УДК 517.956.3

© ***Е. А. Колпакова***

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В работе рассматривается задача Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка специального вида. Система представлена в симметричном виде, фазовая переменная n-мерная. Рассматриваемая задача Коши получается из задачи Коши для одного уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с помощью операции дифференцирования этого уравнения и краевого условия по переменной x_i. Предполагается, что гамильтониан и начальное условие принадлежат классу непрерывно дифференцируемых функций. Гамильтониан является выпуклым по сопряженной переменной.

В работе предложен новый подход к определению обобщенного решения системы квазилинейных уравнений первого порядка. Обобщенное решение рассматривается в классе многозначных функций с выпуклыми компактными значениями. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения по начальным данным. Получено полугрупповое свойство для введенного обобщенного решения. Показано, что потенциал для обобщенного решения системы квазилинейных уравнений совпадает с единственным минимаксным/вязкостным решением соответствующей задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, а в точках дифференцируемости минимаксного решения его градиент совпадает с обобщенным решением исходной задачи Коши. На основе этой связи получены свойства обобщенного решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений. В частности, показано, что введенное обобщенное решение совпадает с супердифференциалом минимаксного решения соответствующей задачи Коши и однозначно почти всюду.

С помощью характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана описана структура множества точек, в которых минимаксное решение недифференцируемо.

Показано, что свойство обобщенного решения для одного квазилинейного уравнения со скалярной фазовой переменной, введенное О. А. Олейник, может быть распространено на случай рассматриваемой системы квазилинейных уравнений.

Ключевые слова: система квазилинейных уравнений, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, минимаксное/вязкостное решение, метод характеристик.

Введение

Для описания сплошной среды используются модели, которые приводят к системам гиперболических квазилинейных уравнений первого порядка. Наиболее изучен класс систем гиперболических квазилинейных уравнений с одномерной фазовой переменной [1–4]. В этом случае для определения обобщенного решения используют подходы, предложенные С. Л. Соболевым и С. Н. Кружковым [5,6]. С. Л. Соболев ввел понятие слабого решения системы квазилинейных уравнений, основанное на интегральном равенстве. Энтропийное решение является слабым решением по Соболеву и содержит условие, характеризующее допустимые разрывы решений, что позволяет выделить единственное решение в случае, когда функция потока зависит только от самого решения и фазовая переменная одномерна.

В работе [6] доказаны теоремы существования и единственности решения системы квазилинейных уравнений первого порядка для случая одномерной фазовой переменной и при начальном условии из класса функций с малой вариацией. Системы с n-мерной фазовой переменной изучены в меньшей степени.

Случай гиперболической системы с n-мерной фазовой переменной рассмотрен в работе [5], но в этом случае не доказаны теоремы единственности и устойчивости решения. В работе Р. Куранта исследована система квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью и многомерной фазовой переменной.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программ Президиума РАН 12–П–1–1002, 12–П–1–1012 и гранта РФФИ 14–01–00168.

В общем случае для достаточно широкого класса входных данных теоремы существования, единственности и устойчивости для решения системы квазилинейных уравнений не доказаны.

В работе рассматривается начальная задача Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка специального вида. Предполагается, что фазовая переменная n-мерная. Введено понятие обобщенного решения для рассматриваемой задачи Коши. Рассматриваемая система уравнений обладает потенциалом, то есть скалярной функцией, градиент которой совпадает с вектор-функцией решения системы квазилинейных уравнений. Установлена связь между обобщенными решениями системы квазилинейных уравнений и уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. Показано, что потенциал для системы квазилинейных уравнений является минимаксным решением соответствующей задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Для описания свойств обобщенного решения системы квазилинейных уравнений первого порядка используется теория минимаксных решений уравнения Гамильтона–Якоби. Понятие потенциала для системы квазилинейных уравнений было введено в работе [2], где потенциал является вектор-функцией, удовлетворяющей системе соответствующих уравнений Гамильтона–Якоби в точках дифференцируемости.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial w_i(t,x)}{\partial t} + H_{x_i}(t,x,w(t,x)) = 0, \quad w(0,x) = \sigma(x), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.1}$$

Здесь $(t,x) \in \Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $w : \Pi_T \to \mathbb{R}^n$. Функции $H : \Pi_T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Запишем систему (1.1) в дивергентной форме:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} + \operatorname{div} G(t,x,w(t,x)) = 0,$$

где $w : \Pi_T \to \mathbb{R}^n$, матрица $G \in M^{n\times n}$ состоит из столбцов $G_i(t,x,w)$, у которых i-я координата равна $H(t,x,w)$, остальные координаты равны нулю.

Задача (1.1) решается при следующих предположениях.

*A*1. Функция $H(t,x,s)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным и выпукла по s для любых $(t,x) \in \Pi_T$.

*A*2. Функции $H(t,x,s)$, $D_sH(t,x,s)$, $D_xH(t,x,s)$ обладают подлинейным ростом по s, локально липшицевы относительно x, s.

*A*3. Функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема.

Для дальнейших построений рассмотрим вспомогательную задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - H(t,x,D_xu(t,x)) = 0, \quad u(T,x) = \int_0^x \langle \sigma,\, dx\rangle. \tag{1.2}$$

Здесь $D_xu = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = s \in \mathbb{R}^n$. Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение.

Рассмотрим характеристическую систему для задачи (1.2)

$$\dot{\widetilde{x}} = -D_sH(t,\widetilde{x},\widetilde{s}), \quad \dot{\widetilde{s}} = D_xH(t,\widetilde{x},\widetilde{s}), \quad \dot{\widetilde{z}} = -\langle D_sH(t,\widetilde{x},\widetilde{s}),\widetilde{s}\rangle + H(t,\widetilde{x},\widetilde{s}) \tag{1.3}$$

с краевым условием

$$\widetilde{x}(T,\xi) = \xi, \quad \widetilde{s}(T,\xi) = \sigma(\xi), \quad \widetilde{z}(T,\xi) = \int_0^\xi \langle \sigma(x),\, dx\rangle. \tag{1.4}$$

В силу предположений $A1$–$A3$ решение характеристической системы существует, единственно и продолжимо на весь интервал $[0,T]$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Задача (1.2) может не иметь классического решения во всей полосе Π_T. Воспользуемся понятием минимаксного решения задачи (1.2), которое является только непрерывной функцией.

Для формулировки дальнейших определений напомним понятие супердифференциала функции в точке, приведенное в работе [7].

Определение 1. *Супердифференциалом функции* u в точке $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$ называется множество

$$D^+u(t,x) = \{(\alpha,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : u(t+\delta, x+\delta f) - u(t,x) \leqslant \alpha\delta + \langle p, \delta f\rangle + o(\delta)\ \forall\, f \in \mathbb{R}^n\}.$$

Частичным супердифференциалом функции u в точке (t,x) называется множество $D_x^+u(t,x)$ — проекция множества $D^+u(t,x)$ на пространство $\mathbb{R}^n$. Напомним одно из эквивалентных определений минимаксного решения задачи (1.2), предложенное в работе [8].

Определение 2. *Минимаксным решением* задачи (1.2) называется локально липшицевая, супердифференцируемая функция $u : \Pi_T \to \mathbb{R}$, график которой слабо инвариантен относительно решений системы (1.3), (1.4), то есть

$$\forall\, (t,x) \in \Pi_T\ \exists\, \xi \in \mathbb{R}^n :\ \tilde{x}(t,\xi) = x,\ \tilde{z}(\tau,\xi) = u(\tau, \tilde{x}(\tau,\xi)),\ \tau \in [t,T],$$

где $\tilde{x}, \tilde{z}$ — решения характеристической системы (1.3), (1.4).

Из работы [9] вытекают следующие свойства минимаксного решения задачи (1.2) при выполнении условий $A1$–$A3$.

(1) Минимаксное решение является локально липшицевой функцией.

(2) Минимаксное решение супердифференцируемо, и супердифференциал функции u по переменной x представим в виде

$$D_x^+u(t,x) = \mathrm{co}\{\widetilde{s}(t,\xi) : \xi \in \Psi\}, \qquad \text{где}\ \ \Psi = \{\bar{\xi} :\ \widetilde{x}(t,\bar{\xi}) = x,\ \min_{\xi\in\mathbb{R}^n} \widetilde{z}(t,\xi) = \widetilde{z}(t,\bar{\xi})\}; \tag{1.5}$$

здесь $\widetilde{x}(\cdot,\xi), \widetilde{s}(\cdot,\xi), \widetilde{z}(\cdot,\xi)$ — решения характеристической системы (1.3), (1.4).

Символ «co» обозначает выпуклую оболочку.

Утверждение 1. *Для любой точки* $(t,x) \in \Pi_T$ *существует хотя бы одна характеристика* $\widetilde{x}, \widetilde{s}, \widetilde{z}$ *— решение характеристической системы* (1.3), (1.4) *такая, что* $\widetilde{x}(t,\xi) = x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поставим в соответствие задаче (1.2) задачу оптимального управления

$$\dot{x} = -D_sH(t,x,s), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.6}$$

как это сделано в работе [9]. Множество допустимых управлений $\widetilde{S} = \{s : ||s|| \leqslant S\}$ — измеримые по Борелю функции, где множество S сопряженных переменных $\widetilde{s}(\cdot,\xi)$ характеристической системы локально ограничено: $S \subset \mathbb{R}^n$ — компакт [8].

Требуется минимизировать функционал

$$I(s(\cdot)) = \sigma(x(T)) - \int_{t_0}^{T} \langle s, D_sH(t,x,s)\rangle - H(t,x,s)\,dt \to \inf_{s(\cdot)\in\widetilde{S}}. \tag{1.7}$$

В работе [9] доказано, что множество характеристик $\widetilde{x}(\cdot,\xi), \widetilde{s}(\cdot,\xi)$ задачи (1.2) совпадает с множеством экстремалей и коэкстремалей принципа максимума Понтрягина для задачи (1.6), (1.7). Решения $\widetilde{x}, \widetilde{s}$ характеристической системы (1.3), (1.4) продолжимы до краевого многообразия $\sigma(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, в силу предположений $A1$–$A3$. Задачу оптимального управления можно сформулировать для произвольной начальной точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$. $\square$

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия A1–A3. Множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, на котором минимаксное решение $u(t,x)$ задачи* (1.2) *недифференцируемо, определяется соотношением*

$$F(t,x,\xi_1,\xi_2)=0, \ \ \textit{где} \ \ \xi_1 \neq \xi_2, \ \ \xi_i \in \mathbb{R}^n, \ \ i=1,2.$$

$$F(t,x,\xi_1,\xi_2)=\int_T^t \Big\langle \widetilde{x}(\tau,\xi_2), \frac{d\widetilde{s}(\tau,\xi_2)}{}d\tau \Big\rangle - H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_2),\widetilde{s}(\tau,\xi_2))\,d\tau -$$
$$-\int_T^t \Big\langle \widetilde{x}(\tau,\xi_1), \frac{d\widetilde{s}(\tau,\xi_1)}{d\tau} \Big\rangle - H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_1),\widetilde{s}(\tau,\xi_1))d\tau + \langle x, \widetilde{s}(t,\xi_1)-\widetilde{s}(t,\xi_2)\rangle + \sigma(\xi_1)-\sigma(\xi_2).$$

Здесь $\widetilde{x}(\cdot,\xi_i), \widetilde{z}(\cdot,\xi_i)$, $i=1,2$, — решения системы (1.3), (1.4), *удовлетворяющие условию*

$$\widetilde{x}(t,\xi_1)=\widetilde{x}(t,\xi_2)=x, \quad \widetilde{z}(t,\xi_1)=\widetilde{z}(t,\xi_2)=u(t,x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что минимаксное решение в задаче (1.2) супердифференцируемо, то есть в каждой точке множество $D^+u(t,x)$ непусто. В точках $(t,x) \in \Pi_T$, где минимаксное решение недифференцируемо, супердифференциал $D^+u(t,x)$ состоит не из единственного элемента. Предположим, что супердифференциал $D^+u(t,x)$ состоит из единственного элемента (α^0,p^0).

Тогда вычислим производную по направлению от функции u:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial(1,f)} = \min_{(\alpha,p)\in D^+u(t,x)} \alpha + \langle p,f\rangle = \alpha^0 + \langle p^0,f\rangle \quad \forall\, f \in \mathbb{R}^n.$$

Это эквивалентно следующему выражению:

$$u(t+\delta,x+\delta f)-u(t,x)=\alpha^0\delta+\langle p^0,\delta f\rangle + o(\delta) \quad \forall\, f\in\mathbb{R}^n.$$

Пусть $\triangle x = \delta f$, тогда

$$u(t+\delta,x+\triangle x)-u(t,x)=\alpha^0\delta+\langle p^0,\triangle x\rangle + o(\delta,||\triangle x||).$$

Отсюда следует, что функция u дифференцируема в точке (t,x).

Чтобы супердифференциал $D^+u(t,x)$ состоял не из единственного элемента, необходимо и достаточно выполнение следующих равенств [8]:

$$\widetilde{x}(t,\xi_1)=\widetilde{x}(t,\xi_2)=x, \quad \widetilde{z}(t,\xi_1)=\widetilde{z}(t,\xi_2)=u(t,x), \tag{1.8}$$

где $\widetilde{x},\widetilde{z}$ — решения характеристической системы (1.3), (1.4).

Значит, в точку (t,x) недифференцируемости функции u приходят хотя бы две характеристики $\widetilde{x}(t,\xi)$, стартующие из разных краевых условий $\xi_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2$.

Сопряженные компоненты $\widetilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $i=1,2$, характеристической системы (1.3) не совпадают в точке (t,x), в противном случае получим противоречие с единственностью решения характеристической системы.

Запишем равенство (1.8) в интегральной форме:

$$\int_T^t - H_s(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_1),\widetilde{s}(\tau,\xi_1))\,d\tau+\xi_1=\int_T^t - H_s(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_2),\widetilde{s}(\tau,\xi_2))\,d\tau+\xi_2=x,$$
$$\int_T^t \langle \dot{\widetilde{x}}(\tau,\xi_1),\widetilde{s}(\tau,\xi_1)\rangle + H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_1),\widetilde{s}(\tau,\xi_1))\,d\tau+\sigma(\xi_1)= \tag{1.9}$$
$$=\int_T^t \langle \dot{\widetilde{x}}(\tau,\xi_2),\widetilde{s}(\tau,\xi_2)\rangle + H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_2),\widetilde{s}(\tau,\xi_2))\,d\tau+\sigma(\xi_2)=u(t,x).$$

Проинтегрируем по частям условие (1.9), получим выражение

$$\langle \widetilde{x}(t,\xi_1), \widetilde{s}(t,\xi_1)\rangle - \int_T^t \Big\langle \widetilde{x}(\tau,\xi_1), \frac{d\widetilde{s}(\tau,\xi_1)}{d\tau}\Big\rangle - H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_1),\widetilde{s}(\tau,\xi_1))\,d\tau + \sigma(\xi_1) = \tag{1.10}$$

$$= \langle \widetilde{x}(t,\xi_2), \widetilde{s}(t,\xi_2)\rangle - \int_T^t \Big\langle \widetilde{x}(\tau,\xi_2), \frac{d\widetilde{s}(\tau,\xi_2)}{d\tau}\Big\rangle - H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_2),\widetilde{s}(\tau,\xi_2))\,d\tau + \sigma(\xi_2).$$

Напомним, что $\widetilde{x}(t,\xi_1) = \widetilde{x}(t,\xi_2) = x$. Получаем, что множество точек, на котором минимаксное решение u задачи (1.2) недифференцируемо, удовлетворяет уравнению

$$F(t,x,\xi_1,\xi_2) = 0, \text{ где } \xi_1 \neq \xi_2,$$

$$F(t,x,\xi_1,\xi_2) = \int_T^t \Big\langle \widetilde{x}(\tau,\xi_2), \frac{d\widetilde{s}(\tau,\xi_2)}{d\tau}\Big\rangle - H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_2),\widetilde{s}(\tau,\xi_2))\,d\tau -$$

$$-\int_T^t \Big\langle \widetilde{x}(\tau,\xi_1), \frac{d\widetilde{s}(\tau,\xi_1)}{d\tau}\Big\rangle - H(\tau,\widetilde{x}(\tau,\xi_1),\widetilde{s}(\tau,\xi_1))d\tau + \langle x, \widetilde{s}(t,\xi_1) - \widetilde{s}(t,\xi_2)\rangle + \sigma(\xi_1) - \sigma(\xi_2).$$

□

Пусть множество $W \subset \mathbb{R}^n$ выпуклое и компактное. Определим множество $W_0 \subset W$: $\operatorname{co} W_0 = W$, множество W_0 состоит из крайних точек множества W.

Введем определение обобщенного решения задачи (1.1).

Определение 3. Многозначная функция $W : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ с выпуклыми компактными значениями называется *обобщенным решением* задачи (1.1), если

(1) $W(0,x) = \sigma(x)$,

(2) функция W имеет замкнутый график,

(3) для произвольного непрерывно дифференцируемого контура $C \subset \Pi_T$ без самопересечений найдется измеримый селектор $w_0(t,x) \in W(t,x)$

$$\oint_C \langle w_0(t,x), dx\rangle - H(t,x,w_0(t,x))\,dt = 0,$$

(4) для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $x(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ $\forall\ \delta > 0$ $\forall\, w \in W_0(t,x(t))$

$$\int_t^{t+\delta} \langle w_0(\tau,x(\tau)), \dot{x}(\tau)\rangle - H(\tau,x(\tau),w_0(\tau,x(\tau)))\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\langle w, \dot{x}(t)\rangle - H(t,x(t),w)\Big)\delta + o(\delta).$$

Здесь w_0 выбирается из пункта 3 определения, $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 1. *Если выполнены предположения* A1–A3, *тогда обобщенное решение задачи* (1.1) *существует и единственно.*

Доказательство. Покажем, что частичный супердифференциал минимаксного решения $D_x^+u(T-t,x)$ удовлетворяет определению 3. В работе [7] доказано, что минимаксное решение задачи (1.2) существует и единственно при сделанных предположениях.

(1) Доопределим супердифференциал в момент $t = T$ по непрерывности: $D_x^+u(T,x) = \{\sigma(x)\} = W(0,x)$.

(2) Из свойств супердифферециала D^+u и непрерывности оператора проектирования на пространство $\mathbb{R}^n$ следует, что множество $D_x^+u(t,x)$ сохраняет все свойства супердифференциала $D^+u(t,x)$, то есть $D_x^+u(t,x)$ непусто, замкнуто, выпукло для всех $(t,x) \in \Pi_T$ и отображение $(t,x) \to D_x^+u(t,x)$ полунепрерывно сверху по включению, а значит, имеет замкнутый график.

(3) Обозначим $\psi(t,x) = u(T-t,x)$, где u — минимаксное решение задачи (1.2). Тогда из работы [7] следует, что функция ψ является минимаксным решением в задаче

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + H(t,x,D_x\psi(t,x)) = 0, \quad \psi(0,x) = \int_a^x \langle\sigma(y),dy\rangle,$$

следовательно, она обладает всеми свойствами минимаксного решения u задачи (1.2). Рассмотрим произвольные точки (t_1,x_1), (t_2,x_2) и непрерывно дифференцируемую кривую без самопересечений $t \to x(t):\ t \in [t_1,t_2]$, соединяющую эти точки.

Рассмотрим многозначное отображение

$$(t,x(t),\dot{x}(t)) \to M(t,x(t),\dot{x}(t)) = \mathrm{Argmin}[\langle p,\dot{x}(t)\rangle + \alpha : (\alpha,p) \in D^+\psi(t,x(t))],$$

которое является полунепрерывным сверху. По теореме Неймана–Аумана–Кастена, отображение $(t,x(t),\dot{x}(t)) \to M(t,x(t),\dot{x}(t))$ имеет измеримую однозначную ветвь $(t,x(t),\dot{x}(t)) \to \to w_0(t,x(t),\dot{x}(t))$.

В силу свойств минимаксного решения u задачи (1.2) существует его производная по направлению $(1,\dot{x}(t))$ в точке $(t,x(t))$ и справедлива формула [9]

$$\frac{\partial u(t,x(t))}{\partial(1,\dot{x}(t))} = \min_{(\alpha,p)\in D^+u(t,x(t))}[\langle p,\dot{x}(t)\rangle + \alpha]. \tag{1.11}$$

Применяя формулу (1.11), получим

$$\frac{\partial u(T-t,x(t))}{\partial(1,\dot{x}(t))} = \min_{(\alpha,p)\in D^+u(T-t,x(t))}[\langle p,\dot{x}(t)\rangle + \alpha] = \min_{(-\alpha,p)\in D^+\psi(t,x(t))}[\langle p,\dot{x}(t)\rangle - \alpha] =$$
$$= \langle w^*(t,x(t)),\dot{x}(t)\rangle - H(t,x(t),w^*(t,x(t))) = \frac{\partial\psi(t,x(t))}{\partial(1,\dot{x}(t))}.$$

Выберем w^* в качестве селектора $w_0 \in D_x^+\psi(t,x)$. Минимум линейной функции на выпуклом множестве достигается в его вершине. Отсюда

$$u(T-t_2,x(t_2)) - u(T-t_1,x(t_1)) = \psi(t_2,x(t_2)) - \psi(t_1,x(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi(\tau,x(\tau))}{\partial(1,\dot{x})}\,d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\langle w_0(\tau,x(\tau)),\dot{x}(\tau)\rangle - H(\tau,x(\tau),w_0(\tau,x(\tau)))\,d\tau$$

для произвольного $x(\cdot)$, соединяющего заданные точки $(t_1,x(t_1))$ и $(t_2,x(t_2))$. Следовательно, условие 3 выполняется.

(4) Минимаксное решение u задачи (1.2) является супердифференцируемым, значит, функция $\psi(t,x) = u(T-t,x)$ также супердифференцируема и справедливо неравенство

$$\psi(t+\delta,x(t+\delta)) - \psi(t,x) \leqslant (\alpha + \langle p,\dot{x}\rangle)\delta + o(\delta) \quad \forall\,\dot{x}\in\mathbb{R}^n,\ (\alpha,p)\in D^+\psi(t,x).$$

Рассмотрим множество W_0: $\mathrm{co}\,W_0 = D_x^+\psi(t,x)$ и W_0 состоит из крайних точек множества $D_x^+\psi(t,x)$. Применяя формулу (1.11) $\forall\,w\in W_0\subset D_x^+\psi(t,x)$, получим

$$\psi(t+\delta,x(t+\delta)) - \psi(t,x(t)) = \int_t^{t+\delta}\frac{\partial\psi(\tau,x(\tau))}{\partial(1,\dot{x})}\,d\tau =$$

$$= \int_t^{t+\delta}\langle w_0(\tau,x(\tau)),\dot{x}(\tau)\rangle - H(\tau,x(\tau),w_0(\tau,x(\tau)))\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant (\langle w,\dot{x}(t)\rangle - H(t,x(t),w))\delta + o(\delta).$$

Из локальной липшицевости минимаксного решения следует, что оно супердифференцируемо почти всюду и его супердифференциал почти всюду состоит из единственного элемента. Пусть многозначное отображение $W:\Pi_T\to 2^{\mathbb{R}^n}$ удовлетворяет условиям 1–3 определения 3.

Рассмотрим точку (t,x), в которой $D^+\psi(t,x)$ состоит не из единственного элемента. Рассмотрим все возможные последовательности точек $(t_n,x_n)\to(t,x)$, $n\to\infty$, в которых функция ψ дифференцируема. Обозначим

$$\alpha_n=\frac{\partial\psi(t_n,x_n)}{\partial t},\quad w_n=\frac{\partial\psi(t_n,x_n)}{\partial x}.$$

Тогда, по определению, множество

$$\Big(\lim_{(t_n,x_n)\to(t,x)}\alpha_n,\ \lim_{(t_n,x_n)\to(t,x)}w_n\Big)$$

принадлежит субдифференциалу Кларка $\partial\psi$, который совпадает с супердифференциалом $D^+\psi(t,x)$ для липшицевой функции ψ. Отсюда следует, что частичные супердифференциалы тоже совпадают:

$$\partial_x\psi(t,x)=D^+_x\psi(t,x).$$

Отображения W и $D^+_x\psi(t,x)$ полунепрерывны сверху по включению (по Какутани), значит, справедливо

$$\forall\,(t_n,x_n)\to(t,x),\ w_n=W(t_n,x_n)\subset D^+_x\psi(t,x)\Rightarrow W(t,x)\subset D^+_x\psi(t,x).$$

Покажем, что решение единственно. Предположим, что есть два решения, удовлетворяющих определению 3: $W_1=D^+_x\psi$ и W_2.

Рассмотрим две функции:

$$\varphi_1(t,x)=\int_{0,a}^{t,x}\langle w_1(t,x(t)),\dot x(t)\rangle-H(t,x(t),w_1(t,x(t)))\,dt+\sigma(a),$$

$$\varphi_2(t,x)=\int_{0,a}^{t,x}\langle w_2(t,x(t)),\dot x(t)\rangle-H(t,x(t),w_2(t,x(t)))\,dt+\sigma(a),$$

где $w_1\in W_1, w_2\in W_2$. Тогда функции φ_i, $i=1,2$, в точках дифференцируемости удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\varphi_i(t,x)}{\partial t}+H\Big(t,x,\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\Big)=0,\quad \varphi_i(0,x)=\int_a^x\langle\sigma(y),dy\rangle.$$

Функции φ_1,φ_2 являются непрерывными. Покажем, что функция φ_2 супердифференцируема. Рассмотрим производную по направлению

$$\frac{d\varphi_2(t,x(t))}{d(1,\dot x(t))}=\langle w_0,\dot x(t)\rangle-H(t,x(t),w_0).$$

В силу определения 3 выполнено неравенство

$$\varphi_2(t+\delta,x(t+\delta))-\varphi_2(t,x(t))=\int_t^{t+\delta}\frac{d\varphi_2(t,x(t))}{d(1,\dot x(t))}\,dt=\int_t^{t+\delta}\langle w_0,\dot x(t)\rangle-H(t,x(t),w_0)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\langle w,\dot x(t)\rangle-H(t,x(t),w)+o(\delta),$$

где $w\in W_{02}$. Элементы множества W_2 имеют вид, по теореме Каратеодори,

$$p=\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_iw_i,\quad w_i\in W_{02},\quad \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i=1,\quad \lambda_i\geqslant 0,\quad i=0,\dots,n+1.$$

Тогда

$$\varphi_2(t+\delta, x(t+\delta)) - \varphi_2(t, x(t)) \leqslant \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i(w_i - H(t, x(t), w_i)) + o(\delta), \quad \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0.$$

Следовательно, элементы $\left(\alpha = -\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i H(t, x(t), w_i), p = \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i w_i\right) \in D^+\varphi_2(t, x(t))$. Других элементов $D^+\varphi_2(t, x(t))$ не содержит. Предположим, что существует элемент $(\alpha^*, p^*) \in D^+\varphi_2(t, x(t))$ и $(\alpha^*, p^*) \notin W_2$, тогда этот элемент лежит на границе множества $D^+\varphi_2(t, x(t))$, а значит, найдется такое направление $f \in \mathbb{R}^n$, что $\dfrac{d\varphi_2(t, x(t))}{d(1, f)} = \langle p^*, f\rangle + \alpha^*$. Отсюда следует, что $p^* = w_0 \in W_2$ и $D_x^+\varphi_2(t, x(t)) = W_2$.

Проверим для функции φ_2 определение минимаксного/вязкостного решения [10]:

$$\alpha + H(t, x, p) \leqslant 0 \quad \forall\, (\alpha, p) \in D^+\varphi_2(t, x).$$

По определению функции φ_2, элемент ее супердифференциала имеет вид

$$p = \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i w_i, \quad \alpha = -\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i H(t, x, w_i), \quad w_i \in W_{02}, \quad \sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

Подставляя эти элементы в определение минимаксного решения, получим

$$\sum_{i=0}^{n+1} -\lambda_i H(t, x, w_i) + H\left(t, x, \sum_{i=0}^{n}\lambda_i w_i\right) \leqslant 0$$

в силу выпуклости функции H по переменной p. Следовательно, φ_2 является минимаксным решением, а значит, совпадает с функцией φ_1. □

§ 2. Связь между обобщенными решениями задач (1.1) и (1.2)

Из определения 3 следует связь между обобщенными решениями задач (1.1) и (1.2).

Утверждение 3. *Пусть W — обобщенное решение задачи* (1.1) *в смысле определения* 3. *Тогда интеграл*

$$\int_{0,a}^{t,x}\langle w_0(t, x), dx\rangle - H(t, x, w_0(t, x))\, dt \tag{2.1}$$

определяет функцию φ, для которой выполнено

$$\varphi(t, x) = u(T - t, x),$$

где u — минимаксное решение задачи (1.2) *с точностью до постоянной. Здесь w_0 — селектор многозначной функции W.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 3 следует, что интеграл (2.1) не зависит от пути интегрирования $x(t)$, в качестве w_0 выберем селектор $D_x^+u(T - t, x)$ такой, что

$$\frac{du(T - t, x(t))}{d(1, \dot{x})} = \langle w_0(t, x), \dot{x}\rangle - H(t, x, w_0(t, x)).$$

Тогда $\varphi(t, x) - \varphi(0, a) =$

$$= \int_{0,a}^{t,x}\langle w_0(\tau, x), dx\rangle - H(\tau, x, w_0(\tau, x))\, d\tau = \int_0^t \frac{du(T - \tau, x(\tau))}{d(1, \dot{x})}\, d\tau = u(T - t, x) - u(T, a).$$

Здесь u — минимаксное решение задачи (1.2). □

§ 3. Свойства обобщенного решения задачи (1.1)

Решение системы (1.1) может быть представлено в терминах характеристик (1.3), (1.4).

Утверждение 4. *Пусть W — обобщенное решение задачи* (1.1), *тогда*

$$W(t,x) = \operatorname{co}\{\widetilde{s}(T-t,\xi) : \xi \in \Psi\}, \text{ где } \Psi = \{\overline{\xi} : \ \widetilde{x}(T-t,\overline{\xi}) = x, \ \min_{\xi \in \mathbb{R}^n} \widetilde{z}(T-t,\xi) = \widetilde{z}(T-t,\overline{\xi})\}. \quad (3.1)$$

Здесь $\widetilde{x}, \widetilde{s}, \widetilde{z}$ — решение системы (1.3), (1.4).

Доказательство. Из теоремы (1) следует, что $w(T-t,x) = D_x^+ u(t,x)$, где u — минимаксное решение задачи (1.2). Применим свойство (2) минимаксного решения, получим формулу (3.1). □

Лемма 1. *Пусть (t_1,x_1) — точка непрерывности решения W задачи* (1.1). *Тогда решение W задачи* (1.1) *однозначно и существует единственная характеристика $\widetilde{x}, \widetilde{s}, \widetilde{z}$ системы* (1.3), (1.4) *такая, что $W(t_1,x_1) = \widetilde{s}(t_1,\xi)$, $\widetilde{x}(t_1,\xi) = x_1$.*

Доказательство. Из определения непрерывности многозначного отображения следует, что решение W должно быть полунепрерывно снизу, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |t-t_0| + ||x-x_0|| < \delta \Rightarrow W(t_0,x_0) \in W(t,x) + B^{\varepsilon}.$$

Здесь B^{ε} обозначает шар радиуса ε, $O_{\delta}(t_0,x_0) = \{(t,x) \in \Pi_T : |t-t_0| + ||x-x_0|| < \delta\}$. Как было показано ранее, $W(t,x)$ совпадает с супердифференциалом $D^+u(T-t,x)$ минимаксного решения задачи (1.2). Предположим, что в точке (t_0,x_0) решение W многозначно, тогда $w(t,x) = D_x^+ u(T-t,x)$ многозначно для любой точки $(t,x) \in O_{\delta}(t_0,x_0)$. Противоречие с тем, что минимаксное решение недифференцируемо на множестве меры нуль, то есть супердифференциал минимаксного решения многозначен на множестве меры нуль. Значит, в точках непрерывности W однозначно.

Из определения точки непрерывности функции W следует, что по произвольной последовательности $(t_k,x_k) \to (t_1,x_1)$ при $k \to \infty$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} W_i(t_k,x_k) = W_i(t_1,x_1)$.

Предположим, что в точку (t_1,x_1) пришло несколько характеристик и

$$W(t_1,x_1) = \operatorname{co}\{\widetilde{s}(t_1,\xi_i) : \ \widetilde{x}(t_1,\xi_i) = x_1, \ \min_{\eta} \widetilde{z}(t_1,\eta) = \widetilde{z}(t_1,\xi_1)\}.$$

Рассмотрим значения функций вдоль таких характеристик:

$$W(t_1,\widetilde{x}(t_k,\xi_i)) = \widetilde{s}(t_k,\xi_i) \to \widetilde{s}(t_1,\xi_i), \quad k \to \infty.$$

В точке (t_1,x_1) значения $\widetilde{s}(t_1,\xi_i)$ разные, в противном случае приходим к противоречию с теоремой Коши о существовании и единственности решения характеристической системы (1.3), (1.4). Таким образом, получили противоречие с непрерывностью W в точке (t_1,x_1). □

Утверждение 5. *Пусть решение W задачи* (1.1) *непрерывно в окрестности точки $(t_0,x_0) \in \in \Pi_T$ и дифференцируемо в точке (t_0,x_0) в смысле однозначной функции, тогда оно удовлетворяет системе* (1.1) *в этой точке.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $W_i(T-t,x) = \widetilde{s}_i(t,\xi)$. Продифференцируем это равенство по t:

$$-\frac{\partial W_i(T-t_0,x_0)}{\partial t} = \frac{d\widetilde{s}_i(t_0,\xi)}{dt} = H_{x_i}(t_0,\widetilde{x}(t_0,\xi),\widetilde{s}(t_0,\xi)) = H_{x_i}(t_0,x_0,W(t_0,x_0)).$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial W_i(t_0,x_0)}{\partial t} + H_{x_i}(t_0,x_0,W(t_0,x_0)) = 0.$$

□

Утверждение 6. *Если существует вектор-функция $w \in C^1$, удовлетворяющая системе (1.1) в каждой точке и начальному условию $w(0,x) = \sigma(x)$, тогда оно удовлетворяет определению 3.*

Доказательство. Решение w в каждой точке удовлетворяет системе уравнений (1.1). Следовательно, $w(t,x)$ удовлетворяет равенству

$$\oint_C \langle w, dx\rangle - H(t,x,w)\,dt = 0, \quad \text{где } C \in \Pi_T \text{ — произвольный замкнутый контур.}$$

Рассмотрим функцию φ, определенную формулой (2.1). Функция $\varphi \in C^2$ и удовлетворяет во всех точках уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H(t,x,D_x\varphi) = 0.$$

Причем $\nabla\varphi(t,x) = w(t,x),\ (t,x) \in \Pi_T$. Значит, $D_x^+\varphi(t,x) = \{\nabla\varphi(t,x)\} = \{w(t,x)\}\ \forall\,(t,x) \in \Pi_T$.

Отсюда

$$w(t,x) \in D_x^+\varphi(t,x) = \mathrm{co}\{\widetilde{s}(T-t,\xi) : \widetilde{x}(T-t,\overline{\xi}) = x,\ \min_{\xi\in\mathbb{R}^n}\widetilde{z}(T-t,\xi) = \widetilde{z}(T-t,\overline{\xi})\}.$$

$\square$

Исследуем зависимость определения (3) от входных данных задачи (1.1).

Определение 4. Пусть $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность с выпуклыми компактными значениями. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N(\varepsilon):\ \forall\,n > N(\varepsilon) \quad d_H(w_n, w) < \varepsilon.$$

Символ $d_H(w_n, w)$ обозначает расстояние по Хаусдорфу между множествами w_n и w.

Теорема 2. *Пусть задана последовательность дифференцируемых функций $\sigma^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Пусть (t_1, x_1) является точкой непрерывности функции W — решения задачи (1.1) с начальным условием $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Обозначим через W^n решение задачи (1.1) с начальным условием $\sigma^n(x)$. Если последовательность $\sigma^n(x)$ сходится к $\sigma(x)$ равномерно на любом компакте $D \subset \mathbb{R}^n$, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} W^n(t_1,x_1) = W(t_1,x_1) \text{ в смысле определения 4.}$$

Доказательство. По лемме 1, существует единственная характеристика $\widetilde{x}, \widetilde{s}$ такая, что $W(t_1, \widetilde{x}(t_1,\xi)) = \widetilde{s}(t_1,\xi)$.

Расстояние по Хаусдорфу между множеством $W^n(t_1,x_1)$ и точкой $W(t_1,x_1)$ имеет вид

$$d_H(W^n(t_1,x_1), W(t_1,x_1)) = \max_{v\in W^n(t_1,x_1)} ||v - W(t_1,x_1)|| = ||\widetilde{s}(t_1,\xi_n) - W(t_1,x_1)||. \tag{3.2}$$

Здесь $\widetilde{s}(t_1,\xi_n)$ — решение характеристической системы (1.3), (1.4) с краевым условием $\sigma^n(\xi_n)$ и соответствующая фазовая компонента $\widetilde{x}(t_1,\xi_n) = x_1$. Покажем, что максимум в выражении (3.2) достигается на одном из векторов $\widetilde{s}(t,\xi_n)$, на которые натянута выпуклая оболочка, образующая $D^+u(t,x)$. Поскольку множество $D^+u(t,x)$ выпуклое и замкнутое, то максимум достигается на элементе v^*, лежащем на границе этого множества. По теореме Каратеодори, элемент выпуклого множества имеет вид

$$v^* = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\widetilde{s}(t_1,\xi_i), \quad \sum_{i=0}^{n}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0.$$

Заметим, что

$$||\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\widetilde{s}(t_1,\xi_i) - W(t_1,x_1)|| \leqslant \sum_{i=0}^{n}\lambda_i||\widetilde{s}(t_1,\xi_i) - W(t_1,x_1)||.$$

Максимизируя выражение $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i||\widetilde{s}(t_1,\xi_i)-W(t_1,x_1)||$ по λ_i, получим, что максимум достигается при $\lambda_{i^*}=1$, остальные $\lambda_i=0$, $i\neq i^*$, из свойств задачи линейного программирования. Поэтому $v^*=\widetilde{s}(t_1,\xi_{i^*})$. Пусть $i^*=n$.

Оценим разность

$$||\widetilde{s}(t_1,\xi_n)-W(t_1,x_1)||=||\widetilde{s}(t_1,\xi_n)-\widetilde{s}(t_1,\xi))||.$$

По лемме Гронуолла, справедлива оценка

$$||\widetilde{s}^n(t_1,\xi_n)-\widetilde{s}(t_1,\xi)||+||\widetilde{x}^n(t_1,\xi_n)-\widetilde{x}(t_1,\xi)||\leqslant\delta(n)e^{Lt_1},$$

где $\delta(n)=||\widetilde{s}^n(0,\xi_n)-\widetilde{s}(0,\xi)||+||\widetilde{x}^n(0,\xi_n)-\widetilde{x}(0,\xi)||=||\sigma^n(\xi_n)-\sigma(\xi)||+||\xi_n-\xi||\leqslant$

$$\leqslant||\sigma^n(\xi_n)-\sigma^n(\xi)||+||\sigma^n(\xi)-\sigma(\xi)||+||\xi_n-\xi||.$$

По теореме о непрерывной зависимости решения $\widetilde{x},\widetilde{s}$ от начального условия следует, что $\xi_n\to\xi$ при $n\to\infty$. Тогда

$$d_H(W^n(t_1,x_1),W(t_1,x_1))\leqslant\delta(n)e^{Lt_1}dx\to 0\quad\text{равномерно на компакте } D,$$

так как $||\sigma^n(\xi)-\sigma(\xi)||\to 0$ равномерно на компакте D по условию, $||\sigma^n(\xi^n)-\sigma^n(\xi)||\to 0$ в силу дифференцируемости функции σ^n. $\square$

Обозначим $W_\tau(t,\cdot)$ решение задачи (1.1) с начальным условием, заданным в момент $t=\tau$, то есть $W_\tau(0,\cdot)=W(\tau,\cdot)$. Символ $W(\tau,\cdot)$ обозначает решение задачи (1.1) с начальным условием $W(0,\cdot)=\sigma(\cdot)$.

Замечание 1. Пусть W — обобщенное решение задачи (1.1), тогда оно обладает полугрупповым свойством, то есть

$$W_\tau(t,\cdot)=W(t+\tau,\cdot),\ \text{где } W_\tau(0,\cdot)=W(\tau,\cdot).$$

Так как $W(t,x)=D_x^+u(T-t,x)$, где u — минимаксное решение задачи (1.2) и функция u обладает полугрупповым свойством, то и ее супердифференциал D^+u также обладает этим свойством.

В работе [11] рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial H(t,x,\varphi(t,x))}{\partial x}=0,\quad\varphi(0,x)=\varphi_0(x).\tag{3.3}$$

Здесь $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

О. А. Олейник ввела понятие локального обобщенного решения φ для задачи (3.3) и показала, что характеристики $\tilde{x}(\cdot,\xi),\tilde{s}(\cdot,\xi)$ — решения системы (1.3), (1.4) — выживают в графике φ. Аналогичное свойство для обобщенного решения задачи (1.1) следует из определения 3 обобщенного решения.

Утверждение 7. *Пусть выполнены предположения A1–A3, тогда решение W задачи* (1.1) *обладает перечисленными ниже свойствами.*

*C*1. *Если точка $(t_1,x_1)\in\Pi_T$ является точкой непрерывности функции $W(t,x)$, то существует единственная характеристика $\widetilde{x}(\cdot,\xi)$, $\widetilde{s}(\cdot,\xi)$ системы* (1.3), (1.4) *такая, что*

$$\widetilde{x}(t_1,\xi)=x_1,\quad\widetilde{s}(t,\xi)=W(t,\widetilde{x}(t,\xi)),\quad 0\leqslant t\leqslant t_1.$$

$C2$. *Если точка* $(t_1, x_1) \in \Pi_T$ *является точкой, в которой функция* $W(t,x)$ *многозначна, то найдутся по крайней мере две характеристики* $\widetilde{x}(t,\xi_1), \widetilde{s}(t,\xi_1)$ *и* $\widetilde{x}(t,\xi_2)$, $\widetilde{s}(t,\xi_2)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, *системы* (1.3), (1.4) *такие, что*

$$\widetilde{x}(t_1,\xi_1) = x_1, \quad \widetilde{x}(t_1,\xi_2) = x_1,$$

$$\widetilde{s}(t,\xi_1) = W(t, \widetilde{x}(t,\xi_1)), \quad \widetilde{s}(t,\xi_2) = W(t, \widetilde{x}(t,\xi_2)), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

$C3$. $\oint\limits_C H(t,x,W(t,x))\,dt - \langle W(t,x), dx\rangle = 0$, *где контур* $C \in \Pi_T$ *образован характеристиками* $\widetilde{x}(\cdot,\xi_i)$ *из условия* $C2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Evans L.C. Partial differential equations. American Mathematical Society, 1997. 662 p.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 687 с.
3. Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations // Comm. Pure Appl. Math. 1965. Vol. 18. P. 697–715.
4. Danilov V.G., Shelkovich V.M. Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws // Quarterly of Applied Mathematics. 2005. Vol. 63. № 3. P. 401–427.
5. Dafermos C.M. Hyperbolic conservation law in continuum physics. Springer, 2005. 708 p.
6. Bressan A., Colombo R.M. Unique solutions of 2×2 conservation laws with large data // Indiana U. Math. J. 1995. Vol. 44. P. 677–725.
7. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
8. Subbotina N., Kolpakova E. On structure of the value function // Proceedings of the 18th IFAC World Congress. 2011. Vol. 18. Part I. P. 8040–8045. DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01451
9. Субботина Н.Н. Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–129.
10. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. № 1. P. 1–42.
11. Олейник О.А. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Доклады Академии наук СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 451–454.

Поступила в редакцию 13.03.2014

Колпакова Екатерина Алексеевна, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: eakolpakova@gmail.com

E. A. Kolpakova

Generalized solution for system of quasi-linear equations

Keywords: systems of quasilinear equations, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, minimax/viscosity solution, method of characteristics.

MSC: 35L40, 35D35

We consider the Cauchy problem for the system of quasi-linear first order equations of a special form. The system is symmetric, the state variable is n-dimensional. The considered Cauchy problem is deduced from the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation by means of the operation of differentiation of this equation and the boundary condition with respect to the variable x_i. It is assumed that the Hamiltonian

and the initial condition are continuously differentiable functions. The Hamiltonian is convex with respect to the adjoint variable.

The paper presents a new approach to the definition of the generalized solution of the system of quasi-linear first order equations. The generalized solution belongs to the class of multivalued functions with convex compact values. We prove the existence, uniqueness and stability theorems. The semigroup property for the proposed generalized solution is obtained. It is shown that the potential for generalized solutions of quasi-linear equations coincides with the unique minimax/viscosity solution of the corresponding Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation, and at the points of differentiability of the minimax solution its gradient coincides with the generalized solution of the Cauchy problem. Properties of the generalized solutions of the Cauchy problem for a system of quasi-linear equations are obtained on the basis of this connection. In particular, it is shown that the introduced generalized solution coincides with the superdifferential of the minimax solution of the Cauchy problem and is singlevalued almost everywhere.

The structure of the set of points at which the minimax solution is not differentiable is described by using the characteristics of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation.

It is shown that the property of the generalized solution of the quasilinear equation with a scalar state variable proposed by O. A. Oleinik, can be extended to the case of the system of quasi-linear equations under consideration.

REFERENCES

1. Evans L.C. *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1997, 662 p.

2. Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. *Systemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* (System of quasi-linear equations and their application to gas dynamics), Moscow: Nauka, 1968, 687 p.

3. Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1965, vol. 18, pp. 697–715.

4. Danilov V.G., Shelkovich V.M. Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws, *Quarterly of Applied Mathematics*, 2005, vol. 63, no. 3, pp. 401–427.

5. Dafermos C.M. *Hyperbolic conservation law in continuum physics*, Springer, 2005, 708 p.

6. Bressan A., Colombo R.M. Unique solutions of 2×2 conservation laws with large data, *Indiana U. Math. J.*, 1995, vol. 44, pp. 677–725.

7. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDE's. The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhauser, 1995, 312 p. Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspectivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2003, 336 p.

8. Subbotina N., Kolpakova E. On structure of the value function, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011, vol. 18, part I, pp. 8040–8045. DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01451

9. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations and applications to dynamical optimization, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 3, pp. 2955–3091.

10. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42.

11. Oleinik O.A. About the Cauchy problem for nonlinear equations in the class of discontinuous functions *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1954, vol. 95, no. 3, pp. 451–454 (in Russian).

Received 13.03.2014

Kolpakova Ekaterina Alekseevna, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: eakolpakova@gmail.com