

УДК 531.36

© Л. В. Ряшко, Е. С. Слепухина

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ БОЛЬШИХ АМПЛИТУД В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ХИНДМАРШ–РОЗЕ¹

В работе исследуется стохастическая динамика двумерной модели Хиндмарш–Розе. В детерминированной модели Хиндмарш–Розе возможны параметрические зоны сосуществования различных устойчивых аттракторов — равновесий и предельных циклов. Появление колебаний больших амплитуд при воздействии случайных возмущений на систему в этих зонах объясняется наличием предельного цикла. Однако стохастическая генерация осцилляций больших амплитуд возможна и в параметрической зоне, где имеется лишь одно устойчивое равновесие. В данной статье рассматривается этот случай. При малых шумах случайные состояния концентрируются вблизи устойчивого равновесия. При увеличении интенсивности шума траектории уходят далеко от равновесия, совершая колебательные движения больших амплитуд в окрестности неустойчивого равновесия. Это явление подтверждается изменением плотности распределения случайных траекторий. Проводится анализ этого эффекта с помощью техники функций стохастической чувствительности. Предлагается метод оценки критических значений интенсивности шума.

Ключевые слова: модель Хиндмарш–Розе, возбудимость, стохастическая чувствительность, стохастическая генерация колебаний больших амплитуд.

Введение

В данной статье изучается воздействие случайных возмущений на двумерную модель нейронной активности Хиндмарш–Розе (ХР) [1]. Исходная детерминированная система отличается сильной нелинейностью, вследствие которой она демонстрирует весьма разнообразные и трудно поддающиеся анализу динамические режимы. При этом случайные возмущения существенно влияют на механизмы возбуждения в нейронных системах. Даже небольшие стохастические флуктуации могут привести к значительному качественному изменению нелинейной динамики таких систем.

Основные особенности детерминированной динамики двумерной модели ХР описаны в [1]. Дальнейший анализ и бифуркационные диаграммы представлены в [2] и [3].

В детерминированной модели ХР возможны параметрические зоны сосуществования различных устойчивых аттракторов — равновесий и предельных циклов. В системе наблюдается мультистабильность: в зависимости от расположения начальной точки решение системы стремится либо к устойчивому равновесию, либо к устойчивому циклу. Появление колебаний больших амплитуд при воздействии случайных возмущений на систему в этих зонах объясняется наличием предельного цикла.

В данной статье основное внимание уделяется параметрической зоне, где имеется лишь одно устойчивое равновесие. Тем не менее под действием шума и в этой зоне возможна генерация колебаний больших амплитуд. Подобные эффекты характерны для многих нейронных моделей. Стохастическая возбудимость в модели нейрона Фитцхью–Нагумо [4] изучалась в [5–10].

Исчерпывающее вероятностное описание стохастической динамики дает уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Однако напрямую использовать его технически сложно даже в двумерном случае. Поэтому были разработаны различные асимптотики и аппроксимации. Для аппроксимации решений уравнения ФПК могут быть использованы метод квазипотенциала [15, 16] и техника функций стохастической чувствительности [18, 19].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке УрФУ в рамках реализации Программы развития УрФУ для победителей конкурса «Молодые ученые УрФУ».

Функция стохастической чувствительности [20] позволяет строить доверительные области (эллипсы и полосы), которые являются простыми и наглядными геометрическими моделями для пространственного описания конфигурационного расположения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов (равновесий и предельных циклов). В данной работе с помощью метода доверительных эллипсов проводится анализ стохастической генерации колебаний больших амплитуд в системе ХР.

§ 1. Детерминированная модель

Рассмотрим двумерную систему Хиндмарш–Розе [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - a, \\ \dot{y} &= -3 - 5x^2 - y, \end{aligned} \tag{1}$$

где x — мембранный потенциал, y — восстановительная переменная и a — управляющий параметр.

В зависимости от значения параметра a в системе (1) имеется либо одно, либо три состояния равновесия. На рисунке 1 представлен фрагмент бифуркационной диаграммы. При переходе параметра a слева направо через точку $\bar{a}_1 \approx -4.1852$ в системе происходит седло-узловая бифуркация: появляются два новых равновесия — седло и устойчивый узел. При $\bar{a}_1 < a < \bar{a}_2 \approx -3.9144$ в системе сосуществуют устойчивое равновесие и предельный цикл, разделенные сепаратрисой седла. Предельный цикл теряет устойчивость и исчезает в точке \bar{a}_2 в результате гомоклинической бифуркации. В зоне (\bar{a}_2, \bar{a}_3) в системе имеется одно устойчивое равновесие. При переходе через точку $\bar{a}_3 \approx -3.1838$ снова происходит гомоклиническая бифуркация, и при $\bar{a}_3 < a < \bar{a}_4 \approx -3.0736$ наблюдается сосуществование предельного цикла и устойчивого равновесия. Цикл теряет устойчивость в точке \bar{a}_4 в результате мягкой бифуркации Андронова–Хопфа, и при $\bar{a}_4 < a < \bar{a}_5 = -3$ в системе сосуществуют два устойчивых равновесия.

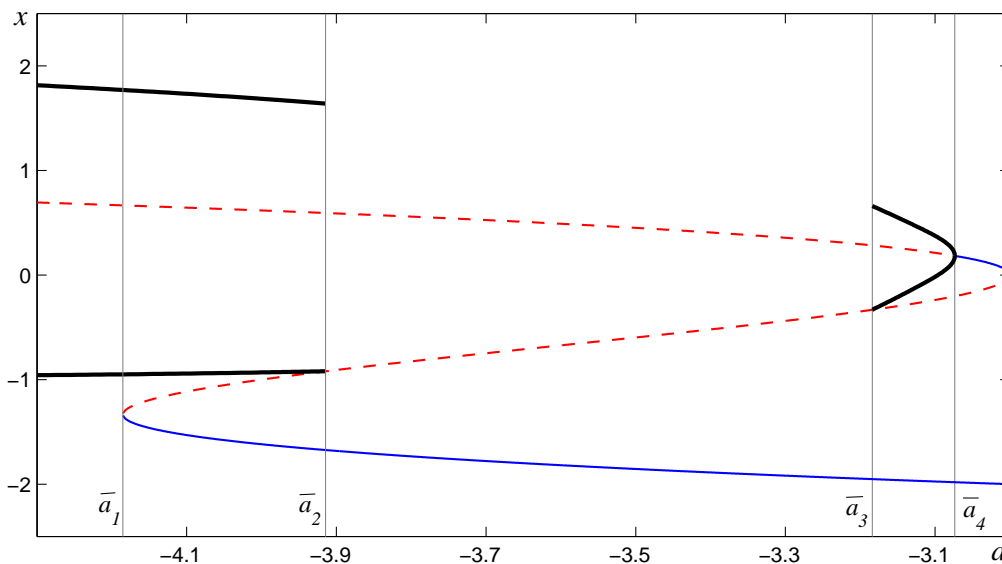


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма: устойчивые (сплошная линия) и неустойчивые (пунктир) состояния равновесия, экстремумы предельных циклов системы (жирные линии)

В данной работе исследуется динамика системы ХР в зоне (\bar{a}_2, \bar{a}_3) . На рисунке 2 изображен типичный фазовый портрет системы при $a \gtrsim \bar{a}_2$ для значения $a = -3.9$. В системе существуют

три равновесия: устойчивый узел $E_1(-1.68, -17.14)$, седло $E_2(-0.91, -7.12)$ и неустойчивый фокус $E_3(0.59, -4.74)$. Траектория, выпущенная вблизи E_3 , перед тем как оказаться вблизи устойчивого равновесия E_1 , огибает сепаратрису седла E_2 .

Отмеченные особенности детерминированной динамики модели оказывают существенное влияние на ее поведение в присутствии случайных возмущений.

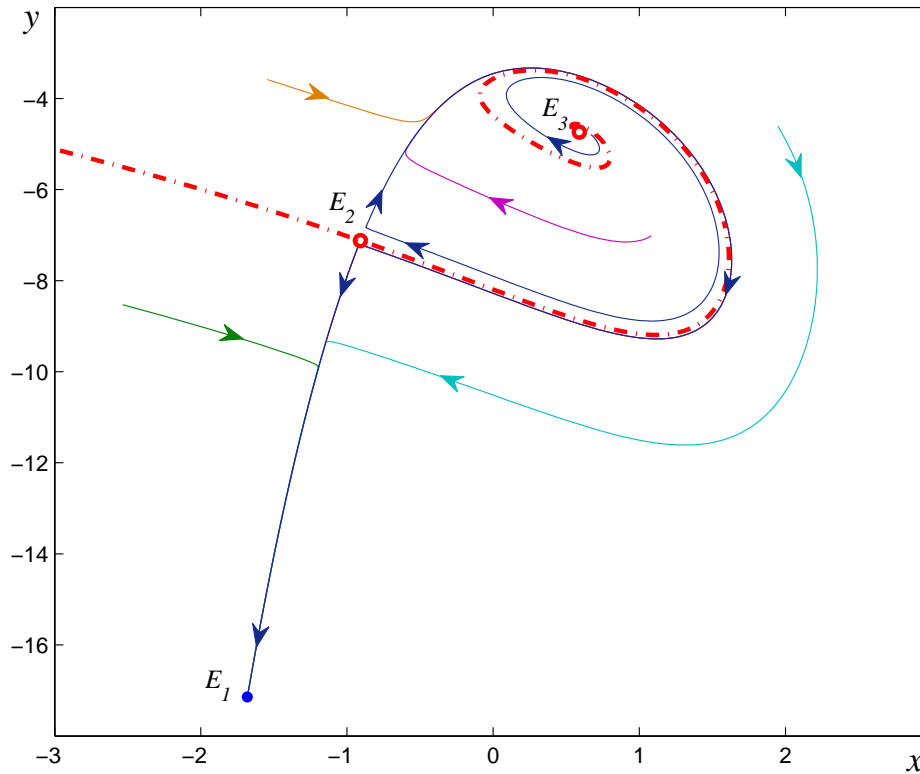


Рис. 2. Фазовый портрет системы при $a = -3.9$: устойчивое (закрашенный кружок) и неустойчивые (незакрашенные кружки) равновесия, устойчивая сепаратрису седла (штрихпунктир), детерминированные траектории (сплошные)

§ 2. Стохастическая модель

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - a + \varepsilon\dot{w}, \\ \dot{y} &= -3 - 5x^2 - y, \end{aligned} \quad (2)$$

где w является стандартным винеровским процессом с параметрами

$$E(w(t) - w(s)) = 0, \quad E(w(t) - w(s))^2 = |t - s|$$

и ε — интенсивность шума.

Исследуем воздействие случайных возмущений на систему для $a \gtrsim \bar{a}_2$ в зоне устойчивого равновесия.

Рассмотрим значение $a_1 = -3.9$. На рисунке 3 представлены стохастические траектории, выпущенные из устойчивого равновесия, и соответствующие временные ряды для различных

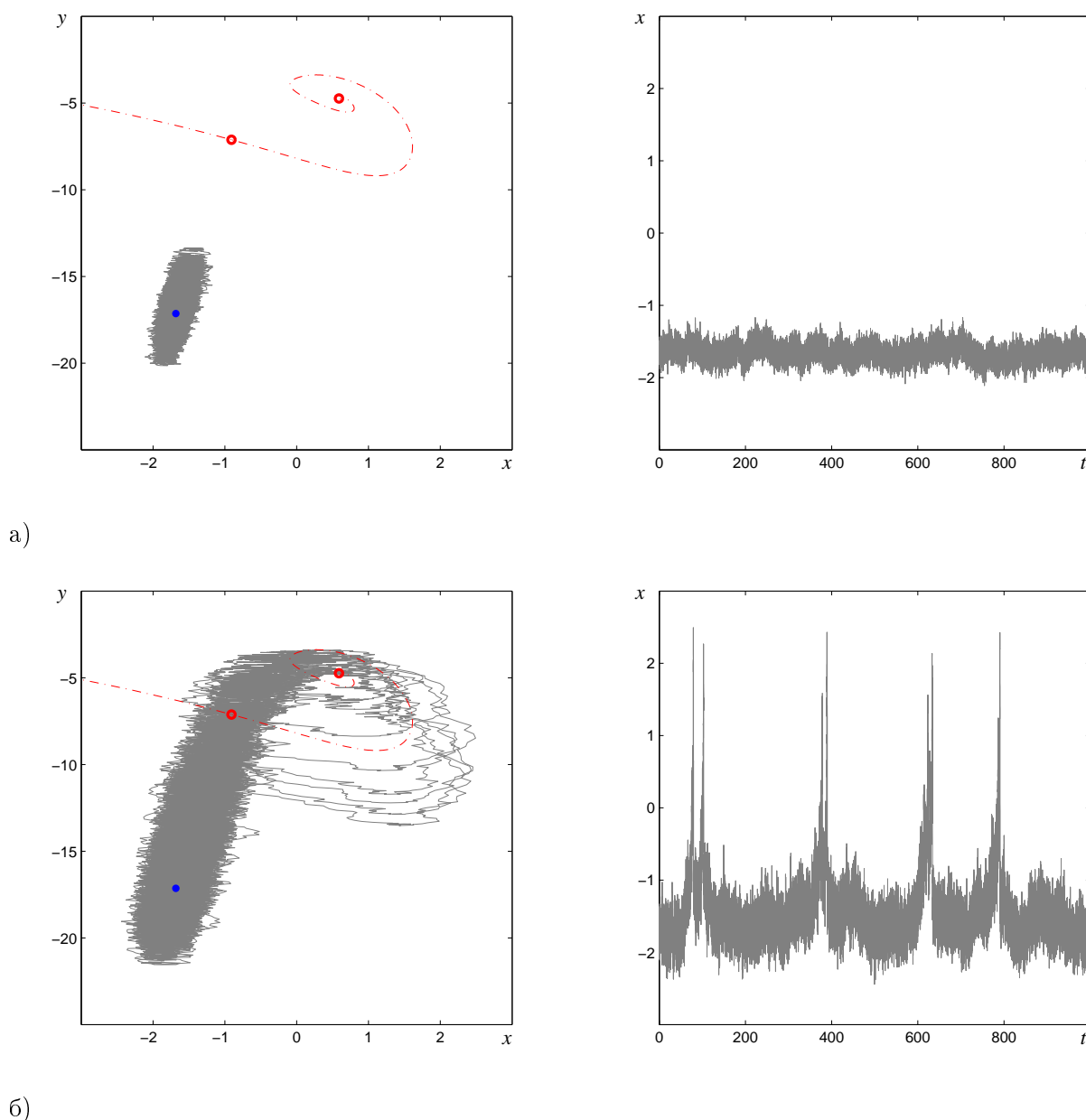


Рис. 3. Стохастическая генерация колебаний больших амплитуд для $a = -3.9$. Случайные траектории (слева) и временные ряды (справа) при (а) $\varepsilon = 0.5$, (б) $\varepsilon = 1$: случайные траектории (сплошные линии), сепаратриса (штрихпунктир), устойчивое (закрашенный кружок) и неустойчивые (незакрашенные кружки) равновесия

значений интенсивности шума. Под воздействием случайных возмущений траектории системы (2) покидают устойчивое равновесие и в установившемся режиме формируют стохастический аттрактор. При относительно малой интенсивности шума ($\varepsilon = 0.5$) состояния этого аттрактора сконцентрированы около равновесия (см. рис. 3, а). При интенсивности шума выше некоторого порогового значения ($\varepsilon = 1$) стохастические траектории могут проходить далеко от устойчивого равновесия и пересекать сепаратрису седла (см. рис. 3, б). При этом наблюдается генерация колебаний больших амплитуд.

Этот эффект подтверждается изменением плотности распределения траекторий. На рисунке 4 изображены графики плотности распределения $P(y)$ ординат случайных состояний при разных значениях интенсивности шума. Графики построены по результатам прямого числен-

ного моделирования. При малом шуме график плотности имеет один пик, расположенный над устойчивым равновесием E_1 . При увеличении ε распределение случайных траекторий смещается вправо, в сторону положения неустойчивого равновесия E_3 .

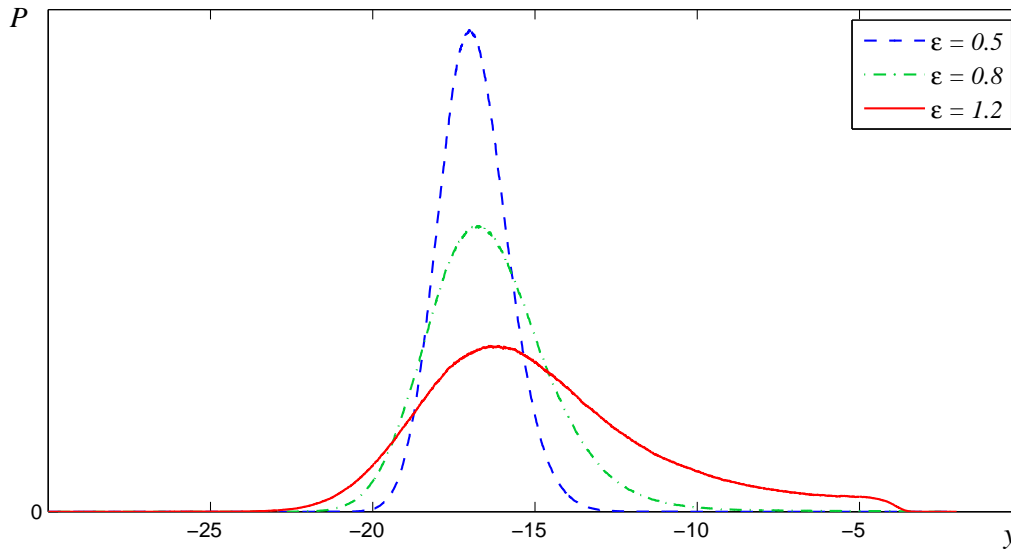


Рис. 4. Плотность распределения случайных траекторий для $\varepsilon = 0.5$ (пунктир), $\varepsilon = 0.8$ (штрихпунктир), $\varepsilon = 1.2$ (сплошная)

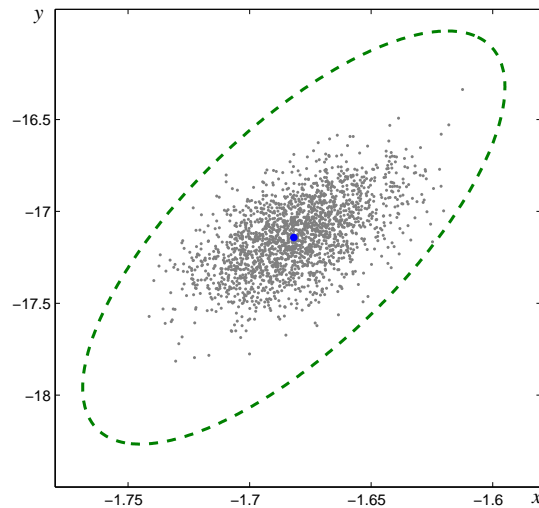


Рис. 5. Доверительный эллипс (пунктир) и случайные состояния (точки) для $a = -3.9$ и $\varepsilon = 0.1$; доверительная вероятность $P = 0.999$

Техника функций стохастической чувствительности (ФСЧ) [17–20] позволяет строить доверительные области (эллипсы и полосы), которые являются простыми и наглядными геометрическими моделями для пространственного описания конфигурационного расположения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов (равновесий и предельных циклов). Необходимый математический аппарат ФСЧ дается в приложении.

Для анализа эффекта стохастической генерации колебаний воспользуемся методом доверительных эллипсов. При малых шумах случайные состояния системы находятся внутри эллипса с доверительной вероятностью P (см. рис. 5). На рисунке 6 показаны доверительные эллипсы для $a = -3.9$ при рассматриваемых значениях интенсивности шума ($\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 1$) и доверительной вероятности $P = 0.999$. При $\varepsilon = 0.5$ доверительный эллипс расположен вблизи устойчивого равновесия. При увеличении шума ($\varepsilon = 1$) эллипс расширяется и пересекает сепаратрису. Это означает, что с высокой вероятностью случайные траектории могут выйти в область выше сепаратрисы и, попав в эту область, будут совершать колебательные движения большой амплитуды.

Метод доверительных эллипсов позволяет оценить критическое значение интенсивности шума, при котором начинается генерация колебаний больших амплитуд. Это значение, при котором доверительный эллипс касается сепаратрисы. Для $a = -3.9$ получаем $\varepsilon^* = 0.88$, что согласуется с результатами прямого численного моделирования, приведенными выше.

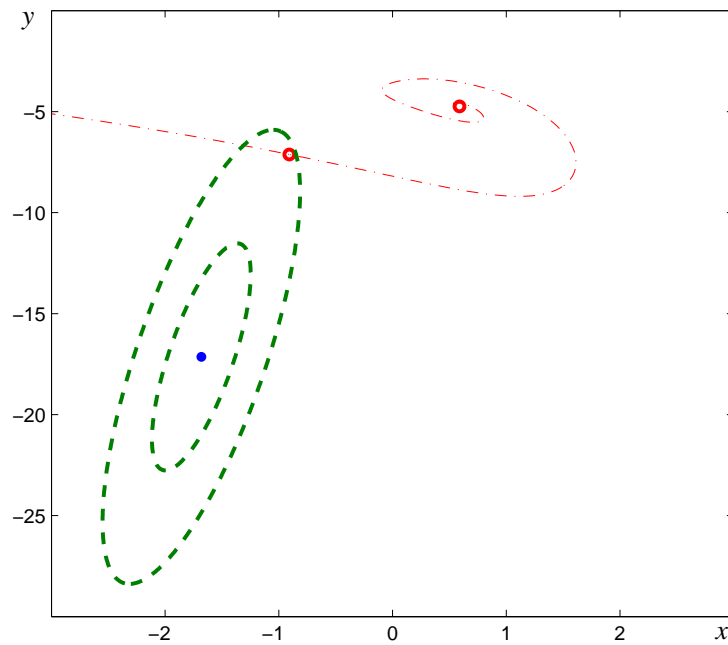


Рис. 6. Доверительные эллипсы для $a = -3.9$ при $\varepsilon = 0.5$ (внутренний) и $\varepsilon = 1$ (внешний): доверительные эллипсы (пунктир), сепаратриса (штрихпунктир), устойчивое (закрашенный кружок) и неустойчивые (незакрашенные кружки) равновесия; доверительная вероятность $P = 0.999$

Заключение

Для двумерной модели Хиндмарш–Розе исследовано явление стохастической генерации колебаний больших амплитуд в параметрической зоне, где детерминированная система имеет одно устойчивое равновесие. С помощью техники функций стохастической чувствительности проводится анализ этого явления и предлагается метод оценки критических значений интенсивности возмущений.

Приложение

Стандартной математической моделью систем со случайными возмущениями являются стохастические дифференциальные уравнения. Рассмотрим общую n -мерную стохастическую систему уравнений Ито [11]

$$dx = f(x) dt + \varepsilon\sigma(x) dw(t), \tag{3}$$

где x — n -вектор, $w(t)$ — m -мерный стандартный винеровский процесс, $f(x)$ и $\sigma(x)$ — достаточно гладкие функции соответствующих размерностей, ε — параметр интенсивности возмущений.

Стохастическая система ХР (2) является частным случаем системы (3) при $n = 2$, $m = 1$,

$$f = \begin{bmatrix} y - x^3 + 3x^2 - a \\ -3 - 5x^2 - y \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате действия невырожденных шумов случайные траектории системы (3) покидают детерминированный аттрактор и формируют вокруг него некоторый стохастический аттрактор. Детальное вероятностное описание случайных траекторий в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [12].

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся режим, то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК. Непосредственное использование этого уравнения уже в двумерном случае весьма затруднительно, поэтому для аппроксимации стационарной плотности используются аппроксимации и асимптотики [6, 13, 14]. Для аппроксимации решений ФПК могут быть использованы известный метод квазипотенциала [15, 16] и техника функции стохастической чувствительности [17, 19, 20].

Рассмотрим случай стохастического равновесия. Пусть детерминированная система, соответствующая (3), имеет экспоненциально устойчивое равновесие \bar{x} . С помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи равновесия можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho(x, \varepsilon) = K \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с ковариационной матрицей $D(\varepsilon) = \varepsilon^2 W$. Для экспоненциально устойчивого равновесия \bar{x} матрица W является единственным решением матричного уравнения

$$FW + WF^\top = -S, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Матрица W является функцией стохастической чувствительности равновесия \bar{x} . Эта матрица характеризует пространственное расположение и размеры стационарно распределенных случайных состояний системы (3) около детерминированного равновесия \bar{x} . Для случая $n = 2$ соответствующий доверительный эллипс задается следующим уравнением:

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = 2k^2\varepsilon^2,$$

где ε — интенсивность возмущений, $k^2 = -\ln(1 - P)$, а P — доверительная вероятность. Это означает, что случайные состояния системы (3) находятся внутри эллипса с вероятностью P .

Доверительные эллипсы являются достаточно простыми и наглядными геометрическими моделями пространственного описания случайных состояний около детерминированного равновесия \bar{x} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. 1984. Vol. 221. № 1222. P. 87–102.
2. Innocenti G., Morelli A., Genesio R., Torcini A. Dynamical phases of the Hindmarsh–Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos // Chaos. 2007. Vol. 17. № 4. 043128. 11 p.
3. Shilnikov A., Kolomiets M. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study – A Tutorial // Int. J. Bifurcation Chaos. 2008. Vol. 18. № 8. P. 2141–2168.
4. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. № 1. P. 445–466.

5. Pikovsky A.S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. № 5. P. 775–778.
6. Lindner B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. № 6. P. 7270–7276.
7. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports.* 2004. Vol. 392. P. 321–424.
8. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh–Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 83. № 6. 061109. 8 p.
9. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Слепухина Е.С. Бифуркация расщепления стохастических циклов в модели Фицхью–Нагумо // *Нелинейная динамика.* 2013. Т. 9. № 2. С. 295–307.
10. Bashkirtseva I., Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh–Nagumo model // *Fluctuation and Noise Letters.* 2014. Vol. 13. № 1. 1450004. 16 p.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
12. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 538 с.
13. Kurrer C., Schulten K. Effect of noise and perturbations on limit cycle systems // *Phys. D.* 1991. Vol. 50. № 3. P. 311–320.
14. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // *Прикладная математика и механика.* 1995. Т. 59. № 1. С. 53–63.
15. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
16. Dembo M., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications // Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995. 346 p.
17. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9. № 6. С. 104–113.
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2005. № 26. P. 1437–1451.
19. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2004. Vol. 66. № 1. P. 55–67.
20. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // *Chaos.* 2011. Vol. 21. № 4. 047514. 4 p.

Поступила в редакцию 25.04.2014

Ряшко Лев Борисович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Lev.Ryashko@urfu.ru

Слепухина Евдокия Сергеевна, магистрант, кафедра математической физики, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: eudokiya@yandex.ru

L. B. Ryashko, E. S. Slepukhina

Stochastic generation of high amplitude oscillations in two-dimensional Hindmarsh–Rose model

Keywords: Hindmarsh–Rose model, excitability, stochastic sensitivity, stochastic generation of high amplitude oscillations.

MSC: 37H20, 60H10

We study the stochastic dynamics of the two-dimensional Hindmarsh–Rose model. In the deterministic Hindmarsh–Rose model the parametric zones of coexistence of different stable attractors (equilibria and limit

cycles) are possible. The emergence of high amplitude oscillations under the influence of random disturbances on the system in these zones is due to the presence of a limit cycle. However, the stochastic generation of high amplitude oscillations is possible in a parametric zone where the deterministic system has the only stable equilibrium. This article discusses this case. For a sufficiently low noise intensity values, random states concentrate near the stable equilibrium. With the increasing of the noise intensity, trajectories go far from the equilibrium making high amplitude oscillations in the neighborhood of the unstable equilibrium. This phenomenon is confirmed by changing of the probability distribution of random trajectories. This effect is analyzed using the stochastic sensitivity function technique. A method of estimation of critical values for noise intensity is proposed.

REFERENCES

1. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.*, 1984, vol. 221, no. 1222, pp. 87–102.
2. Innocenti G., Morelli A., Genesio R., Torcini A. Dynamical phases of the Hindmarsh–Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos, *Chaos*, 2007, vol. 17, no. 4, 043128, 11 pp.
3. Shilnikov A., Kolomiets M. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study – A Tutorial, *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2008, vol. 18, no. 8, pp. 2141–2168.
4. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.*, 1961, no. 1, pp. 445–466.
5. Pikovsky A.S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system, *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, no. 5, pp. 775–778.
6. Lindner B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance, *Phys. Rev. E.*, 1999, vol. 60, no. 6, pp. 7270–7276.
7. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems, *Physics Reports*, 2004, vol. 392, pp. 321–424.
8. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh–Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique, *Phys. Rev. E.*, 2011, vol. 83, no. 6, 061109, 8 pp.
9. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B., Slepukhina E.S. Splitting bifurcation of stochastic cycles in the FitzHugh–Nagumo model, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 295–307 (in Russian).
10. Bashkirtseva I., Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh–Nagumo model, *Fluctuation and Noise Letters*, 2014, vol. 13, no. 1, 1450004, 16 p.
11. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya* (Stochastic differential equations and its applications), Kiev: Naukova dumka, 1982, 612 p.
12. Gardiner K.V. *Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh* (Stochastic methods in the natural sciences), Moscow: Mir, 1986, 538 p.
13. Kurrer C., Schulten K. Effect of noise and perturbations on limit cycle systems, *Phys. D.*, 1991, vol. 50, no. 3, pp. 311–320.
14. Mil'shtein G.N., Ryashko L.B. The first approximation of the quasipotential in problems of the stability of systems with random nonsingular perturbations, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1995, vol. 59, no. 1, pp. 53–63 (in Russian).
15. Ventsel' A.D., Freidlin M.I. *Fluktuatsii v dinamicheskikh sistemakh pod deistviem malykh sluchainykh vozmushchenii* (Fluctuations in dynamical systems under the small random perturbations), Moscow: Nauka, 1979, 424 p.
16. Dembo M., Zeitouni O. *Large deviations techniques and applications*, Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995. 346 p.
17. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Quasipotential method in the study of local stability of limit cycles to random perturbations, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelin. Din.*, 2001, vol. 9, no. 6, pp. 104–113 (in Russian).
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, no. 26, pp. 1437–1451.
19. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2004, vol. 66, no. 1, pp. 55–67.
20. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect, *Chaos*, 2011, vol. 21, no. 4, 047514, 4 p.

Ryashko Lev Borisovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: Lev.Ryashko@urfu.ru

Slepukhina Evdokia Sergeevna, Master student, Department of Mathematical Physics, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: eudokiya@yandex.ru