УДК 517.935 + 517.938

© *А. Х. Хаммади*

ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНВАРИАНТНОСТИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Данная статья является продолжением работ Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова, в которых введено расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Это расширение состоит в исследовании множеств, которые не являются инвариантными в «классическом» смысле, но обладают свойством статистической инвариантности, а также в изучении статистических характеристик множества достижимости управляемой системы.

В данной работе рассматриваются характеристики, связанные с инвариантностью заданного множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ относительно управляемой системы, которые отражают свойство равномерности пребывания множества достижимости системы в множестве $\mathfrak{M}(\sigma)$ на конечном промежутке времени. Для управляемой системы со случайными коэффициентами получены оценки этих характеристик, выраженные в терминах функций Ляпунова, производной в силу дифференциального включения и динамической системы сдвигов. В частности, получены оценки, выполненные с вероятностью единица, для характеристик управляемой системы, которую будем называть системой с переключениями. Данную систему можно отождествить со стационарным случайным процессом, множество состояний которого конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности нахождения в каждом состоянии; длины промежутков между моментами переключения системы с одного состояния на другое являются случайными величинами с заданной функцией распределения. Рассматривается пример оценки исследуемых характеристик для линейной управляемой системы с переключениями.

Ключевые слова: управляемые системы со случайными коэффициентами, множество достижимости, динамическая система, дифференциальные включения.

Введение

Данная статья является продолжением работ [1–4], в которых введено расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Это расширение состоит в исследовании множеств, которые не являются инвариантными в классическом смысле, но обладают свойством статистической инвариантности. Напомним определения статистически инвариантных множеств для управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.1}$$

параметризованной топологической динамической системой (Σ, h^t); здесь Σ — полное метрическое пространство, h^t — поток на Σ. Обозначим через $D(t, \sigma, X)$ множество достижимости системы (0.1) в момент времени t при фиксированном $\sigma \in \Sigma$ из начального множества X. Инвариантность заданного множества $\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t, x) : t \geqslant 0, x \in M(h^t\sigma)\}$ понимается в статистическом смысле, то есть множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ является *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (0.1), если относительная частота поглощения множества достижимости $D\big(t, \sigma, M(\sigma)\big)$ системы(0.1) множеством $M(h^t\sigma)$ равна единице. Отметим также, что множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно системы (0.1), если для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется такое решение $\varphi(t, \sigma, x)$ этой системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, что верхняя относительная частота попадания данного решения в множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ равна единице.

Эта статья посвящена исследованию характеристик, связанных с инвариантностью множества достижимости управляемых систем со случайными коэффициентами. Получены оценки различных характеристик, выраженные в терминах функций Ляпунова, производной Кларка, динамической системы сдвигов и характеристик

$$\varkappa(\vartheta,\tau,\sigma) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : \, z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\tau}, \quad \varkappa(\tau,\sigma) \doteq \inf_{\vartheta \geqslant 0} \varkappa(\vartheta,\tau,\sigma),$$

которые отображают свойство равномерности нахождения верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(\sigma,0) = z_0(\sigma)$$

в множестве $(-\infty, 0]$.

Результаты работы могут найти применение в задачах, возникающих в биологии, экономике и технике, которые описываются следующей вероятностной моделью. Рассматривается управляемая система, которую можно отождествить со стационарным случайным процессом. Для этого процесса длины промежутков между моментами переключения с одного состояния на другое являются случайными величинами с заданной функцией распределения. Множество состояний процесса конечно; для него заданы начальное вероятностное распределение и вероятности нахождения в каждом состоянии. Представляет интерес получить оценки статистических характеристик множества достижимости управляемой системы, выполненные для всех значений $\sigma \in \Sigma$ и оценки, выполненные с заданной вероятностью.

§ 1. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемой системы на конечном промежутке времени

Исследуются характеристики инвариантности множества достижимости семейства управляемых систем

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad u \in U(h^t\sigma, x), \quad (t,\sigma,x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$.

В частности, будем изучать управляемую систему, порожденную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$ и функциями f и U. Напомним, что *метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Σ; h^t — *однопараметрическая группа измеримых преобразований* фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^tA \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, μ — вероятностная мера с носителем на пространстве Σ, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\mu(h^tA) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [5, с. 12]). Предполагаем, что множество Σ содержит бесконечное число элементов. Обозначим через $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространство непустых компактных подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Условие 1. Существует $\sigma \in \Sigma$, для которого выполнены перечисленные ниже свойства:

1) для каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $(x,u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(t,x) \to U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $\sigma \in \Sigma$ фиксировано и удовлетворяет условию 1. Рассмотрим соответствующее системе (1.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $H(h^t\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции $(t,x) \to f\big(h^t\sigma, x, U(h^t\sigma, x)\big)$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Далее, запись $\operatorname{co} H(h^t\sigma, x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $H(h^t\sigma, x)$.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Каждому множеству $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $D(t,\omega)$, где $\omega = (\sigma, X)$, состоящее из всех значений в момент t

решений $t \to \varphi(t,\sigma,x)$ включения (1.2), когда начальное условие $\varphi(0,\sigma,x) = x$ пробегает все множество X. Множество $D(t,\omega)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ интегральной воронки включения (1.2) и называется *множеством достижимости* управляемой системы (1.1). Предполагаем, что для заданного множества $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество $D(t,\omega)$ существует при всех $t \geqslant 0$; это означает, что для каждого $x \in X$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ дифференциального включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ введем в рассмотрение отображение $t \to M(h^t\sigma)$ со значениями в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество

$$\mathfrak{M}(\sigma) = \{(t,x) : t \geqslant 0,\ x \in M(h^t\sigma)\}.$$

Предполагаем, что функция $t \to M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа. Для заданных значений $\vartheta \geqslant 0$, $\tau > 0$, $\omega \in \Omega$ введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\vartheta,\tau,\omega) \doteq \bigl\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : D(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\bigr\}.$$

Определим характеристики, связанные с инвариантностью множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ на конечном промежутке времени.

Определение 1. *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t,\omega)$ системы (1.1) заданным множеством $\mathfrak{M}(\sigma)$ на отрезке $[\vartheta,\vartheta+\tau]$ будем называть характеристику

$$\operatorname{freq}(\vartheta,\tau,\omega) \doteq \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\tau,\omega)}{\tau} = \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : D(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\bigr\}}{\tau}.$$

Важно рассматривать относительную частоту $\operatorname{freq}(\vartheta,\tau,\omega)$ для любого момента времени $\vartheta \geqslant 0$, поэтому естественно для заданных $\tau > 0$ и $\omega \in \Omega$ определить характеристику

$$\operatorname{freq}(\tau,\omega) \doteq \inf_{\vartheta \geqslant 0} \operatorname{freq}(\vartheta,\tau,\omega) = \inf_{\vartheta \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : D(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\tau}.$$

Эта характеристика отличается от рассмотренных в предыдущих работах тем, что она отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,\omega)$ в множестве $\mathfrak{M}(\sigma)$ на отрезке заданной длины.

Пусть задано положительное число r. Обозначим через $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ замкнутую r-окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы $M(\sigma)$, также построим множество $\mathfrak{N}^r(\sigma) = \{(t,x) : t \geqslant 0,\ x \in N^r(h^t\sigma)\}$.

Определение 2 (см. [6]). Скалярная функция $x \to V(\sigma,x)$ называется *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $\mathfrak{M}(\sigma)$), если функция $(t,x) \to V(h^t\sigma,x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:
1) $V(h^t\sigma,x) \leqslant 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}(\sigma)$;
2) $V(h^t\sigma,x) > 0$ для некоторого $r > 0$ и всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r(\sigma)$.

Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x) \in \Sigma\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ называется следующий предел (см. [7, с. 17]):

$$V^o(\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)} \frac{V(h^\varepsilon\vartheta, y+\varepsilon q) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma,x) \doteq \inf\limits_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$, $V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \sup\limits_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$ называются *нижней* и *верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma,z), \quad z(0,\sigma) = z_0(\sigma) \tag{1.3}$$

в предположении, что выполнено следующее условие.

Условие 2. Существует $\sigma \in \Sigma$ такое, что имеют место следующие свойства:

1) для каждого $t \geqslant 0$ функция $z \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty;$$

2) для каждого $z \in \mathbb{R}$ функция $t \to w(h^t\sigma, z)$ кусочно-непрерывна.

Если условие 2 выполнено для заданного $\sigma \in \Sigma$, то существует верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (1.3), определенное для всех $t \in [0,\infty)$ (см. [4]).

Введем характеристику

$$\varkappa(\vartheta,\tau,\sigma) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\vartheta, \vartheta+\tau] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\tau},$$

которую назовем *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (1.3) в множестве $(-\infty, 0]$ на отрезке $[\vartheta, \vartheta+\tau]$. Будем также рассматривать характеристику

$$\varkappa(\tau,\sigma) \doteq \inf_{\vartheta\geqslant 0} \varkappa(\vartheta,\tau,\sigma) = \inf_{\vartheta\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\vartheta, \vartheta+\tau] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\tau},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ в множестве $(-\infty, 0]$.

Теорема 1. *Пусть для $\sigma \in \Sigma$ выполнены условия 1, 2 и для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения включения (1.2), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x) \leqslant w\bigl(\sigma, V(\sigma,x)\bigr). \tag{1.4}$$

Тогда если $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\max\limits_{x\in X} V(\sigma,x) \leqslant z_0(\sigma)$, то имеют место неравенства

$$\operatorname{freq}(\vartheta,\tau,\omega) \geqslant \varkappa(\vartheta,\tau,\sigma), \quad \operatorname{freq}(\tau,\omega) \geqslant \varkappa(\tau,\sigma). \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\sigma \in \Sigma$ и для каждого x из множества X обозначим через $\varphi(t,\sigma,x)$ некоторое решение включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x \in X$. Рассмотрим функцию $v(t,\sigma) = V\bigl(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\bigr)$. Функция $t \to v(t,\sigma)$ удовлетворяет локальному условию Липшица (см. [6]), поэтому в силу теоремы Радемахера она дифференцируема при почти всех $t \geqslant 0$. Поскольку $\varphi(0,\sigma,x) \in X$, то имеет место неравенство

$$v(0,\sigma) = V(\sigma,x) \leqslant \max_{x\in X} V(\sigma,x) \leqslant z_0(\sigma).$$

В работе [6] показано, что в точках дифференцируемости функции $v(t,\sigma)$ выполнено неравенство

$$\dot v(t,\sigma) \leqslant V^o_{\max}\bigl(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\bigr),$$

поэтому, учитывая (1.4), имеем при всех $t \geqslant 0$ неравенство $\dot v(t,\sigma) \leqslant w(h^t\sigma, v(t,\sigma))$. Из последнего неравенства, неравенства $v(0,\sigma) \leqslant z_0(\sigma)$ и теоремы 18.1 работы [4] следует, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (1.3) определено и $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$ при всех $t \geqslant 0$.

Поскольку функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}(\sigma)$, то включение $D(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)$ равносильно неравенству $v(t,\sigma) \leqslant 0$, поэтому

$$\operatorname{freq}(\vartheta,\tau,\omega) \doteq \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : D(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\bigr\}}{\tau} =$$

$$= \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : v(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\}}{\tau} \geqslant \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\vartheta,\vartheta+\tau] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\}}{\tau} \doteq \varkappa(\vartheta,\tau,\sigma).$$

Отсюда следует второе неравенство из (1.5):

$$\operatorname{freq}(\tau,\omega) = \inf_{\vartheta\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\vartheta,\vartheta+\tau]:\, v(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\tau}\geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\vartheta\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\vartheta,\vartheta+\tau]:\, z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\tau}\doteq \varkappa(\tau,\sigma).$$

§ 2. Оценка характеристик множества достижимости управляемых систем с переключениями

В этом разделе исследуются характеристики инвариантности множества достижимости $D\big(t,\sigma,M\big)$ управляемой системы (1.1), параметризованной *метрической динамической системой* $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu,h^t)$, которая подробно описана в работах [8, 9]. Напомним, что пространство $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$ является прямым произведением двух вероятностных пространств $(\Sigma_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1)$ и $(\Sigma_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$. Здесь Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots)$, где $\theta_k\in(0,\infty)$, система множеств $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами $E_k\doteq\{\theta\in\Sigma_1:\theta_1\in I_1,\ldots,\theta_k\in I_k\}$, где $I_i\doteq(t_i,s_i]$, а вероятностная мера μ_1 определена следующим образом. Для каждого промежутка $I_i\doteq(t_i,s_i]$, $i\geqslant 2$, определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_1(I_i)=G(s_i)-G(t_i)$ с помощью функций распределения $G(t)$, на алгебре цилиндрических множеств построим меру $\widetilde{\mu}_1(E_k)=\widetilde{\mu}_1(I_1)\widetilde{\mu}_1(I_2)\ldots\widetilde{\mu}_1(I_k)$, тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [10, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_1,\mathfrak{A}_1)$ существует единственная вероятностная мера μ_1, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$.

Далее, пусть заданы конечное множество $\Psi=\{\psi_1,\ldots,\psi_\ell\}$ и сигма-алгебра его подмножеств $\mathfrak{A}_0$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}_2$. Обозначим через Σ_2 множество последовательностей

$$\Sigma_2\doteq\{\varphi:\varphi=(\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_k,\ldots),\ \psi_k\in\Psi\},$$

через $\mathfrak{A}_2$ обозначим наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k\doteq\{\varphi\in\Sigma_2:\psi_1\in\Psi_1,\ldots,\psi_k\in\Psi_k\},\quad\text{где}\quad \Psi_i\in\mathfrak{A}_0,$$

определим меру $\widetilde{\mu}_2(D_k)=\widetilde{\mu}_2(\Psi_1)\widetilde{\mu}_2(\Psi_2)\ldots\widetilde{\mu}_2(\Psi_k)$ и меру μ_2 как продолжение меры $\widetilde{\mu}_2$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_2$. Будем предполагать, что $\mu_2(\psi_i)>0$ для любого $i=1,\ldots,\ell$. На пространстве $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$ определено преобразование сдвига $h^t\sigma$, сохраняющее меру $\mu=\mu_1\times\mu_2$ (см. [5, с. 190], [8]). Мера μ является прямым произведением вероятностных мер μ_1 и μ_2; это означает, что $\mu_1\times\mu_2(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$ для всех $A\in\mathfrak{A}_1$, $B\in\mathfrak{A}_2$.

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_0=0$, $\tau_k(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{k}\theta_i$, где $\theta\in\Sigma_1$. Из построения динамической системы следует, что на интервалах (τ_k,τ_{k+1}) между моментами переключения τ_k, $k=1,2,\ldots$, система (1.1) находится в одном из состояний множества Ψ, а длины интервалов $\theta_k=\tau_k-\tau_{k-1}$ являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $G(t)$.

В силу структуры динамической системы $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu,h^t)$ управляемую систему (1.1), порожденную этой динамической системой, будем называть *системой с переключениями.* В работах [4, 9] исследовалась линейная управляемая система с переключениями

$$\dot{x}=A(h^t\sigma)x+B(h^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

Пусть задано подмножество $\mathfrak{M}=\{(t,x):t\geqslant 0,x\in M\}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, где M — непустое компактное множество. Обозначим через ψ_i систему, которая получается из системы (1.1), когда она при всех t находится в состоянии ψ_i множества Ψ; через $D_i(t,X)$ — множество достижимости системы ψ_i в момент времени t из начального множества X, $i=1,\ldots,\ell$. Введем также следующие обозначения:

$$\alpha_i=\alpha_i(X,M)=\min\bigl\{t\in[0,\infty):D_i(t,X)\subseteq M\ \text{ при }\ t\geqslant\tau\bigr\},$$
$$\beta_i=\beta_i(X,M)=\inf\bigl\{t\in[0,\infty):D_i(t,X)\cap M=\varnothing\ \text{ при }\ t\geqslant\tau\bigr\},\quad i=1,\ldots,\ell.$$

Если какого-либо из этих моментов времени не существует, положим $\alpha_i=\infty$ или $\beta_i=\infty$.

Множество $\{(t,x):t\geqslant 0,\ x\in X\}$ называется *положительно инвариантным* относительно системы (1.1), если для любых $t\geqslant 0$ и $\sigma\in\Sigma$ выполнено включение $D\bigl(t,\sigma,X\bigr)\subseteq X$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta_k=\alpha$ *для всех* $k=2,3,\ldots$, $\Lambda\doteq\max(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)<\alpha$. *Если* $M\subseteq X$ *и множество* $\{(t,x):t\geqslant 0,\ x\in X\}$ *положительно инвариантно относительно системы* (1.1), *то для любого* $m=0,1,2,\ldots$ *с вероятностью единица справедливы следующие оценки:*

1) *если* $\tau\in[m\alpha,m\alpha+\Lambda)$, *то* $\operatorname{freq}(\tau,\sigma,M)\geqslant\dfrac{m(\alpha-\Lambda)}{\tau}>\dfrac{m(\alpha-\Lambda)}{m\alpha+\Lambda}$;

2) *если* $\tau\in[m\alpha+\Lambda,(m+1)\alpha)$, *то* $\operatorname{freq}(\tau,\sigma,M)\geqslant\dfrac{\tau-(m+1)\Lambda}{\tau}>\dfrac{m(\alpha-\Lambda)}{(m+1)\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного $\sigma\in\Sigma$ построим множество $\widetilde{D}(t,\sigma,X)$, которое при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$ совпадает с множеством $D_i(t-\tau_k,X)=D(t-\tau_k,\sigma,X)$, если система (1.1) находится в состоянии ψ_i при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$. Множество $\{(t,x):t\geqslant 0,\ x\in X\}$ положительно инвариантно относительно системы (1.1), поэтому для множества $M\subseteq X$ имеют место включения $D(t,\sigma,M)\subseteq X$ и $D(t,\sigma,M)\subseteq\widetilde{D}(t,\sigma,X)$. Из последнего включения получаем неравенство

$$\operatorname{freq}(\tau,\sigma,M)\doteq\inf_{\vartheta\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\vartheta,\vartheta+\tau]:D(t,\sigma,M)\subseteq M\}}{\tau}\geqslant$$
$$\geqslant\inf_{\vartheta\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\vartheta,\vartheta+\tau]:\widetilde{D}(t,\sigma,X)\subseteq M\}}{\tau}\doteq\operatorname{freq}_0(\tau,\sigma,M).$$

Следовательно, для оценки снизу $\operatorname{freq}(\tau,\sigma,M)$ нужно найти или оценить характеристику $\operatorname{freq}_0(\tau,\sigma,M)$ для различных значений $\tau>0$.

Выберем такое $i\in\{1,\ldots,\ell\}$, что $\alpha_i=\Lambda=\max(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$. Пусть $\tau<\Lambda=\alpha_i$. Из определения α_i следует, что если при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$ система находится в состоянии ψ_i, то $\widetilde{D}(t-\tau_k,\sigma,X)\not\subseteq M$, поэтому $\operatorname{freq}_0(\tau,\sigma,M)=0$. Отметим, что для $\tau\geqslant\Lambda$ величина

$$\frac{1}{\tau}\cdot\operatorname{mes}\{t\in[\vartheta,\vartheta+\tau]:\widetilde{D}(t,\sigma,X)\subseteq M\}$$

достигает наименьшего значения в том случае, когда $\vartheta=\tau_k$ и состояние ψ_i появится на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$, а также на следующих за ним промежутках, содержащих в себе отрезок $[\vartheta,\vartheta+\tau]$. Покажем, что это произойдет с вероятностью единица, то есть для любого натурального m с вероятностью единица произойдет событие B_k, состоящее в том, что состояния ψ_i появятся m раз подряд на соседних промежутках $[\tau_k,\tau_{k+1}),\ldots,[\tau_{k+m-1},\tau_{k+m})$ (другими словами, в испытаниях Бернулли появится серия успехов длиной m). В силу определения динамической системы $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu,h^t)$ мера μ инвариантна относительно сдвига h^t, поэтому события B_k независимы и имеют одинаковые положительные вероятности для всех $k=1,2,\ldots$, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)$ расходится; поэтому с вероятностью единица произойдет бесконечно много событий B_k (см. [11, с. 216]).

Таким образом, если $\tau\in[\Lambda,\alpha)$, то $\widetilde{D}(t,\sigma,X)\not\subseteq M$ при $t\in[\tau_k,\tau_k+\Lambda)$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X)\subseteq M$ при $t\in[\tau_k+\Lambda,\tau_k+\tau)$. Следовательно,

$$\operatorname{freq}_0(\tau,\sigma,M)=\frac{\operatorname{mes}[\tau_k+\Lambda,\tau_k+\tau)}{\operatorname{mes}[\tau_k,\tau_k+\tau)}=\frac{\tau-\Lambda}{\tau}>\frac{\tau-\Lambda}{\alpha}.$$

Если $\tau \in [\alpha, \alpha+\Lambda)$, то $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \nsubseteq M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+\Lambda) \cup [\tau_k+\alpha, \tau_k+\tau)$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq M$ при $t \in [\tau_k+\Lambda, \tau_k+\alpha)$, поэтому

$$\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,M) = \frac{\mathrm{mes}\,[\tau_k+\Lambda, \tau_k+\alpha)}{\mathrm{mes}\,[\tau_k, \tau_k+\tau)} = \frac{\alpha-\Lambda}{\tau} > \frac{\alpha-\Lambda}{\alpha+\Lambda}.$$

Если $\tau \in [\alpha+\Lambda, 2\alpha)$, то $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \nsubseteq M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+2\Lambda) \cup [\tau_k+2\alpha, \tau_k+\tau)$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq M$ при $t \in [\tau_k+2\Lambda, \tau_k+\tau)$, поэтому

$$\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,M) = \frac{\mathrm{mes}\,[\tau_k+2\Lambda, \tau_k+\tau)}{\mathrm{mes}\,[\tau_k, \tau_k+\tau)} = \frac{\tau-2\Lambda}{\tau} > \frac{\alpha-\Lambda}{2\alpha}.$$

Аналогично получаем оценки характеристики $\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M)$ для остальных значений τ. □

Теорема 3. *Пусть $\theta_k = \alpha$ для всех $k = 2,3,\ldots,$ $\Gamma \doteq \max(\beta_1,\ldots,\beta_\ell) < \alpha$. Если $M \subseteq X$ и множество $\{(t,x) : t \geqslant 0,\ x \in X\}$ положительно инвариантно относительно системы* (1.1)*, то для любого $m = 0,1,2,\ldots$ с вероятностью единица справедливы следующие оценки:*

1) *если $\tau \in [m\alpha, m\alpha+\Gamma)$, то* $\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1 - \dfrac{m(\alpha-\Gamma)}{\tau} < 1 - \dfrac{m(\alpha-\Gamma)}{m\alpha+\Gamma}$;

2) *если $\tau \in [m\alpha+\Gamma, (m+1)\alpha)$, то* $\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1 - \dfrac{\tau-(m+1)\Gamma}{\tau} < 1 - \dfrac{m(\alpha-\Gamma)}{(m+1)\alpha}$.

Доказательство. Найдем оценки сверху для характеристики $\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M)$. Поскольку $D(t,\sigma,M) \subseteq \widetilde{D}(t,\sigma,X)$, то

$$\mathrm{freq}(\tau,\sigma,X\setminus M) \doteq \inf_{\vartheta \geqslant 0} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [\vartheta, \vartheta+\tau] : D(t,\sigma,M) \subseteq X\setminus M\}}{\tau} \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\vartheta \geqslant 0} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [\vartheta, \vartheta+\tau] : \widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M\}}{\tau} \doteq \mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M).$$

Из последнего неравенства и неравенства $\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) + \mathrm{freq}(\tau,\sigma,X\setminus M) \leqslant 1$ получаем

$$\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1 - \mathrm{freq}(\tau,\sigma,X\setminus M) \leqslant 1 - \mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M).$$

Найдем значение характеристики $\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M)$ для различных значений $\tau > 0$. Выберем такое $i \in \{1,\ldots,\ell\}$, что $\beta_i = \Gamma = \max(\beta_1,\ldots,\beta_\ell)$. Пусть $\tau < \Gamma = \beta_i$. Из определения β_i следует, что если при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ система находится в состоянии ψ_i, то $\widetilde{D}(t-\tau_k,\sigma,X) \nsubseteq X\setminus M$, поэтому $\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M) = 0$. В этом случае получаем только оценку $\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1$. Рассмотрим $\tau \in [\Gamma, \alpha)$, тогда $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \nsubseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+\Gamma)$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k+\Gamma, \tau_k+\tau)$; поэтому $\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M) = \dfrac{\tau-\Gamma}{\tau}$, следовательно,

$$\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1 - \frac{\tau-\Gamma}{\tau} < 1.$$

Если $\tau \in [\alpha, \alpha+\Gamma)$, то $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \nsubseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+\Gamma) \cup [\tau_k+\alpha, \tau_k+\tau)$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k+\Gamma, \tau_k+\alpha)$, поэтому

$$\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1 - \frac{\alpha-\Gamma}{\tau} < 1 - \frac{\alpha-\Gamma}{\alpha+\Gamma}.$$

Если $\tau \in [\alpha+\Gamma, 2\alpha)$, то $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \nsubseteq X\setminus M$ при $t \in [\tau_k, \tau_k+2\Gamma) \cup [\tau_k+2\alpha, \tau_k+\tau)$ и $\widetilde{D}(t,\sigma,X) \subseteq M$ при $t \in [\tau_k+2\Gamma, \tau_k+\tau)$, поэтому

$$\mathrm{freq}(\tau,\sigma,M) \leqslant 1 - \frac{\tau-2\Gamma}{\tau} < 1 - \frac{\alpha-\Gamma}{2\alpha}.$$

Для остальных значений τ доказательство аналогично. $\square$

Напомним, что мы определили множество $\widetilde{D}(t,\sigma,X)$ как множество, которое при $t \in [\tau_k,\tau_{k+1})$ совпадает с множеством $D_i(t-\tau_k,X) = D(t-\tau_k,\sigma,X)$, если система (1.1) находится в состоянии ψ_i при $t \in [\tau_k,\tau_{k+1})$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Лемма 1. *Пусть $\theta_k = \alpha$ для всех $k = 2,3,\ldots$ и $\alpha \leqslant \Lambda = \max(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$. Тогда для всех $\tau > 0$ равенство*

$$\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,M) \doteq \inf_{\vartheta\geqslant 0}\frac{\mathrm{mes}\,\{t\in[\vartheta,\vartheta+\tau] : \widetilde{D}(t,\sigma,X)\subseteq M\}}{\tau} = 0$$

выполнено с вероятностью единица. Если $\alpha \geqslant \Gamma \doteq \max(\beta_1,\ldots,\beta_\ell)$, то $\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M) = 0$ с вероятностью единица.

Доказательство. Пусть $\alpha_i = \max(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$. Определим события B_k, $k = 2,3,\ldots$, состоящие в том, что состояния ψ_i появятся m раз подряд на соседних промежутках $[\tau_k,\tau_{k+1})$, $\ldots$, $[\tau_{k+m-1},\tau_{k+m})$ (другими словами, в испытаниях Бернулли появится серия успехов длиной m). Каждому $\tau > 0$ поставим в соответствие натуральное число $m = m(\tau) = [\tau/\alpha] + 1$ (здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа). Из доказательства теоремы 2 следует, что с вероятностью единица произойдет бесконечно много событий B_k. Далее, если появится B_k, то на промежутке $[\tau_k,\tau_k+m\alpha]$ будет выполнено включение $\widetilde{D}(t-\tau_k,\sigma,X) \not\subseteq M$, поэтому $\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,M) = 0$ с вероятностью единица.

Аналогично можно доказать, что если $\alpha \geqslant \Gamma$, то равенство $\mathrm{freq}_0(\tau,\sigma,X\setminus M) = 0$ также выполнено с вероятностью единица.

Лемма 2. *Пусть $M \subseteq X$, $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что существуют функция Ляпунова $V(x)$ относительно множества M и постоянные a_i, b_i такие, что $a_i \neq 0$, $b_i < 0$, $b_i + a_i v_0 < 0$, где $v_0 = \max\limits_{x\in X} V(x)$. Если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(x) \doteq \sup_{q\in A_i x + B_i \mathrm{co}U} V^o(x;q) \leqslant a_i V(x) + b_i, \tag{2.1}$$

то $\alpha_i = \alpha_i(X,M) \doteq \min\bigl\{\tau\in[0,\infty) : D_i(t,X)\subseteq M$ при $t\geqslant\tau\bigr\} \leqslant \dfrac{1}{a_i}\ln\dfrac{b_i}{b_i+a_i v_0}$.

Доказательство. Для каждого x из множества X обозначим через $\varphi(t,x)$ некоторое решение управляемой системы $\psi_i = (A_i,B_i)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x \in X$. Рассмотрим функцию $v(t) = V\bigl(\varphi(t,x)\bigr)$, которая в силу теоремы Радемахера дифференцируема при почти всех $t \geqslant 0$. Поскольку $\varphi(0,x) \in X$, то имеет место неравенство $v(0) = V(x) \leqslant v_0$. Из неравенств (2.1) и $\dot v(t) \leqslant V^o_{\max}\bigl(\varphi(t,x)\bigr)$ получаем при всех $t \geqslant 0$ неравенство $\dot v(t) \leqslant a_i v(t) + b_i$. Обозначим через $z(t)$ решение задачи Коши

$$\dot z = a_i z + b_i, \quad z(0) = v_0,$$

тогда $z(t) = \dfrac{b_i}{a_i}\bigl(e^{a_i t}-1\bigr) + v_0 e^{a_i t}$ и в силу теоремы о дифференциальных неравенствах $v(t) \leqslant z(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Если $a_i \neq 0$, $b_i < 0$ и $b_i + a_i v_0 < 0$, то $z(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant t_i = \dfrac{1}{a_i}\ln\dfrac{b_i}{b_i+a_i v_0}$. Поскольку $M \subseteq X$ и $V(x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M, то $v_0 = \max\limits_{x\in X} V(x) \geqslant 0$, поэтому $t_i \geqslant 0$. Таким образом, при $t \geqslant t_i$ выполнено неравенство $v(t) \leqslant 0$, из которого следует, что $D_i(t,X) \subseteq M$ при $t \geqslant t_i$. Из определения α_i получаем неравенство $\alpha_i \leqslant t_i$.

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $M \subseteq X$, $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что существуют функция Ляпунова $V(x)$ относительно множества M и постоянные a_i, b_i такие, что $a_i \neq 0$, $b_i > 0$, $b_i + a_i s_0 > 0$, где $s_0 = \min\limits_{x \in X} V(x) < 0$. Если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(x) \doteq \inf_{q \in A_i x + B_i \operatorname{co} U} V^o(x;q) \geqslant a_i V(x) + b_i,$$

то $\beta_i = \beta_i(X,M) \doteq \inf\big\{\tau \in [0,\infty) : D_i(t,X) \cap M = \varnothing$ *при* $t \geqslant \tau\big\} \leqslant \dfrac{1}{a_i} \ln \dfrac{b_i}{b_i + a_i s_0}$.

Пример 1. Рассмотрим управляемую линейную систему

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

параметризованную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая описана в предыдущем разделе. Здесь $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, множество Σ_1 является множеством числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k = \alpha = 80$, $k = 2, 3 \ldots.$ Задано множество $U = [1;2]$ и множество Ψ, которое содержит два состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1,2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем оценку характеристики $\operatorname{freq}(\tau,\sigma,M)$ для множества $\mathfrak{M} = \Sigma \times M$, где $M = O_{\frac{4}{3}}(0)$ — замкнутый шар с центром в начале координат радиуса $\dfrac{4}{3}$.

Системе (2.2) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{2.3}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $F(h^t\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции $(t,x) \to f\big(h^t\sigma, x, U\big) = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)U$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$.

Обозначим через Σ_{2i}, $i = 1,2$ подмножество Σ_2, которое является множеством последовательностей с фиксированной первой координатой: $\varphi_0 = \psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1,2$. Поскольку множество Ψ содержит два состояния ψ_1, ψ_2, то $\Sigma_2 = \Sigma_{21} \cup \Sigma_{22}$ и пространство Σ можно представить в виде суммы непересекающихся множеств $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, где $\Sigma^1 = \Sigma_1 \times \Sigma_{21}$, $\Sigma^2 = \Sigma_1 \times \Sigma_{22}$. Такое представление Σ связано с тем, что для множеств Σ^1 и Σ^2 по-разному находятся производные в силу включения. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(\sigma,x) = x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{16}{9}$ относительно множества $\Sigma \times O_{\frac{4}{3}}(0)$ и найдем верхнюю производную данной функции в силу включения (2.3). Если $\sigma \in \Sigma^1$, то

$$V^o_{\max}(\sigma,x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2 & \text{при} \quad x_2 \geqslant 0, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_2 & \text{при} \quad x_2 < 0; \end{cases}$$

если $\sigma \in \Sigma^2$, то

$$V^o_{\max}(\sigma,x) = \begin{cases} -4x_1^2 - 4x_2^2 + 4(x_1 - x_2) & \text{при} \quad x_1 \geqslant x_2, \\ -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2(x_1 - x_2) & \text{при} \quad x_1 < x_2. \end{cases}$$

Отметим, что множество $M = O_{\frac{4}{3}}(0)$ содержится в множестве $X = O_2(0)$, а множество $\{(t,x) : t \geqslant 0, x \in X\}$ положительно инвариантно относительно управляемой системы (2.2). Для доказательства положительной инвариантности необходимо рассмотреть функцию $V(\sigma,x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$, которая является функцией Ляпунова относительно данного множества, и показать, что неравенство $V^o_{\max}(\sigma,x) \leqslant 0$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$ и всех $x \in \mathbb{R}^2 \setminus O_2(0)$ (условия положительной инвариантности получены в работе [6]).

Для функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - \dfrac{16}{9}$ линейной системы ψ_1 относительно множества M существуют постоянные a_1, b_1 (например, $a_1 = \dfrac{1}{40}$, $b_1 = -\dfrac{1}{9}$) такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство (2.1). Найдем $v_0 = \max\limits_{x \in X} V(x) = \dfrac{20}{9}$, где $X = O_{\frac{4}{3}}(0)$, поэтому в силу леммы 2 имеет место неравенство $\alpha_1 \leqslant 40 \ln 2$. Из леммы 2 также получаем, что $\alpha_2 \leqslant 80 \ln 2$, поэтому $\Lambda = 80 \ln 2$. Таким образом, если $\tau \in [80m, 80m + 80 \ln 2)$, то с вероятностью единица справедлива оценка

$$\operatorname{freq}(\tau, \sigma, M) \geqslant \frac{m(1 - \ln 2)}{m + \ln 2}.$$

Если $\tau \in [80m + 80 \ln 2, 80(m+1))$, то $\operatorname{freq}(\tau, \sigma, M) \geqslant \dfrac{m(1 - \ln 2)}{m + 1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
2. Родина Л.И. Пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.
3. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.
4. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
5. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.
6. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
8. Родина Л.И. О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.
9. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3 (550). С. 38–49.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 581 с.
11. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

Поступила в редакцию 29.03.2014

Хаммади Алаа Хуссейн, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com

A. H. Hammady
The characteristics of invariance of attainability set of control systems with random coefficients

Keywords: control systems with stochastic coefficients, attainability set, dynamical system, differential inclusions.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15

This article is continuation of works of L. I. Rodina and E. L. Tonkov in which expansion of the concept of invariance for sets concerning control systems and differential inclusions is entered. This expansion consists in research of the sets which are not invariant in «classical» sense, but possess the property of statistical invariance, and also in studying of statistical characteristics for attainability set of control system.

We consider the characteristics connected with the invariance of the given set $\mathfrak{M}(\sigma)$ with respect to the control system which display the property of uniformity of stay for the attainability set of the system in $\mathfrak{M}(\sigma)$ on the finite time interval. We obtain estimates of these characteristics for systems with random coefficients in terms of Lyapunov functions, a derivative owing to differential inclusion and the dynamical system of shifts. In particular, we investigate the estimations with probability one for characteristics of control system which we will name a system with switchings. This system can be identified with a stationary random process whose set of states is finite; for this set there are given the initial probability distribution and the probabilities of finding in each state; the lengths of intervals between the moments of switching system from one state to another are random variables with a given distribution function. The example of estimation of the investigated characteristics for a linear control system with switchings is considered.

REFERENCES

1. Rodina L.I., Tonkov E.L. The statistically weak invariant sets of control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 67–86 (in Russian).

2. Rodina L.I. The space clcv($\mathbb{R}^n$) with the Hausdorff–Bebutov metric and statistically invariant sets of control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 278, issue 1, pp. 208–217.

3. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 17–27.

4. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).

5. Kornfel'd I.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V. *Ergodicheskaya teoriya* (The ergodic theory), Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

6. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, issue 1, pp. 194–212.

7. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.

8. Rodina L.I. On some probability models of dynamics of population growth, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 109–124 (in Russian).

9. Masterkov Yu. V., Rodina L. I. Sufficient conditions for the local controllability of systems with random parameters for an arbitrary number of system states, *Russian Mathematics*, 2008, vol. 52, issue 3, pp. 34–44.

10. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* (Probability), Moscow: Nauka, 1989, 581 p.

11. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistike* (Handbook of probability theory and mathematical statistics), Moscow: Nauka, 1985, 640 p.

Received 29.03.2014

Hammady Alaa Hussein, Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com