эргодической теории (например, [6, 76, 77]) для описания перехода динамических систем к статистическому равновесию, на полукачественном уровне обсуждавшемуся Дж. Гиббсом [78]. Конкретнее: под размешиванием понимается расплывание выделенной части фазового пространства по допустимой для движения инвариантной области (обычно изоэнергетической поверхности). По Н. С. Крылову [79], размешивание является необходимым условием того, чтобы система N взаимодействующих точечных масс достигла состояния статистического равновесия (см. также [80]).

Поскольку в гравитирующих системах эволюция под действием регулярных сил может сопровождаться стохастизацией, естественно называть *размешиванием* именно такого рода эволюцию. Но в большом числе работ под общим названием размешивания объединяются, в сущности, весьма различные процессы. Поэтому целесообразно дать классификацию видов размешивания [81]. Такую классификацию предложили В. А. Антонов и др. [65, 66, 82]. Основой классификации служит степень нестационарности системы.

Размешивание в условиях сильной нестационарности предлагалось назвать *принудительным* (compulsive). Обсуждавшаяся выше бурная релаксация является ее наиболее важным частным случаем. По-видимому, роль этого размешивания тем больше, чем сильнее начальная нестационарность. При принудительном размешивании каждый выделенный элемент фазового пространства меняется случайным образом. В некотором приближении можно рассмотреть деформацию такого элемента как результат действия ряда случайных толчков. В простейших случаях такую деформацию можно описать, рассматривая произведение случайных матриц [83–85].

Размешивание при слабой нестационарности можно представить как результат возмущений в движениях отдельных звезд или целых фазовых элементов, вызванных, например, волнами плотности [86]. От обычных иррегулярных сил такое явление отличается большей согласованностью в движениях отдельных звезд. Такой процесс был назван *квазидиффузией*. Чаще всего квазидиффузия исследуется как действие иррегулярных сил (например, с помощью уравнения Фоккера–Планка), но при этом легко теряется отмеченная выше специфика процесса. С. Н. Нуритдинов [83, 87] подчеркивает, что в отличие от принудительного размешивания при квазидиффузии амплитуда возмущения возрастает не экспоненциально, а по степенному закону. К квазидиффузии следует отнести и процессы так называемой коллективной релаксации, впервые исследовавшиеся Л. С. Марочником [88, 89], а также, по-видимому, явления, обсуждавшиеся С. Тримейном и Дж. Острайкером [90].

Размешивание возможно и при стационарном потенциале. Орбиты звезд в стационарном регулярном поле могут не быть условно-периодическими, навивающимися в шестимерном фазовом пространстве на так называемые инвариантные торы, но по теории Колмогорова–Арнольда–Мозера такие торы существуют. Между ними находятся области, в которых движения звезд являются более сложными. С удалением от устойчивых периодических орбит такие области увеличиваются в размерах, и в конце концов они образуют «эргодическое море». Считают, что соответствующие орбиты являются хаотическими. Строго говоря, из эргодичности еще не следует размешивание в смысле эргодической теории [6], а последнее еще не означает расходимости близких траекторий, но обычно этим различием можно пренебречь. Размешивание, происходящее в эргодических областях фазового пространства неинтегрируемых потенциалов, называют *дивергентным*.

В настоящее время исследование дивергентного размешивания в реалистических моделях звездных систем возможно только с помощью компьютерных экспериментов. Одну из первых таких работ выполнил Д. Пфеннигер [91]. Он нашел, что дивергентное размешивание ускоряет действие иррегулярных сил примерно в 1000 раз. В этой работе и продолжающей ее статье [92] для выявления хаотических орбит впервые в звездной динамике определялись *показатели Ляпунова*. Пусть $\mathbf{x} = (x_i)$, $i = \overline{1, n}$ — вектор фазовых координат в n-мерном фазовом пространстве, $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0, t)$ — общее решение уравнений движения, $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0, t_0) = \mathbf{x}_0$. Рассмотрим фазовую траекторию с немного другими начальными условиями:

$$\mathbf{x} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0, t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_0, t_0, t).$$

Обозначим $D(\mathbf{x}_0, t_0, t) = \|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\|$, $D_0 = D(\mathbf{x}_0, t_0, t_0)$. Пусть

$$\lambda(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to t_0} \lim_{D_0 \to 0} (t - t_0)^{-1} \cdot \ln \frac{D(\mathbf{x}_0, t_0, t)}{D_0}\,. \tag{4.1}$$

Можно доказать, что если орбиты ограничены, то предел (4.1) существует [93]. Кроме того, доказано, что в n-мерном фазовом пространстве существуют n-мерное многообразие, в котором предел (4.1) равен некоторому числу λ_1; $n - 1$-мерное многообразие, в котором он равен

$\lambda_2 \leqslant \lambda_1$, и так далее до λ_n [93]. Числа $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ называются показателями Ляпунова первого порядка. Наибольший из них, λ_1, характеризует скорость расхождения близких траекторий. Для гамильтоновых систем, как известно, если λ — показатель Ляпунова, то показателем Ляпунова является и $(-\lambda)$. Для регулярных движений показатель Ляпунова отрицателен или равен нулю, а в хаотическом режиме он положителен. Для каждого изолирующего интеграла движения (например, для функции Гамильтона в случае стационарного потенциала) пара показателей Ляпунова обращается в нуль. Поэтому фазовые траектории в окрестности регулярной орбиты, для которой показатели Ляпунова нулевые, могут расходиться только линейно (в крайнем случае полиномиально). Если же показатель Ляпунова положителен, надо заключить, что траектория является «неправильной», то есть хаотической.

После работы С. Удри и Д. Пфеннигера [92] показатели Ляпунова вычислялись в большом числе работ. Выяснилось, что для осесимметричных потенциалов дивергентное размешивание, вообще говоря, не является типичным. Напротив, оно может быть существенным в динамике трехосных моделей галактик. Дж. Бинни и С. Лэйси [94] рассматривали дивергентное размешивание как своего рода диффузионный процесс.

Значительный интерес представляют результаты численных расчетов Г. Э. Кандрупа с соавторами (например, [95–97]) для различных трехосных моделей. В статье [95] был подтвержден вывод Д. Пфеннигера [91] о том, что квазидиффузия ускоряет действие иррегулярных сил. В работе [96] исследовалось изменение крупнозернистого фазового распределения. Было установлено, что сначала оно становится почти инвариантным, но в дальнейшем сохраняются флуктуации. Наконец, в [97] фактически наряду с дивергентным размешиванием учитывалась и квазидиффузия.

Своеобразное размешивание возможно, даже если регулярный потенциал является интегрируемым, а орбиты — условно-периодическими (например, для штеккелевских моделей, когда существует третий, квадратичный по скоростям интеграл). В таких случаях изображающие фазовые точки двигаются по поверхности топологического типа тора. Переходя к переменным «действие–угол» $\mathbf{J}$, $\boldsymbol{\psi}$, мы записываем, что функция Гамильтона $H = H(\mathbf{J})$, тогда уравнения движения следующие:

$$\dot{\mathbf{J}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}). \tag{4.2}$$

Значения переменных действия J_i определяют инвариантный тор, а $\omega_i(\mathbf{J})$ — угловые скорости (частоты) перемещения фазовых точек по тору. Вообще говоря, эти частоты зависят от $\mathbf{J}$ (исключением является случай гармонического осциллятора, что соответствует движению звезды внутри однородной гравитирующей системы).

Тогда луч в фазовом пространстве $\boldsymbol{\psi} = \mathrm{const}$ будет со временем превращаться во всё более круто свернувшуюся «змею», а затем плотно заполнит всю допустимую часть фазового пространства. О подобном процессе писал еще Дж. В. Гиббс [78]. Происходящее при этом размешивание называется *циркуляционным.* Фактически именно о нем писали Дж. Бил и М. Овенден [98]. Они рассмотрели эволюцию ансамбля звезд, движущихся по эпициклическим орбитам, с шварцшильдовским распределением скоростей. Значение радиальной скорости центроида, осциллируя, уменьшается до нуля, а скорость вращения достигает стационарного значения. Дисперсии радиальных и азимутальных скоростей колеблются, возрастают и становятся постоянными. Сходной по постановке является работа [99].

Заканчивая обсуждение действия регулярных сил, заметим, что они, вообще говоря, не приводят систему к состоянию в точности стационарному (даже при игнорировании иррегулярных сил). Вопрос об общих причинах эволюции самогравитирующих систем остается неясным. По мнению М. Н. Максумова, они, возможно, лежат в спонтанном нарушении симметрии неинтегрируемых систем, нарушении обратимости во времени, появляющейся при динамической неустойчивости из-за случайных возмущений. Однако применить эти общие положения пока удалось лишь к исследованию критичности маржинального состояния бесконечно тонкого диска [100].

§ 5. Классическое время релаксации

Выше мы предполагали, что влиянием иррегулярных сил можно пренебречь. Такое допущение основывается на классической теории иррегулярных сил Джинса–Чандрасекара (см. [33]). Согласно этой теории, в системе звезд одной и той же массы m характерное время действия иррегулярных сил τ_r, называемое *временем релаксации*, равно следующему выражению:

$$\tau_r = \frac{\sigma^3}{32\pi G^2 m^2 n\Lambda} \tag{5.1}$$

(в [33] числовой множитель в (5.1) иной, см. [19]). Здесь σ^2 — дисперсия скоростей звезд (в одном направлении), n — число звезд в единице объема, Λ — так называемый ньютоновский (в плазме — кулоновский) логарифм, получающийся при учете кумулятивного эффекта далеких сближений. Для галактик время релаксации, оцененное согласно (5.1), оказывается порядка 10^{13}–10^{14} лет, то есть практически бесконечно.

Известно, что при далеких сближениях можно пренебречь искривлением гиперболической орбиты [101] (приближение Джинса–Ландау). Тогда

$$\Lambda = \ln p_{\max}/p_{\min}, \tag{5.2}$$

где $p_{\max}$ — максимальное, а $p_{\min}$ — минимальное прицельные расстояния. На первый взгляд естественнее всего положить $p_{\min} = 0$, а $p_{\max} = \infty$, но тогда выражение (5.2) расходится. Как известно, расходимость при малых прицельных расстояниях является фиктивной, исчезающей при использовании точных формул гиперболической задачи двух тел (например, [102]). Однако кажется разумным при выборе $p_{\min}$ обратиться к соображениям А. С. Расторгуева и В. Н. Семенцова [103]. Звездные сближения с малыми прицельными расстояниями случаются очень редко (см. таблицу III в [33]). Тогда при оценке τ_r следует учитывать только такие сближения, которые заведомо произойдут за время τ_r. Используя теорему вириала, можно найти соответствующее $p_{\min}$, которое обозначим r_{rs}. Оказывается, что

$$\tau_r r_{rs}^2 = \frac{(1+\gamma^2)^{1/2}}{4\pi k_1 N}\,\frac{R^{7/2}}{(GM)^{1/2}}\,. \tag{5.3}$$

Здесь γ^2 — введенный К. Ф. Огородниковым [33] параметр, равный отношению кинетических энергий вращения и остаточных движений, безразмерный параметр k_1 зависит от хода плотности и формы системы и определяется из равенства $n = k_1 N/R^3$. Тогда, как легко убедиться, отличие $p_{\min} \approx r_{rs}$ от нуля не имеет практического значения.

Что касется наибольшего прицельного расстояния, то проще всего положить $p_{\max} = R$. Более обоснованными кажутся рассуждения в [104] (для плазмы аналогичными являются соображения в [105]). При вычислении τ_r следует учесть изменение импульса взаимодействующих звезд лишь за это время. Оно будет много меньше, чем полное изменение при движении вдоль всей гиперболической орбиты. Тогда для τ_r получается уравнение, аналитически решить которое не удается, однако расходимость при $p_{\max} \to \infty$ пропадает, даже если считать систему однородной.

Формально расходимость в (5.2) устранена. Но встает принципиальный вопрос: нужно ли вообще при оценке характерного времени действия иррегулярных сил рассматривать сближения с большими прицельными расстояниями? Автор считает более правильным положить $p_{\max}$ или среднему межзвездному расстоянию $N^{-1/3}$, или введенному К. Ф. Огородниковым расстоянию $\delta \approx RN^{-1/2}$, на котором иррегулярная сила становится равной регулярной. Сближения с большими прицельными расстояниями являются кратными, «принцип суперпозиции» справедлив лишь приближенно, вероятно, хуже всего на расстояниях порядка δ, и сближения нельзя рассматривать как изолированную задачу двух тел.

Учет внешнего воздействия (регулярных сил) представляет собой очень трудную задачу [106]. Однако уже первые попытки прямо исследовать, как регулярные силы влияют на оценку иррегулярных сил, привели к интересным результатам (например, ньютоновский логарифм перестал быть логарифмом) [107]. Дальнейшее развитие теории иррегулярных сил в этом направлении должно прояснить спорные вопросы.

Здесь же мы хотели бы подчеркнуть следующее. В соответствии с определением иррегулярных сил при исследовании двойных сближений мы должны из силы парного взаимодействия вычесть регулярную силу. Для близких сближений с прицельными расстояниями до типичных межзвездных расстояний влиянием регулярных сил можно пренебречь. Но уже для прицельных расстояний порядка δ, а тем более порядка размеров системы, коллективное действие огромного числа слабых «сближений» практически эквивалентно действию регулярной силы [108]. Наличие же отдельных звезд, то есть дискретность среды, проявляется как «шум», или флуктуации [109, 110].

Возвращаясь к выражению для ньютоновского логарифма (5.2), напомним, что, несмотря на ряд отмеченных выше принципиальных неясностей, практически при всех разумных выражениях для $p_{\max}$ и $p_{\min}$ оказывается, что $\Lambda \approx \ln N$ [19].

Вспоминая и критически анализируя классическую теорию звездных сближений, констатируем следующее. Единственный вывод, который с уверенностью можно сделать из теории Джинса–Чандрасекара, — это утверждение, что она неверна. В [111] явно сформулированы те предположения, на которых базируется эта теория и которые заведомо не выполняются.

Встает вопрос о том, нельзя ли оценить эффективность иррегулярных сил из общих принципов, не обращаясь к специальным допущениям классической теории. Сначала заметим, что с учетом теоремы вириала среднее по системе время релаксации (5.1)

$$\tau_r = \frac{\beta}{(1+\gamma^2)^{3/2}} \frac{N}{\ln N} \tau_c, \tag{5.4}$$

где

$$\beta = (3^{3/2} 32\pi k_1)^{-1},$$

k_1 определено выше. Отсюда сразу видно, что в системах большого числа звезд классическое время релаксации $\tau_r \gg \tau_c$, и если эта оценка верна, то действием иррегулярных сил можно пренебречь.

Из теории размерностей и простых динамических соображений в [34] выводится выражение, фактически эквивалентное (5.4) (без фактора γ). Более элементарным является следующее рассуждение. Иррегулярные силы обязаны дискретности системы. Единственный безразмерный параметр, связанный с дискретностью, — это число тел в системе N. Мы уже знаем параметр τ_c, имеющий размерность времени. Поэтому в простейшем случае характерное время τ', связанное с дискретностью (то есть характеризующее иррегулярные силы), должно иметь вид

$$\tau' = \tau_c f(N). \tag{5.5}$$

Вид функции $f(N)$ теория размерностей дать не может. Проще всего считать, что эта функция линейная, $f(N) \propto N$. Тогда приходим к времени (5.4) без логарифмического члена.

Ранее подобный подход применял Р. Курт [112], но он не заметил, что введенная им безразмерная величина

$$\xi = \sigma^2/(Gmn^{1/3})$$

(физический смысл которой неясен) выражается через число тел системы: $\xi \propto N^{2/3}/(1+\gamma^2)$. Аргументы Курта, что

$$\tau' \propto \xi^2$$

(а $\tau'/\tau_c \propto N^{1/3}$), не представляются убедительными, а динамическое обоснование им подобного соотношения кажется по меньшей мере спорным.

В любом случае мы считаем, что в теории иррегулярных сил следует развивать новые подходы, учитывающие воздействие регулярного поля. И. Л. Генкин [113] перенес на однородные звездные системы результаты С. Чандрасекара [114] по теории диффузии и нашел, что эффективное время действия иррегулярных сил τ_e существенно уменьшается,

$$\tau_e \propto \tau_c N^{1/3} \tag{5.6}$$

(то есть имеет вид (5.5) с $f(N) \propto N^{1/3}$). Аналогичный результат получен в [115]. В. А. Антонов в упоминавшихся выше неопубликованных лекциях получил это соотношение из более общих соотношений. Идея данного подхода состоит в том, что регулярные силы действуют как мощный внешний ускоритель обычной медленной диффузии в пространстве скоростей (то есть иррегулярных сил) подобно тому, как помешивание ложкой ускоряет расплывание капли краски в стакане воды.

Б. С. Сагинтаев и О. В. Чумак [116, 117] в интересном цикле работ исследовали иррегулярные силы с помощью уравнения Ланжевена. Фазовые координаты звезды рассматривались как случайные величины, изменение которых определяется стохастическим уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla\Phi + \mathbf{A}, \tag{5.7}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — случайная сила. Для определенности система считалась сферической. Орбиты при $\mathbf{A} = 0$ предполагались известными, например круговыми или близкруговыми, а случайная сила $\mathbf{A}$ в (5.7) рассматривалась как малое возмущение. После линеаризации уравнение (5.7) превращалось в уравнение Ланжевена. Затем при различных предположениях находились статистические характеристики случайных величин — фазовых координат. К сожалению, эти работы не привели к новым физическим результатам.

§ 6. Эффективная стохастизация в гравитирующих системах

Практическую бесконечность классического времени релаксации (5.1) К. Ф. Огородников [26, 33] назвал *парадоксом классической звездной динамики*. Предлагался ряд подходов к его решению [118]. Один из них, обсуждавшийся в § 4, состоит в исследовании фазового размешивания в бесстолкновительных (или слабо столкновительных) звездных системах. Другой подход сводится к ревизии теории Джинса–Чандрасекара.

Весьма общий способ исследования стохастизации в звездных системах был предложен В. Г. Гурзадяном и Г. К. Саввиди [119] и далее обсуждался и развивался рядом авторов (например, [103, 120–122]). В этих работах существенными являются два момента.

Во-первых, на гравитирующие системы переносится подход Н. С. Крылова [79], сводящий проблему релаксации к исследованию геодезических потоков. Согласно вариационному принципу механики де Мопертюи в форме Якоби [3], систему N взаимодействующих точечных масс можно рассматривать как точку в $3N$-мерном специальном римановом пространстве. Скалярная кривизна этого пространства [79, 119, 121]

$$\mathcal{R} = 3N(N-1)\left[-\frac{\Delta K}{3NK^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2N}\right)\frac{(\nabla K)^2}{K^3}\right]. \tag{6.1}$$

Здесь K — кинетическая энергия, рассматриваемая как функция координат, $K = \mathcal{E} - W$, $\mathcal{E}$ — полная энергия.

При стохастической эволюции поток будет расходиться, то есть будет размешивание в смысле эргодической теории. Более детально соотношение между экспоненциальной расходимостью, фазовым размешиванием и релаксацией обсуждается в [123]. В большом числе работ искалось, когда геодезический поток является размешивающимся (например, [124]). В частности, размешивание и экспоненциальная расходимость близких траекторий возможны, если $\mathcal{R} < 0$. Но нужно помнить, что из отрицательности кривизны еще не следует, что все траектории в римановом пространстве экспоненциально неустойчивы [125].

Для системы гравитирующих точечных масс

$$K = \mathcal{E} + G\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \qquad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Тогда
$$\Delta K = -4\pi G \sum_{i<j} m_i m_j \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Если пренебречь прямыми соударениями точек (как это сделано в [119] и последующих работах), то в (6.1) $\Delta K = 0$ и
$$\mathcal{R} = -3(3N-1)\,\frac{N-2}{4}\,\frac{(\nabla W)^2}{(\mathcal{E}-W)^3}\,, \tag{6.2}$$

а если $N \gg 1$, то
$$\mathcal{R} = -\frac{9}{4}\,N^2\frac{(\nabla W)^2}{(\mathcal{E}-W)^3}. \tag{6.3}$$

Если $N \geqslant 3$, то $\mathcal{R} < 0$, что указывает на формальную возможность стохастизации (очевидную из физических соображений) [120].

В принципе, строгий анализ выражения (6.2) дал бы достаточное представление о стохастизации системы под действием как регулярных, так и иррегулярных сил. Но в настоящее время это невозможно, и мы приходим ко второй особенности подхода [119], а именно к статистическому усреднению выражений (6.2) или (6.3).

В ходе эволюции конкретной системы N тел в каждый момент времени кинетическая и потенциальная энергии, как и $(\nabla W)^2$, принимают определенные значения. Поэтому кривизна $\mathcal{R}$ является функцией времени. Тогда можно усреднить $\mathcal{R}$ по времени. Так поступали Дж. Пукакко с соавторами [121]. При усреднении они получили бесстолкновительную систему, и не удивительно, что найденное в [121] время стохастизации оказалось порядка времени пересечения τ_c. Стохастизация, которая рассматривалась в этой работе, — это принудительное размешивание по нашей терминологии (§ 4), и фактически в [121] установлена его неизбежность.

С другой стороны, мы можем рассматривать кривизну как функцию точки в $3N$-мерном римановом пространстве (координатами в котором являются $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$). Вообразим ансамбль звездных систем с одним и тем же числом звезд N и одним и тем же значением энергии (микроканонический ансамбль классической статистической механики). Звезды в каждой системе распределены случайным образом, но по одному и тому же закону. Тогда для каждой системы кривизна $\mathcal{R}$ будет случайной величиной и мы можем усреднить $\mathcal{R}$ по ансамблю. В этом, по существу, состоит подход В. Г. Гурзадяна и Г. К. Саввиди [119], и мы следовали ему в [122].

Вместо потенциальной энергии W целесообразно ввести напряженность гравитационного поля $\mathbf{g}_i = -(\partial W/\partial \mathbf{r}_i)/m_i$, тогда $(\nabla W)^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i^2$. Для простоты считаем, что массы всех звезд одинаковы и равны m. Следуя С. Чандрасекару [114], введем в качестве единицы ускорения величину $a^{2/3}$ по формуле
$$a = \frac{4}{15}\,(2\pi G m)^{3/2} n.$$

Безразмерное ускорение $y_i = g_i/a^{2/3}$. Сила, действующая на каждую звезду, является случайной величиной. Предположим, что известна функция распределения безразмерного случайного ускорения $F(y)$. Обозначим через c средний квадрат безразмерной случайной величины y:
$$c = \int_0^\infty y^2 F(y)\,dy. \tag{6.4}$$

Усреднение (6.3) по ансамблю дает, что
$$\langle \mathcal{R} \rangle = -\frac{9N^3}{4(-\mathcal{E})^3}\,m a^{4/3} c.$$

Угловые скобки означают усреднение. При этом мы предположили, что справедлива теорема вириала. Поэтому мы в принципе не сможем теперь исследовать такие процессы, как принудительное размешивание, при которых существенную роль играет нестационарность регулярного поля (в отличие от [121]). Геометрические соображения [119,121] показывают, что характерное время стохастизации таково:

$$\tau_e = \frac{3}{2}\, N \left(\langle|\mathcal{R}|\rangle K^2\right)^{-1/2}.$$

Подставляя сюда выражение для $\langle\mathcal{R}\rangle$, приходим к формуле, справедливой для любого закона плотности [122]:

$$\tau_e = s\,\frac{N^{1/3}}{c^{1/2}}\,\tau_c, \tag{6.5}$$

где числовой множитель $s = s_0 k_2^{1/2} k_1^{2/3}$, $s_0 \approx 0.272$, k_2 находится из равенства $W = -k_2 G\mathcal{M}^2/R$, $\mathcal{M}$, W, R по-прежнему масса, потенциальная энергия и характерный размер системы, а τ_c по-прежнему время пересечения. Таким образом, задача сводится к нахождению $c = c(N)$.

На первый взгляд средний квадрат безразмерного ускорения зависит только от безразмерного закона распределения звезд в системе и не зависит от числа звезд. Тогда из (6.5) находим, что для любой системы $\tau_e/\tau_c \propto N^{1/3}$, что ранее получил И. Л. Генкин [113]. Но эти общие соображения нуждаются в подкреплении конкретными расчетами.

Естественно в первую очередь рассмотреть пространственно однородные системы. Известно, что закон распределения случайного ускорения дается в этом случае функцией Хольцмарка $H(y)$ (например, [114,126]), причем ее хорошей аппроксимацией является закон распределения ускорения от ближайшего соседа

$$W(y) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{y^{5/2}}\,\exp\left(-\frac{1}{y^{5/2}}\right). \tag{6.6}$$

При вычислении c по (6.4) в обоих случаях получаем расходящиеся интегралы. С. Чандрасекар [114] заметил, что в случае тесных сближений (что соответствует большим y) распределение Хольцмарка перестает быть справедливым, так как не учитывает коррелированность звездных скоростей. Вопрос о влиянии корреляций на распределение случайной силы подробно обсуждался (для плазмы) в [126]. При использовании же распределения Хольцмарка для вычисления c приходится обрезать это распределение (или $W(y)$) на некотором y_c. Полученные результаты (зависимость $c(N)$) существенно зависят от выбора y_c. Примеры приведены в [122]. Единственное обрезание, имеющее, на наш взгляд, физический смысл, было предложено А. С. Расторгуевым и В. Н. Семенцовым [103]. Возьмем в качестве минимального прицельного расстояния величину r_{rs}, определенную аналогично (5.3) с заменой τ_r на τ_e. Тогда

$$\tau_e \propto N^{1/5}\tau_c.$$

Данная зависимость получается аналитически при использовании для распределения случайной силы функции (6.6) в пределе $N \to \infty$ [122], но, как нашла Д. В. Овод [127,128], она остается верной и при использовании функции Хольцмарка.

Конечно, более правильным было бы использовать в (6.4) более точное при больших y выражение для функции $F(y)$. И. В. Петровская [129] получила закон распределения случайной силы при сильных сближениях исходя из найденного Т. А. Агекяном [130] выражения для вероятности звездного сближения с заданным изменением модуля скорости. Нас не вполне удовлетворяет вывод этого распределения (в особенности сделанные при этом допущения), но мы воспользовались им. Воспроизводя ход рассуждений И. В. Петровской, полученное ею распределение можно записать в следующем виде:

$$P(y) = B\,\frac{1}{y^3}\,\exp\left(-\frac{3}{2}\,\alpha^2 y^2\right), \qquad y \gg 1,$$

где $\alpha = Qk_1^2(1+\gamma^2)N^{-2/3}$, $B = 4\sqrt{6\pi}/(k_1 Q^2)$, $Q \approx 2.6031$. По Петровской,

$$F(y) = C \begin{cases} H(y), & y \leqslant y^*, \\ P(y), & y > y^*. \end{cases} \tag{6.7}$$

Здесь $H(y)$ по-прежнему распределение Хольцмарка, C — нормировочная константа, y^* — это значение безразмерного ускорения, при котором распределения Хольцмарка и Петровской совпадают.

Расчеты, выполненные Д. В. Овод [127, 128] на основе распределения (6.7), показали, что время пересечения τ_c и время эффективной стохастизации τ_e являются величинами одного порядка только в системах с числом звезд порядка 10^4–10^5. Интересно, что в системах с N от 10^3 до 10^5 с увеличением N время стохастизации немного уменьшается [127], что получалось при численных экспериментах [131, 132] и представлялось странным. Затем с увеличением N стохастизация замедляется. Если представить отношение τ_e/τ_c формулой

$$\tau_e/\tau_c = kN^p,$$

то оказалось, что $p \approx 0.30$. Выполнялись также расчеты с обрезанием распределения (6.7) на радиусе Расторгуева–Семенцова (5.3). Оказалось, что при этом результаты практически не меняются, чего и следовало ожидать.

Пусть $N \gg 1$. Существенно, что параметр распределения Петровской $\alpha = O(N^{-2/3})$, а стыковочный параметр y^* и нормировочная константа C остаются конечными. Простые расчеты показали [133, 134], что тогда средний квадрат безразмерного ускорения

$$c \approx \frac{2}{3} CB \ln N$$

(при этом $H(y)$ заменялось на $W(y)$, что допустимо при больших y). Подстановка в (6.5) дает, что

$$\tau_e \propto \frac{N^{1/3}}{(\ln N)^{1/2}} \tau_c. \tag{6.8}$$

Зависимость $c(N)$ оказалась слабой, и, как видно из (6.8), для систем большого числа тел мы фактически приходим к шкале эволюции И. Л. Генкина [113] (5.6). Поскольку в пределах макроскопического элемента объема звездные системы можно считать однородными, для неоднородных систем, вероятно, справедливо соотношение, близкое к (6.8).

Такие системы, как наша Галактика, в рамках сделанных предположений приходится считать бесстолкновительными, и стохастизация в них происходит в первую очередь за счет регулярных сил. Однако столкновительная стохастизация должна быть существенной для эволюции шаровых скоплений и карликовых галактик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurth R. Introduction to the mechanics of stellar systems. London – New York – Paris: Pergamon Press, 1957. X+174 p.
2. Орлов В.В., Рубинов А.В. Задача N тел в звездной динамике. СПб.: ВВМ, 2008. 175 с.
3. Якоби К. Лекции по динамике. Л.–М.: ОНТИ, 1936. 272 с.
4. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 524 с.
5. Хильми Г.Ф. Проблема n тел в небесной механике и космогонии. М.: Изд. АН СССР, 1951. 156 с.
6. Жабко А.П., Кирпичников С.Н. Лекции по динамическим системам. Часть 4: Эргодическая теория. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 128 с.
7. Pollard H. The behavior of gravitational systems // J. Math. Mech. 1967. Vol. 17. № 6. P. 601–608.
8. Saari D.G. Expanding gravitational systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 156. P. 219–240.
9. Saari D.G. On oscillatory motion in gravitational systems // J. Diff. Equat. 1973. Vol. 14. № 2. P. 275–292.
10. Bonnor W.B. Jeans' formula for gravitational instability // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1957. Vol. 117. № 1. P. 104–116.
11. Пуанкаре А. Млечный Путь и теория газов // Наука и метод. СПб.: Изд-во Н.П. Карабасникова, 1910. С. 209–223.
12. Eddington A.S. The dynamics of globular stellar system // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1913. Vol. 74. № 1. P. 5–16.

13. Schwarzschild K. Stationäre Geschwindigkeitverteilung im Sternsystem // Probleme der Astronomie. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924. S. 94–105.
14. Герасимович Б.П. Статистические ансамбли звездной астрономии // Мироведение. 1931. Т. 20. № 1. С. 41–54.
15. Огородников К.Ф. Некоторые современные проблемы звездной динамики // Вестн. Ленинградск. ун-та. 1947. № 1. С. 5–16.
16. Агекян Т.А. Общие черты эволюции вращающихся систем гравитирующих тел // Астрон. ж. 1960. Т. 37. № 2. С. 317–326.
17. Генкин И.Л. Регулярные и иррегулярные силы в звездных системах // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР. 1971. Т. 16. С. 103–110.
18. Kandrup H.E. The complexion of forces in an anisotropic self-gravitating system // Astrophys. J. 1981. Vol. 244. № 3. P. 1039–1063.
19. Осипков Л.П. Принципиальные вопросы динамики галактик // Математические методы моделирования галактик: сб. статей. СПб: СОЛО. 2012. С. 68–112.
20. Ossipkov L.P. On some fundamental concepts of galactic dynamics // Astron. Nachr. 2013. Vol. 334. № 8. P. 793–799.
21. Ahmad A., Cohen L. Integration of the N body gravitational problem by separation of the force into a near and far component // Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 362. P. 304–312.
22. Зонн В., Рудницкий К. Звездная астрономия. М.: ИЛ, 1959. 448 с.
23. Braun W., Hepp K. The Vlasov equation and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles // Comm. Math. Phys. 1977. Vol. 56. № 2. P. 101–113.
24. Spohn H. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limit // Rev. Math. Phys. 1980. Vol. 53. № 3. P. 589–615.
25. Chandrasekhar S. New methods in stellar dynamics // Ann. New York Acad. Sci. 1943. Vol. 45. P. 131–161.
26. Огородников К.Ф. О принципиальной возможности обоснования статистической механики звездных систем // Астрон. ж. 1957. Т. 34. № 6. С. 809–819.
27. Агекян Т.А. Звездная статистика. Строение Галактики // Курс астрофизики и звездной астрономии. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. С. 427–480.
28. Осипков Л.П. Общие принципы математического моделирования звездных систем. СПб.: СОЛО. 2010. 102 с.
29. Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1968. 356 с.
30. Chavanis P.-H. Hamiltonian and Brownian systems with large-range interactions: III. The BBGKY hierarchy for spatially inhomogeneous systems // Physica A. 2008. Vol. 387. P. 787–805.
31. Camm G.L. Random gravitational forces in a star field // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1963. Vol. 126. № 3. P. 283–293.
32. Chandrasekhar S., von Neumann J. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. I. The speed of fluctuations // Astrophys. J. 1942. Vol. 95. № 3. P. 489–531.
33. Огородников К.Ф. Динамика звездных систем. М.: Физматгиз, 1958. 627 с.
34. Дибай Э.А., Каплан С.А. Размерности и подобие астрофизических величин. М.: Наука, 1976. 400 с.
35. Chandrasekhar S., Elbert D. Some elementary application of the virial theorem to stellar dynamics // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1972. Vol. 155. № 4. P. 435–447.
36. Осипков Л.П. Гросс-эволюция звездных скоплений // Звездные скопления и проблемы звездной эволюции: сб. статей. Свердловск: изд. Уральск. ун-та, 1983. С. 20–38.
37. Осипков Л.П. Малые вириальные колебания осесимметричных гравитирующих систем. I // Астрофизика. 2000. Т. 43. № 2. С. 293–302.
38. Антонов В.А., Нуритдинов С.Н. Нелинейные колебания некоторых однородных моделей звездных систем. I. Случай радиальных колебаний // Вестн. Ленинградск. ун-та. 1973. № 7. С. 131–138.
39. Осипков Л.П. Безразмерные функционалы для самогравитирующих систем // Динамика, оптимизация, управление (Вопросы механики и процессов управления, вып. 22): сб. статей. СПб.: изд. СПбГУ, 2004. С. 127–130.
40. Von der Pahlen E. Über die Enstehung der sphärischen Sternhaufen // Zeitschr. f. Astrophys. 1947. Bd. 24. H. 1/2. S. 68–120.
41. Kurth R. Über Sternsystemezeitlich ober räumlich veranderlicher Dichte // Zeitschr. f. Astrophys. 1949. Bd. 26. H. 1. S. 100–136.
42. Vandervoort P.O. Modes of oscillations of a uniformly rotating homogeneous spheroid of stars // Astrophys. J. 1991. Vol. 377. № 1. P. 49–71.

43. Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
44. Mathur S.D. Irreversibility due to mixing in collisionless systems // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1988. Vol. 231. № 2. P. 368–372.
45. Chernin A.D., Valtonen M.J., Zheng J.-Q., Ossipkov L.P. Dynamical evolution of N-body gravitational systems starting from Poincaré chaos // Stellar Dynamics: from classic to modern: сб. статей. Saint Petersburg: Sobolev Astron. Inst. 2001. P. 431–436.
46. Lynden-Bell D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1967. Vol. 136. № 1. P. 101–121.
47. Shu F.H. On the statistical mechanics of violent relaxation // Astrophys. J. 1978. Vol. 225. № 1. P. 83–94.
48. Ziegler H.J., Wiechen H. Collisionless relaxation of self-gravitating systems with spherically symmetric dynamics // Astrophys. J. 1990. Vol. 362. № 2. P. 595–603.
49. Hjorth J., Madsen J. Violent relaxation and stability of elliptical galaxies // Structure, dynamics and chemical evolution of elliptical galaxies: сб. статей. Garching: ESO. 1993. P. 263–272.
50. Arad I., Lynden-Bell D. Inconsistency in theories of violent relaxation // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2004. Vol. 362. № 2. P. 385–395.
51. Козлов В.В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 320 с.
52. Lynden-Bell D. The stability and vibrations of a gas of stars // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1962. Vol. 124. № 4. P. 279–296.
53. Генкин И.Л. Уравнение Власова и необратимость в физике плазмы и звездной динамике // Астрон. ж. 1969. Т. 46. № 6. С. 1228–1230.
54. Wehrl A. General properties of entropy // Rev. Modern Physics. 1978. Vol. 50. № 2. P. 221–260.
55. Grandy W.T. Principle of maximum entropy and irreversible processes // Physics Reports. 1980. Vol. 62. № 3. P. 175–266.
56. Веденяпин В.В. О единственности H-функции Больцмана // Препринт Ин-та прикладн. матем. АН СССР. 1977. № 3. С. 1–77.
57. Tolman R. The principles of statistical mechanics. 2nd ed. London: Oxford Univ. Press. 1957. V+310 p.
58. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 368 с.
59. Хинчин А.Я. Конвексные функции и эволюционные теоремы статистической механики // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1943. Т. 7. № 3. С. 111–122.
60. Penrose O. Foundations of statistical mechanics. A deductive treatment. Oxford: Pergamon Press, 1970. VII+260 p.
61. Marimoto T. Markov processes and the H-theorem // J. Phys. Soc. Japan. 1963. Vol. 18. № 3. P. 328–331.
62. Ramshow J.D. Irreversibility and general entropies // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 175. № 1. P. 170–171.
63. Antonov V.A. Individual and statistical aspects of star motion // Order and chaos in stellar and planetary systems. ASP Conf. Ser. Vol. 316. San Fransisco: ASP, 2004. P. 10–19.
64. Антонов В.А. Приложения вариационного метода к звездной динамике и некоторым другим проблемам: автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. Ленинград, 1963. 5 с.
65. Антонов В.А., Нуритдинов С.Н., Осипков Л.П. Классификация видов перемешивания в динамических системах // Динамика галактик и звездных скоплений: сб. статей. Алма-Ата: Наука, 1973. С. 55–59.
66. Antonov V.A., Nuritdinov S.N., Ossipkov L.P. On the classification of phase mixing in collisionless stellar systems // Astron. Astrophys. Transact. 1995. Vol. 7. № 2/3. P. 177–180.
67. Tremaine S., Hénon M., Lynden-Bell D. H-functions and mixing in violent relaxation // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1986. Vol. 219. № 2. P. 285–297.
68. Kandrup H.E. An H-theorem for violent relaxation? // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1987. Vol. 225. № 4. P. 995–998.
69. Sridhar S.D. Does H-function always increase during violent relaxation? // J. Astrophys. Astron. 1987. Vol. 8. № 1. P. 257–262.
70. Soker N. H-function evolution in collisionless self-gravitating systems // Publ. Astron. Soc. Pacific. 1990. Vol. 102. № 652. P. 639–645.
71. Антонов В.А. Устойчивость сферических скоплений по отношению к возмущениям конечной амплитуды // Вопросы небесной механики и звездной динамики: сб. статей. Алма-Ата: Наука, 1990. С. 66–70.

72. Chavanis P.-H., Sommeria J., Robert R. Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems // Astrophys. J. 1996. Vol. 385. № 1. P. 385–399.
73. Chavanis P.-H., Bouchet F. On the coarse-grained evolution of collisionless stellar systems // Astron. Astrophys. 2005. Vol. 430. № 1. P. 271–287.
74. Eddington A.S. The dynamical evolution of stellar systems // Astron. Nachr. 1921. Jubiläumsnummer. S. 9–10.
75. Кузмин Г.Г. Эффект сближений звезд и эволюция звездных скоплений // Публ. Тартуск. астрон. обсерв. 1957. Т. 33. № 2. С. 75–102.
76. Lebowitz J.L., Penrose O. Modern ergodic theory // Physics Today. 1973. Vol. 26. № 2. P. 23–29.
77. Wightman A.S. Statistical mechanics and ergodic theory: an expository lecture // Statistical mechanics at the turn of the decade: сб. статей. New York: M. Dekker Inc., 1971. P. 1–32.
78. Гиббс Дж.В. Основные принципы статистической механики, изложенные со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
79. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1950. 208 с.
80. Goldstein S., Lebowitz J.A., Aizenman M. Ergodic properties of infinite systems // Dynamical systems, theory and applications. Lecture Notes in Physics. Vol. 38. Berlin: Springer, 1975. P. 112–143.
81. Осипков Л.П. Фазовое размешивание второго рода в звездных системах. I // Астрофизика. 1972. Т. 8. № 1. С. 139–147.
82. Осипков Л.П. О физическом смысле некоторых видов размешивания в звездных системах // Астрон. ж. 1975. Т. 52. № 4. С. 275–278.
83. Нуритдинов С.Н. О фазовом перемешивании в нелинейных нестационарных звездных системах // Астрон. циркуляр. 1979. № 1081. С. 1–2.
84. Kirbigekova I.I. Non-linear, non-radial evolution of disk-like models of galaxies // Astron. Astrophys. Transact. 1995. Vol. 7. № 4. P. 299–301.
85. Mirtadjieva K.T., Kirbijekova I.I., Nuritdinov S.N. Towards theory of compulsive phase mixing for non-stationary stellar systems // Order and chaos in stellar and planetary systems. ASP Conf. Ser. Vol. 316. San Francisco: ASP, 2004. P. 363–365.
86. Sellwood J.A., Preto M. Scattering of stars by transient spiral waves // Disks of galaxies: kinematics, dynamics and perturbations. ASP Conf. Ser. Vol. 275. San Francisco: ASP. 2002. P. 94–105.
87. Nuritdinov S.N. On the role of chaos and instability in the evolution of nonlinear nonstationary stellar systems // Instability, chaos and predictability in Celestial Mechanics and Stellar Dynamics. Commack (N.Y.): Nova Sci. Publ., 1993. P. 39–44.
88. Марочник Л.С. О релаксации звездных систем без звездно-звездных сближений // Докл. АН ТаджССР. 1967. Т. 10. № 8. С. 15–17.
89. Марочник Л.С. О релаксации звезд плоских подсистем Галактики на спиральной структуре // Астрофизика. 1969. Т. 5. № 3. С. 497–498.
90. Tremaine S., Ostriker J.P. Relaxation in stellar systems and the shape and rotation of the inner disk halo // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1999. Vol. 306. № 4. P. 662–668.
91. Pfenniger D. Relaxation and dynamical friction in non-integrable stellar systems // Astron. Astrophys. 1986. Vol. 165. № 1–2. P. 74–83.
92. Udry S., Pfenniger D. Stochasticity in elliptical galaxies // Astron. Astrophys. 1988. Vol. 198. № 1. P. 135–149.
93. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Московск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 179–210.
94. Binney J., Lacey C. The diffusion of stars through phase space // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1988. Vol. 230. № 4. P. 597–627.
95. Kandrup H.E., Wilmes D.E. Collisional relaxation in non-integrable potential // Astron. Astrophys. 1994. Vol. 283. № 1. P. 59–66.
96. Mahon M.E., Abernathy R.A., Bradley B.O., Kandrup H.E. Transient ensemble dynamics in time-dependent galactic potential // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1995. Vol. 275. № 2. P. 443–453.
97. Habib S., Kandrup H.E., Mahon M.E. Chaos and noise in galactic potential // Astrophys. J. 1997. Vol. 480. № 1. P. 155–166.
98. Byl J., Ovenden M.W. Time variations of the velocity distribution due to phase mixing // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1973. Vol. 164. № 3. P. 289–294.
99. Осипков Л.П. Эволюция движущихся скоплений в регулярном поле Галактики // Звездные агрегаты: сб. статей. Свердловск: Изд. Уральск. гос. ун-та, 1980. С. 114–121.
100. Ivannikova E.I., Maksumov M.N. On the possible criticality of a marginally stable stellar disk // Stellar dynamics: from classic to modern. Saint Petersburg: Sobolev Astron. Institute, 2006. P. 367–373.

101. Serafin R.A. On the rectilinear non-collision motion // Cel. Mech. Dyn. Astron. 2001. Vol. 80. P. 97–108.
102. Микиша А.М., Цицин Ф.А. О формуле для времени релаксации // Вестн. Московск. ун-та. Сер. III. Физика. Астрономия. 1965. № 5. С. 74–77.
103. Расторгуев А.С., Семенцов В.Н. Оценка времени стохастизации звездных систем // Письма в Астрон. ж. 2006. Т. 32. № 1. С. 16-19.
104. Ostriker J.P., Davidson A.F. Time of relaxation. I. Unbounded medium // Astrophys. J. 1968. Vol. 151. № 1. P. 679–686.
105. Сивухин Д.В. Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме // Вопросы теории плазмы. 1964. Т. 4. С. 81–187.
106. Караяниди А.Д. О влиянии внешнего фона на сближение двух тел // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР. 1982. Т. 39. С. 30–37.
107. Сагинтаев Б.С., Чумак О.В. Некоторые кинетические эффекты в неоднородных гравитирующих системах // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР. 1983. Т. 40. С. 12–20.
108. Charlier C.V.L. Statistical mechanics based on the law by Newton // Lunds Univ. Årskraft. 1917. Bd. 13. № 5. S. 1–88.
109. Kandrup H.E. Discreteness fluctuations and relaxation in stellar dynamical systems // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1988. Vol. 235. № 4. P. 1151–1167.
110. Weinberg M.D. Nonlocal and collective relaxation in stellar systems // Astrophys. J. 1993. Vol. 410. № 2. P. 543–551.
111. Nelson R.W., Tremaine S. Linear response, dynamical friction, and the fluctuation dissipation theorem in stellar dynamics // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1999. Vol. 306. № 1. P. 1–21.
112. Курт Р. Анализ размерностей в астрофизике. М.: Мир. 1972. 232 с.
113. Генкин И.Л. Релаксация в регулярном поле // Докл. АН СССР. 1971. Т. 292. № 5. С. 1042–1044.
114. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ, 1947. 168 с.
115. Gurzadyan V.G., Kocharyan A.A. Collective relaxation of stellar systems revisited // Astron. Astrophys. 2009. Vol. 505. № 1. P. 203–205.
116. Сагинтаев Б.С., Чумак О.В. Стохастическая диффузия ансамбля круговых орбит // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР. 1984. Т. 43. С. 51–58.
117. Сагинтаев Б.С. Эволюция ансамбля орбит в присутствии иррегулярного поля с конечным временем корреляции // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР. 1988. Т. 49. С. 106–116.
118. Ossipkov L.P. On the fundamental paradox of stellar dynamics // Astron. Astrophys. Transact. 2006. Vol. 25. № 2–3. P. 123–128.
119. Gurzadyan V.G., Savvidi G.K. Collective relaxation in stellar systems // Astron. Astrophys. 1986. Vol. 160. № 1. P. 203–210.
120. Kandrup H.E. Divergence of nearby trajectories for the gravitational N-body problem // Astrophys. J. 1990. Vol. 364. № 2. P. 420–425.
121. Boccaletti D., Pucacco G., Ruffini R. Multiple relaxation time scales in stellar dynamics // Astron. Astrophys. 1991. Vol. 214. № 1. P. 48–51.
122. Осипков Л.П. Стохастизация в однородной гравиплазме // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2009. № 2. С. 93–103.
123. Cipriani P., Pucacco G. Some critical remarks on relaxation in N-body simulation // Nuovo Cimento. 1994. Vol. 109 B. № 3. P. 325–330.
124. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многобразиях отрицательной кривизны // Труды Математ. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1967. Т. 40. С. 1–210.
125. Pfenniger D. Order and chaos in N-body systems // N-body problem and gravitational dynamics. Paris: Observ. de Paris, 1993. P. 1–8.
126. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы. М.: Мир, 1977. 432 с.
127. Овод Д.В. О релаксации в регулярном поле звездных систем // Процессы управления и устойчивость. Труды XLI Международн. научн. конференции аспирантов и студентов: сб. статей. СПб.: изд. СПбГУ. 2010. С. 199–203.
128. Ovod D.V. On relaxation in stellar systems // Astron. Tsirkulyar. 2012. № 1571. P. 1–3.
129. Петровская И.В. Функция распределения силы, действующей на звезду, для сильных взаимодействий // Письма в Астрон. ж. 1986. Т. 12. № 7. С. 562–565.
130. Агекян Т.А. Вероятность звездного сближения с заданным изменением абсолютной скорости // Астрон. ж. 1959. Т. 36. № 1. С. 41–53.
131. Kandrup H.E. Stochastic properties of the gravitational N-body problem // Astron. Astrophys. Transact. 1995. Vol. 7. № 4. P. 225–228.

132. Goodman J., Heggie D.C., Hut P. On the exponential instability of the gravitational N-body system // Astrophys. J. 1993. Vol. 415. № 2. P. 715–733.
133. Ossipkov L.P. Effective stochastization time for stellar systems with large number of stars // Astron. Tsirkulyar. 2012. № 1578. P. 1–3.
134. Ovod D.V., Ossipkov L.P. Stochastization in gravitating systems // Astron. Nachr. 2013. Vol. 334. № 8. P. 799–804.

Поступила в редакцию 16.01.2014

Осипков Леонид Петрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра космических технологий и прикладной астродинамики, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 35.
E-mail: leonidosipkow@yahoo.com

L. P. Ossipkov
Irregular and regular forces in stellar systems

Keywords: dynamics of stellar systems, modelling stellar systems, evolution of galaxies.

MSC: 70F15, 85A05

Various ways of definition of irregular (random) and regular (smoothed) forces in stellar systems are critically discussed. The most satisfactory is Eddington's one according to which the regular force is an attraction force of a continuous fluid resulting from spreading a stellar mass over a system. Also, a definition of the regular force as a mathematical expectation of a random force is of interest. It is emphasized that the crossing time, τ_c, a time scale of regular forces, characterizes the rate of collective processes in the system, including collisionless relaxation, that (as a rule) occurs in gravitating systems. The quasi-entropy, i.e., a result of averaging of an arbitrary convex function of a coarse-grained distribution function over the phase space, is discussed as a measure of collisionless stochastization. For non-rotating systems the maximum of quasi-entropy can be reached only for isotropic velocity distributions. Formulas for the first and second variations of quasi-entropy, found by Antonov, are given. If there exists the density variation so that the second variation of quasi-entropy is positive, then the present state of the system is not the most probable. It follows from this assertion that evolution along a sequence of polytropic spheres is not possible without some energy input to the system. We recall the classification of forms of the phase mixing in collisionless systems.

The problem of collisional relaxation in gravitating systems is briefly discussed. We state the approach to its analysis on the basis of studying geodesic flows and the ensemble averaging as the next step, which requires the knowledge of distribution of a random force. To avoid truncation of Holtsmark's distribution at small impact parameters the distribution of random force by Petrovskaya was used. In that case the ratio of the effective stochastization time to the crossing time is proportional to $N^{1/3}/(\ln N)^{1/2}$ where $N \gg 1$ is the number of stars in the system. This evolutionary time scale is close to the one found earlier by Genkin.

REFERENCES

1. Kurth R. *Introduction to the mechanics of stellar systems*, London – New York – Paris: Pergamon Press, 1957, X+174 p.
2. Orlov V.V., Rubinov A.V. *Zadacha N tel v zvezdnoi dinamike* (N body problem in stellar dynamics), Saint Petersburg: Izd. VVM, 2008, 175 p.
3. Jacobi C.G.J. *Vorlesungen über Dynamik*, Zweite Ausgabe, Berlin: Verlag von G. Reiner, 1884. Translated under the title *Lektsii po dinamike*, Leningrad–Moscow: ONTI, 1936, 272 p.
4. Wintner A. *The analytical foundations of celestial mechanics*, Princeton (NJ): Princeton Univ. Press, 1941. Translated under the title *Analiticheskie osnovy nebesnoi mekhaniki*, Moscow: Nauka, 1967, 524 p.
5. Hilmy H.F. *Problema n tel v nebesnoi mekhanike i kosmogonii* (N body problem in celestial mechanics and cosmogony), Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1951, 156 p.

6. Zhabko A.P., Kirpichnikov S.N. *Lektsii po dinamicheskim sistemam. Chast' 4: Ergodicheskaya teoriya* (Lectures on dynamical systems. Part 4: Ergodic theory), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2004, 128 p.

7. Pollard H. The behavior of gravitational systems, *J. Math. Mech.*, 1967, vol. 17, no. 6, pp. 601–608.

8. Saari D.G. Expanding gravitational systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 156, pp. 219–240.

9. Saari D.G. On oscillatory motion in gravitational systems, *J. Diff. Equat.*, 1973, vol. 14, no. 2, pp. 275–292.

10. Bonnor W.B. Jeans' formula for gravitational instability, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1957, vol. 117, no. 1, pp. 104–116.

11. Poincaré H. La Voie Lactée et la théorie de gaz, *Bull. Soc. Astron. France*, 1906, vol. 20, pp. 153–165.

12. Eddington A.S. The dynamics of globular stellar system, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1913. vol. 74, no. 1, pp. 5–16.

13. Schwarzschild K. Stationäre Geschwindigkeitverteilung im Sternsystem, *Probleme der Astronomie*, Berlin: Verlag von Julius Springer, 1924, pp. 94–105.

14. Gerasimovich B.P. Statistical ensembles of stellar astronomy, *Mirovedeniye*, 1931, vol. 20, no. 1, pp. 41–54 (in Russian).

15. Ogorodnikov K.F. Some modern problems of stellar dynamics, *Vestn. Leningrad. Univ.*, 1947, no. 1, pp. 5–16 (in Russian).

16. Agekyan T.A. General features of the evolution of rotating systems of gravitating bodies, *Sov. Astronomy — AJ*, 1960, vol. 4, no. 2, pp. 298–307.

17. Genkin I.L. Regular and irregular forces in star systems, *Trudy Astrofiz. Inst. Akad. Nauk Kazakh. SSR*, 1971, vol. 16, pp. 103–110 (in Russian).

18. Kandrup H.E. The complexion of forces in an anisotropic self-gravitating system, *Astrophys. J.*, 1981, vol. 244, no. 3, pp. 1039–1063.

19. Ossipkov L.P. Principle problems of galactic dynamics, *Matematicheskie metody modelirovaniya galaktik* (Mathematical methods of modelling galaxies), Saint Petersburg: SOLO, 2012, pp. 68–112.

20. Ossipkov L.P. On some fundamental concepts of galactic dynamics, *Astron. Nachr.*, 2013, vol. 334, no. 8, pp. 793–799.

21. Ahmad A., Cohen L. Integration of the N body gravitational problem by separation of the force into a near and far component, *Lecture Notes in Mathematics*, 1974, vol. 362, pp. 304–312.

22. Zonn W., Rudnicki K. *Astronomia gwiazdowa*, Warszawa: Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1957. Translated under the title *Zvezdnaya astronomiya*, Moscow: Inostr. Literatura, 1959, 448 p.

23. Braun W., Hepp K. The Vlasov equation and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles, *Comm. Math. Phys.*, 1977, vol. 56, no. 2, pp. 101–113.

24. Spohn H. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limit, *Rev. Math. Phys.*, 1980, vol. 53, no. 3, pp. 589–615.

25. Chandrasekhar S. New methods in stellar dynamics, *Ann. New York Acad. Sci.*, 1943, vol. 45, pp. 131–161.

26. Ogorodnikov K.F. On principles of statistical mechanics of stellar systems, *Sov. Astron. — AJ*, 1957, vol. 1, no. 6, pp. 787–795.

27. Agekyan T.A. Stellar statistics. Galaxy structure, *Kurs astrofiziki i zvezdnoi astronomii. Tom 2* (Course of astrophysics and stellar astronomy. Vol. 2), Moscow: Fizmatgiz, 1962, pp. 427–480.

28. Ossipkov L.P. *Obshchie printsipy matematicheskogo modelirovaniya zvezdnykh sistem* (General principles of mathematical modelling star systems), Saint Petersburg: SOLO, 2010, 102 p.

29. Vlasov A.A. *Statisticheskie funktsii raspredeleniya* (Statistical distribution functions), Moscow: Nauka, 1968, 356 p.

30. Chavanis P.-H. Hamiltonian and Brownian systems with large-range interactions: III. The BBGKY hierarchy for spatially inhomogeneous systems, *Physica A*, 2008, vol. 387, pp. 787–805.

31. Camm G.L. Random gravitational forces in a star field, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1963, vol. 126, no. 3, pp. 283–293.

32. Chandrasekhar S., von Neumann J. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. I. The speed of fluctuations, *Astrophys. J.*, 1942, vol. 95, no. 3, pp. 489–531.

33. Ogorodnikov K.F. *Dynamics of stellar systems*, London: Pergamon Press, 1965, 359 p.

34. Dibai E.A., Kaplan S.A. *Razmernosti i podobie astrofizicheskikh velichin* (Dimensions and similarity of astrophysical quantities), Moscow: Nauka, 1976, 400 p.

35. Chandrasekhar S., Elbert D. Some elementary application of the virial theorem to stellar dynamics, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1972, vol. 155, no. 4, pp. 435–447.

36. Ossipkov L.P. Gross-evolution of star clusters, *Zvezdnye skopleniya i problemy zvezdnoi evolyutsii* (Star clusters and problems of stellar evolution), Sverdlovsk: Ural State University, 1983, pp. 20–38.

37. Ossipkov L.P. Small virial oscillations of axisymmetric gravitating systems. I, *Astrophysics*, 2000, vol. 43, no. 2, pp. 215–221.

38. Antonov V.A., Nuritdinov S.N. Nonlinear oscillations of some homogeneous models of star systems. I. The case of radial oscillations, *Vestnik Leningrad. Univ.*, 1973, no. 7, pp. 131–138 (in Russian).

39. Ossipkov L.P. Dimensionless functionals for self-gravitating systems, *Dinamika, optimizatsiya, upravlenie. Voprosy mekhaniki i protsessov upravleniya, vyp. 22* (Dynamics, optimization, control. Problems of mechanics and control processes, iss. 22), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2004, pp. 127–130.

40. Von der Pahlen E. Über die Enstehung der sphärischen Sternhaufen, *Zeitschr. f. Astrophys.*, 1947, vol. 24, no. 1/2, pp. 68–120.

41. Kurth R. Über Sternsystemezeitlich ober räumlich veranderlicher Dichte, *Zeitschr. f. Astrophys.*, 1949, vol. 26, no. 1, pp. 100–136.

42. Vandervoort P.O. Modes of oscillations of a uniformly rotating homogeneous spheroid of stars, *Astrophys. J.*, 1991, vol. 377, no. 1, pp. 49–71.

43. Zaslavsky G.M. *Physics of chaos in Hamiltonian systems*, New York: Imperial College Press, 1998. Translated under the title *Fizika khaosa v gamil'tonovykh systemakh*, Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2004, 288 p.

44. Mathur S.D. Irreversibility due to mixing in collisionless systems, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1988, vol. 231, no. 2, pp. 368–372.

45. Chernin A.D., Valtonen M.J., Zheng J.-Q., Ossipkov L.P. Dynamical evolution of N-body gravitational systems starting from Poincaré chaos, *Stellar Dynamics: from classic to modern*, Saint Petersburg: Sobolev Astron. Inst., 2001, pp. 431–436.

46. Lynden-Bell D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1967, vol. 136, no. 1, pp. 101–121.

47. Shu F.H. On the statistical mechanics of violent relaxation, *Astrophys. J.*, 1978, vol. 225, no. 1, pp. 83–94.

48. Ziegler H.J., Wiechen H. Collisionless relaxation of self-gravitating systems with spherically symmetric dynamics, *Astrophys. J.*, 1990, vol. 362, no. 2, pp. 595–603.

49. Hjorth J., Madsen J. Violent relaxation and stability of elliptical galaxies, *Structure, dynamics and chemical evolution of elliptical galaxies*, Garching: ESO, 1993, pp. 263–272.

50. Arad I., Lynden-Bell D. Inconsistency in theories of violent relaxation, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2004, vol. 362, no. 2, pp. 385–395.

51. Kozlov V.V. *Teplovoe ravnovesie po Gibbsu i Puankare* (Heat equilibrium according to Gibbs and Poincaré), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2002, 320 p.

52. Lynden-Bell D. The stability and vibrations of a gas of stars, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1962, vol. 124, no. 4, pp. 279–296.

53. Genkin I.L. Vlasov equation and irreversibility in plasma physics and stellar dynamics, *Sov. Physics—Astronomy*, 1970, vol. 13, no. 6, pp. 962–963.

54. Wehrl A. General properties of entropy, *Rev. Modern Physics*, 1978, vol. 50, no. 2, pp. 221–260.

55. Grandy W.T. Principle of maximum entropy and irreversible processes, *Physics Reports*, 1980, vol. 62, no. 3, pp. 175–266.

56. Vedenyapin V.V. On the uniqueness of Boltzmann's H function, *Preprint Inst. Prikl. Mat. Akad. Nauk SSSR* (Preprint Inst. Applied Math. Acad. Sci. of the USSR), 1977, no. 3, pp. 1–77.

57. Tolman R. *The principles of statistical mechanics. 2nd ed.*, London: Oxford Univ. Press, 1957, v+310 p.

58. Von Neumann I. *Mathematische grundlagen der quantenmechanik*, Berlin: Verlag von Julius Springer, 1932. Translated under the title *Matematicheskie osnovy kvantovoy mekhaniki*, Moscow: Nauka, 1964, 368 p.

59. Khinchine A.Ya. Convex functions and evolutionary theorems of statistical mechanics, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1943, vol. 7, no. 3, pp. 111–122.

60. Penrose O. *Foundations of statistical mechanics. A deductive treatment*, Oxford: Pergamon Press, 1970, VII+260 p.

61. Marimoto T. Markov processes and the H-theorem, *J. Phys. Soc. Japan.*, 1963, vol. 18, no. 3, pp. 328–331.

62. Ramshow J.D. Irreversibility and general entropies, *Phys. Lett. A.*, 1993, vol. 175, no. 1, pp. 170–171.

63. Antonov V.A. Individual and statistical aspects of star motion, *Order and chaos in stellar and planetary systems*, ASP Conf. Ser., vol. 316, San Fransisco: ASP, 2004, pp. 10–19.

64. Antonov V.A. Applying the variational method to stellar dynamics and some other problems, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Leningrad, 1963, 5 p.

65. Antonov V.A., Nuritdinov S.N., Ossipkov L.P. Classification of mixing kinds in dynamical systems, *Dynamika galaktik i zvezdnykh skoplenii* (Dynamics of galaxies and star clusters), Alma-Ata: Nauka, 1973, pp. 55–59.

66. Antonov V.A., Nuritdinov S.N., Ossipkov L.P. On the classification of phase mixing in collisionless stellar systems, *Astron. Astrophys. Transact.*, 1995, vol. 7, no. 2/3, pp. 177–180.

67. Tremaine S., Hénon M., Lynden-Bell D. H-functions and mixing in violent relaxation, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1986, vol. 219, no. 2, pp. 285–297.

68. Kandrup H.E. An H-theorem for violent relaxation? *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1987, vol. 225, no. 4, pp. 995–998.

69. Sridhar S.D. Does H-function always increase during violent relaxation? *J. Astrophys. Astron.*, 1987, vol. 8, no. 1, pp. 257–262.

70. Soker N. H-function evolution in collisionless self-gravitating systems, *Publ. Astron. Soc. Pacific.*, 1990, vol. 102, no. 652, pp. 639–645.

71. Antonov V.A. Stability of spherical clusters relative to finite amplitude perturbations, *Voprosy nebesnoi mekhaniki i zvezdnoi dinamiki* (Problems of celestial mechanics and stellar dynamics), Alma-Ata: Nauka, 1990, pp. 66–70.

72. Chavanis P.-H., Sommeria J., Robert R. Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems, *Astrophys. J.*, 1996, vol. 385, no. 1, pp. 385–399.

73. Chavanis P.-H., Bouchet F. On the coarse-grained evolution of collisionless stellar systems, *Astron. Astrophys.*, 2005, vol. 430, no. 1, pp. 271–287.

74. Eddington A.S. The dynamical evolution of stellar systems, *Astron. Nachr.*, 1921, Jubiläumsnummer, pp. 9–10.

75. Kuzmin G.G. Effect of stellar encounters and evolution of star clusters, *Publ. Tartusk. Astron. Observ.*, 1957, vol. 33, no. 2, pp. 75–102 (in Russian).

76. Lebowitz J.L., Penrose O. Modern ergodic theory, *Physics Today*, 1973, vol. 26, no. 2, pp. 23–29.

77. Wightman A.S. Statistical mechanics and ergodic theory: an expository lecture, *Statistical mechanics at the turn of the decade*, New York: M. Dekker Inc., 1971, pp. 1–32.

78. Gibbs J.W. *Elementary principles of statistical mechanics developed with a special reference to the rational foundation of thermodynamics*, Yale: Yale Bicentennial Publ., 1902, XVII+436 p. Translated under the title *Osnovnye printsipy statisticheskoi mekhaniki so spetsial'nym prilozheniem k ratsional'nomu obosnovaniyu termodynamiki*, Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1946, 204 p.

79. Krylov N.S. *Works on foundations of statistical physics*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1979, VI+160 p.

80. Goldstein S., Lebowitz J.A., Aizenman M. Ergodic properties of infinite systems, *Dynamical systems, theory and applications. Lecture Notes in Physics, vol. 38*, Berlin: Springer, 1975, pp. 112–143.

81. Ossipkov L.P. Phase mixing of the second kind in stellar systems. I, *Astrophysics*, 1972, vol. 8, no. 1. pp. 80–84.

82. Ossipkov L.P. On the physical interpretation of some kinds of mixing in stellar systems, *Sov. Astron. — AJ*, 1976, vol. 19, no. 4, pp. 530–532.

83. Nuritdinov S.N. On phase mixing in nonlinear nonstationary stellar systems, *Astron. Tsirkulyar*, 1979, no. 1081, pp. 1–2 (in Russian).

84. Kirbigekova I.I. Non-linear, non-radial evolution of disk-like models of galaxies, *Astron. Astrophys. Transact.*, 1995. vol. 7, no. 4, pp. 299–301.

85. Mirtadjieva K.T., Kirbijekova I.I., Nuritdinov S.N. Towards theory of compulsive phase mixing for non-stationary stellar systems, *Order and chaos in stellar and planetary systems*, ASP Conf. Ser., vol. 316, San Francisco: ASP, 2004, pp. 363–365.

86. Sellwood J.A., Preto M. Scattering of stars by transient spiral waves, *Disks of galaxies: kinematics, dynamics and perturbations*, ASP Conf. Ser., vol. 275, San Francisco: ASP, 2002, pp. 94–105.

87. Nuritdinov S.N. On the role of chaos and instability in the evolution of nonlinear nonstationary stellar systems, *Instability, chaos and predictability in Celestial Mechanics and Stellar Dynamics*, Commack (N.Y.): Nova Sci. Publ., 1993, pp. 39–44.

88. Marochnik L.S. On relaxation of stellar systems without star-star encounters, *Dokl. Akad. Nauk Tadjik. SSR*, 1967, vol. 10, no. 8, pp. 15–17 (in Russian).

89. Marochnik L.S. Relaxation of stars in plane subsystems of the Galaxy in the spiral structure, *Astrophysics*, 1969, vol. 5, no. 3, pp. 242–246.

90. Tremaine S., Ostriker J.P. Relaxation in stellar systems and the shape and rotation of the inner disk halo, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1999, vol. 306, no. 4, pp. 662–668.

91. Pfenniger D. Relaxation and dynamical friction in non-integrable stellar systems, *Astron. Astrophys.*, 1986, vol. 165, no. 1–2, pp. 74–83.

92. Udry S., Pfenniger D. Stochasticity in elliptical galaxies, *Astron. Astrophys.*, 1988, vol. 198, no. 1, pp. 135–149.

93. Oseledets V.I. Multiplicative ergodic theorem. Lyapounov exponents for dynamical systems, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1968, vol. 19, pp. 179–210 (in Russian).

94. Binney J., Lacey C. The diffusion of stars through phase space, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1988, vol. 230, no. 4, pp. 597–627.

95. Kandrup H.E., Wilmes D.E. Collisional relaxation in non-integrable potential, *Astron. Astrophys.*, 1994, vol. 283, no. 1, pp. 59–66.

96. Mahon M.E., Abernathy R.A., Bradley B.O., Kandrup H.E. Transient ensemble dynamics in time-dependent galactic potential, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1995, vol. 275, no. 2, pp. 443–453.

97. Habib S., Kandrup H.E., Mahon M.E. Chaos and noise in galactic potential, *Astrophys. J.*, 1997, vol. 480, no. 1, pp. 155–166.

98. Byl J., Ovenden M.W. Time variations of the velocity distribution due to phase mixing, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1973, vol. 164, no. 3, pp. 289–294.

99. Ossipkov L.P. Evolution of moving clusters in the regular field of the Galaxy, *Zvezdnye agregaty* (Star aggregates), Sverdlovsk: Ural State University, 1980, pp. 114–121.

100. Ivannikova E.I., Maksumov M.N. On the possible criticality of a marginally stable stellar disk, *Stellar dynamics: from classic to modern*, Saint Petersburg: Sobolev Astron. Institute, 2006, pp. 367–373.

101. Serafin R.A. On the rectilinear non-collision motion, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 2001, vol. 80, pp. 97–108.

102. Mikisha A.M., Tsitsin F.A. On a formula for relaxation time, *Vestn. Moskovsk. Univ., Ser. III, Fizika, Astronomiya*, 1965, no. 5, pp. 74–77 (in Russian).

103. Rastorguev A.S., Sementsov V.N. Estimating the stochastization time in stellar systems, *Astronomy Letters*, 2006, vol. 32, no. 1, pp. 14–17.

104. Ostriker J.P., Davidson A.F. Time of relaxation. I. Unbounded medium, *Astrophys. J.*, 1968, vol. 151, no. 1, pp. 679–686.

105. Sivukhin D.V. Coulomb collisions in fully ionized plasmas, *Voprosy Teorii Plazmy*, 1964, vol. 4, pp. 81–187 (in Russian).

106. Karayanidi A.D. On the influence of external background on two-body encounters, *Trudy Astrofiz. Inst. Akad. Nauk Kazakh. SSR*, 1982, vol. 39, pp. 30–37 (in Russian).

107. Sagintaev B.S., Chumak O.V. Some kinetic effects in non-homogeneous gravitating systems, *Trudy Astrofiz. Inst. Akad. Nauk Kazakh. SSR*, 1983, vol. 40, pp. 12–20 (in Russian).

108. Charlier C.V.L. Statistical mechanics based on the law by Newton, *Lunds Univ. Årskraft*, 1917, vol. 13, no. 5, pp. 1–88.

109. Kandrup H.E. Discreteness fluctuations and relaxation in stellar dynamical systems, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1988, vol. 235, no. 4, pp. 1151–1167.

110. Weinberg M.D. Nonlocal and collective relaxation in stellar systems, *Astrophys. J.*, 1993, vol. 410, no. 2, pp. 543–551.

111. Nelson R.W., Tremaine S. Linear response, dynamical friction, and the fluctuation dissipation theorem in stellar dynamics, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1999, vol. 306, no. 1, pp. 1–21.

112. Kurth R. *Dimensional analysis and group theory in astrophysics*, Oxford: Pergamon Press, 1972. Translated under the title *Analiz razmernostei v astrofizike*, Moscow: Mir, 1972, 232 p.

113. Genkin I.L. Relaxation in a regular field, *Sov. Phys. — Doklady*, 1971, vol. 16, pp. 261–262.

114. Chandrasekhar S. Stochastic problems in physics and astronomy, *Rev. Mod. Phys.*, 1943, vol. 15, no. 1, pp. 1–89. Translated under the title *Stokhasticheskie problemy v fizike i astronomii*, Moscow: Inostr. Literatura, 1947, 168 p.

115. Gurzadyan V.G., Kocharyan A.A. Collective relaxation of stellar systems revisited, *Astron. Astrophys.*, 2009, vol. 505, no. 1, pp. 203–205.

116. Sagintaev B.S., Chumak O.V. Stochastic diffusion of an ensemble of circular orbits, *Trudy Astrofiz. Inst. Akad. Nauk Kazakh. SSR*, 1984, vol. 43, pp. 51–58 (in Russian).

117. Sagintaev B.S. Evolution of an ensemble of orbits in an irregular field with a finite correlation time, *Trudy Astrofiz. Inst. Akad. Nauk Kazakh. SSR*, 1988, vol. 49, pp. 106–116 (in Russian).

118. Ossipkov L.P. On the fundamental paradox of stellar dynamics, *Astron. Astrophys. Transact.*, 2006, vol. 25, no. 2–3, pp. 123–128.

119. Gurzadyan V.G., Savvidi G.K. Collective relaxation in stellar systems, *Astron. Astrophys.*, 1986, vol. 160, no. 1, pp. 203–210.

120. Kandrup H.E. Divergence of nearby trajectories for the gravitational N-body problem, *Astrophys. J.*, 1990, vol. 364, no. 2, pp. 420–425.

121. Boccaletti D., Pucacco G., Ruffini R. Multiple relaxation time scales in stellar dynamics, *Astron. Astrophys.*, 1991, vol. 214, no. 1, pp. 48–51.

122. Ossipkov L.P. Stochastization in homogeneous graviplasmas, *Vestn. St-Peterbg. Univ., Ser. 10, Prikl. Mat. Inf. Prots. Upr.*, 2009, no. 2, pp. 93–103 (in Russian).

123. Cipriani P., Pucacco G. Some critical remarks on relaxation in N-body simulation, *Nuovo Cimento*, 1994, vol. 109 B, no. 3, pp. 325–330.

124. Anosov D.V. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 1967, vol. 40, pp. 1–210 (in Russian).

125. Pfenniger D. Order and chaos in N-body systems, *N-body problem and gravitational dynamics*, Paris: Observ. de Paris, 1993, pp. 1–8.

126. Ekker G. *Theory of fully ionized plasmas*, New York–London: Academic Press, 1972. Translated under the title *Teoriya polnost'yu ionizovannoi plazmy*, Moscow: Mir, 1977, 432 p.

127. Ovod D.V. On relaxation in a regular field of star systems, *Protsessy upravleniya i ustoychivost'. Trudy XLI Mezhdunar. konferentsii aspirantov i studentov* (Control processes and stability. Proc. XLI Internat. sci. conference of postgraduate students and students), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2010, pp. 199–203.

128. Ovod D.V. On relaxation in stellar systems, *Astron. Tsirkulyar*, 2012, no. 1571, pp. 1–3.

129. Petrovskaya I.V. The close–encounter force function, *Sov. Astron. Lett.*, 1986, vol. 12, no. 4, pp. 237–240.

130. Agekyan T.A. The probability of a stellar approach with a given change of the absolute velocity, *Sov. Astron. — AJ*, 1959, vol. 3, no. 1, pp. 46–58.

131. Kandrup H.E. Stochastic properties of the gravitational N-body problem, *Astron. Astrophys. Transact.*, 1995, vol. 7, no. 4, pp. 225–228.

132. Goodman J., Heggie D.C., Hut P. On the exponential instability of the gravitational N-body system, *Astrophys. J.*, 1993, vol. 415, no. 2, pp. 715–733.

133. Ossipkov L.P. Effective stochastization time for stellar systems with large number of stars, *Astron. Tsirkulyar.*, 2012, no. 1578, pp. 1–3.

134. Ovod D.V., Ossipkov L.P. Stochastization in gravitating systems, *Astron. Nachr.*, 2013, vol. 334, no. 8, pp. 799–804.

Received 16.01.2014

Ossipkov Leonid Petrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Space Technologies and Applied Astrodynamics, Saint Petersburg State University, Universitetskii pr., 35, Staryi Peterhof, Saint Petersburg, 198504, Russia.
E-mail: leonidosipkow@yahoo.com