УДК 519.21, 517.977

© *Н. С. Исмагилов*

ОБ ОДНОМ ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМОЙ ДИФФУЗИЕЙ

В работе рассматривается задача оптимального управления одномерным процессом, заданным стохастическим дифференциальным уравнением, в котором управление воздействует как на коэффициент сноса, так и на коэффициент диффузии, при этом диффузионная составляющая линейна по управлению

$$dx(t) = b(t, x(t), u(t))\,dt + \sigma(t, x(t))u(t)\,dW(t), \quad x(0) = x_0.$$

Здесь $x(t)$ — фазовая координата, $u(t)$ — управляющая функция, $W(t)$ — винеровский процесс. Доказана теорема, которая предоставляет структуру решения рассматриваемого уравнения в виде суперпозиции функций $x(t) = \Phi(t, u(t)W(t) + y(t))$, в котором $\Phi(t, v)$ — известная функция, полностью определяющаяся коэффициентом $\sigma(t, x)$, и не зависит от управления, а $y(t)$ — решение потраекторно-детерминированного дифференциального уравнения с мерой вида

$$dy(t) = B(t, y(t), u(t))\,dt - W(t)\,du(t).$$

Выявленная структура решения позволяет вместо исходной стохастической задачи оптимального управления исследовать новую эквивалентную задачу с фазовой переменной $y(t)$, которая является потраекторно-детерминированной задачей оптимального импульсного управления. При детерминированном рассмотрении новой задачи решения последней могут оказаться упреждающими функциями, поэтому в работе предлагается метод, который позволяет добиться неупреждаемости оптимальных решений. Суть метода заключается в модификации функционала потерь в новой потраекторно-детерминированной задаче специальным образом подобранным интегральным слагаемым, которое позволяет гарантировать неупреждаемость решений.

Ключевые слова: стохастическое оптимальное управление, стохастические дифференциальные уравнения, детерминированный подход, потраекторная оптимизация, оптимальное импульсное управление.

Введение

Работа посвящена применению детерминированного подхода к задаче оптимального управления стохастическими дифференциальными уравнениями (в дальнейшем СДУ). К ранним исследованиям в этой области относятся работы [1, 2]. В них показано, что в некоторых случаях стохастическая задача может быть рассмотрена с детерминированной точки зрения, сформулирована одна из важнейших проблем перехода к детерминированным задачам, связанная с необходимостью обеспечения неупреждаемости решений, и предложен метод, который позволяет обеспечивать неупреждаемость путем введения множителей Лагранжа в функционал потерь.

Позже данная проблема подробно исследовалась в работах [3] и [4] для линейных и нелинейных задач соответственно. В этих работах показано, что стохастическая задача может быть сведена к детерминированной, приведена формула для множителей Лагранжа.

Ранее автором настоящей статьи совместно с Ф. С. Насыровым был получен результат [5], аналогичный представленному в работе [4] и во многом основанный на нем. Преимущественным отличием [5] является применение более простого метода сведения стохастической задачи к детерминированной, который основан на явной формуле для решения СДУ. Была доказана возможность построения детерминированной задачи, эквивалентной исходной. Доказано, что при модификации функционала качества можно добиться неупреждаемости решений детерминированной задачи.

Настоящая работа является обобщением подхода, представленного в [5] на класс задач, в которых СДУ, задающее дифференциальное ограничение, имеет управляемую диффузионную составляющую. Управление диффузией при этом линейно. Автору удалось свести исходную стохастическую задачу к потраекторно-детерминированной, которая, в отличие от [5], имеет импульсную составляющую. Показано, что функционал качества может быть модифицирован таким образом, чтобы решение детерминированной задачи потраекторно совпадало с (неупреждающим) решением исходной стохастической задачи.

§ 1. Постановка задачи

Приведем постановку рассматриваемой стохастической задачи оптимального управления. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$ — полное вероятностное пространство, наделенное естественной фильтрацией одномерного стандартного винеровского процесса $W(t)$, $t \in [0,T]$, $T > 0$. Пусть на этом вероятностном пространстве задан одномерный управляемый процесс

$$dx(t) = b(t, x(t), u(t))\, dt + \sigma(t, x(t))u(t) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x(t)$ — фазовая координата управляемого процесса, $u(t)$ — управляющая функция из класса $\mathcal{N}$ согласованных процессов с траекториями ограниченной вариации на отрезке $[0,T]$, которая принимает значения в замкнутом выпуклом множестве $V \subset \mathbf{R}$, дифференциал винеровского процесса $\circ dW(t)$ понимается в смысле Стратоновича. Качество управления оценивается функционалом потерь

$$\mathbf{E}J := \mathbf{E}g(x(T)) \to \min_{u\in\mathcal{N}}. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания. Требуется найти управляющую функцию $u(t)$, доставляющую минимум функционалу $\mathbf{E}J$. Стохастическую задачу (1.1), (1.2) будем кратко обозначать $(\mathcal{S})$.

Наш подход к задаче $(\mathcal{S})$ заключается в следующем. Сначала мы докажем теорему о представлении решения СДУ, которая позволяет в задаче $(\mathcal{S})$ заменить дифференциальное ограничение (1.1), задаваемое СДУ, на эквивалентное ограничение, которое можно рассматривать как потраекторное детерминированное дифференциальное уравнение. Далее мы покажем, что в критерии качества (1.2) усредненный функционал $\mathbf{E}J$ можно заменить на потраекторный и сформулируем детерминированную задачу, неупреждающие решения которой совпадают с решениями $(\mathcal{S})$. После этого докажем, что детерминированная задача может быть модифицирована таким образом, чтобы оптимум достигался на неупреждающей функции.

§ 2. Сведение стохастической задачи к детерминированной

Будем говорить, что функция $f(t, x, u) : [0,T]\times\mathbf{R}\times V \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, если существует константа L такая, что для всех $t \in [0,T]$ и всех $u \in V$ выполнено неравенство

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leqslant L|x - y|.$$

Следующая теорема предоставляет структуру решения уравнения (1.1) и является обобщением на случай управляемых процессов результата, приведенного в монографии [6].

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $\sigma(t, x)$ *дважды непрерывно дифференцируема, ее частная производная* σ'_x *ограничена, а сама функция отделена от нуля, то есть существует константа* δ *такая, что* $|\sigma(t, x)| > \delta > 0$. *Предположим далее, что функция* $b^*(t, x, u) = b(t, x, u) + \frac{1}{2}\sigma'_x(t, x)\sigma(t, x)u^2$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *на* $\mathbf{R}$.

Пусть $\Phi(t, v)$ — *произвольное решение параметризованного обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v}(t, v) = \sigma(t, \Phi), \tag{2.1}$$

а функция $B(t,y,u):[0,T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *определенная выражением*

$$B(t,y,u)=\frac{b(t,\Phi(t,uW(t)+y),u)-\Phi'_t(t,uW(t)+y)}{\sigma(t,\Phi(t,uW(t)+y))}, \tag{2.2}$$

удовлетворяет условию Липшица по y. *Тогда решение уравнения* (1.1) *может быть представлено в виде*

$$x(t)=\Phi(t,u(t)W(t)+y(t)), \tag{2.3}$$

где $y(t)$ *— решение уравнения с мерами*

$$dy(t)=B(t,y(t),u(t))\,dt-W(t)\,du(t) \tag{2.4}$$

с начальным условием $y(0)=y_0:\Phi(0,y_0)=x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из липшицевости B следует (см. [7]), что для любого начального условия уравнение (2.4) имеет решение, которое является функцией ограниченной вариации. Следовательно, согласованный процесс $y(t)$ — семимартингал, и так как $\Phi(t,v)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то к $\xi_t=\Phi(t,u(t)W(t)+y(t))$ можно применить формулу Ито (см. [8]):

$$\begin{aligned}\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t\Phi'_t(s)\,ds+\int_0^t\Phi'_v(s)u(s)\circ dW(s)+\int_0^t\Phi'_v(s)W(s)\circ du(s)+\\+\int_0^t\Phi'_v(s)\circ dy(s)+\sum_{0<\tau\leqslant t}\big\{\Phi(\tau)-\Phi(\tau-)-\Phi'_v(\tau-)W(\tau)\Delta u_\tau-\Phi'_v(\tau)\Delta y_\tau\big\}.\end{aligned}$$

Здесь для функции Φ и ее частных производные Φ'_t и Φ'_v использовано сокращенное обозначение аргументов (s) вместо $(s,u(s)W(s)+y(s))$, $\Delta u_\tau=u(\tau)-u(\tau-)$ и $\Delta y_\tau=y(\tau)-y(\tau-)$. В силу ограниченности вариаций функций $u(t)$ и $y(t)$ стохастические интегралы по этим функциям совпадают с интегралами Лебега–Стилтьеса, а сами функции могут быть представлены как суммы непрерывных и дискретных компонент. Поэтому выражение для $\xi(t)$ можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t\Phi'_t(s)\,ds+\int_0^t\Phi'_v(s)u(s)\circ dW(s)+\int_0^t\Phi'_v(s)W(s)\,du^c(s)+\\+\sum_{0<\tau\leqslant t}\Phi'_v(\tau-)W(\tau)\Delta u_\tau+\int_0^t\Phi'_v(s)\,dy^c(s)+\sum_{0<\tau\leqslant t}\Phi'_v(\tau-)\Delta y_\tau+\\+\sum_{0<\tau\leqslant t}\big\{\Phi(\tau)-\Phi(\tau-)-\Phi'_v(\tau-)W(\tau)\Delta u_\tau-\Phi'_v(\tau-)\Delta y_\tau\big\}=\\=\xi_0+\int_0^t\Phi'_t(s)\,ds+\int_0^t\Phi'_v(s)u(s)\circ dW(s)+\int_0^t\Phi'_v(s)W(s)\,du^c(s)+\\+\int_0^t\Phi'_v(s)\,dy^c(s)+\sum_{0<\tau\leqslant t}\big\{\Phi(\tau)-\Phi(\tau-)\big\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь u^c и y^c — непрерывные компоненты функций $u(t)$ и $y(t)$ соответственно. В силу того, что функции Φ и y удовлетворяют соотношениям (2.1) и (2.4) соответственно, последнее выражение в (2.5) можно переписать в виде

$$\xi(0)+\int_0^t \Phi'_t(s)\,ds+\int_0^t \sigma(s,\Phi(s))u(s)\circ dW(s)+\int_0^t \sigma(s,\Phi(s))W(s)\,du^c(s)+$$
$$+\int_0^t \sigma(s,\Phi(s))\frac{b(s,\Phi(s),u(s))-\Phi'_t(s)}{\sigma(s,\Phi(s))}\,ds-\int_0^t \sigma(s,\Phi(s))W(s)\,du^c(s)+$$
$$+\sum_{0<\tau\leqslant t}\Big\{\Phi(\tau,u(\tau)W(\tau)+y(\tau))-\Phi(\tau,u(\tau-)W(\tau)+y(\tau-))\Big\}=$$
$$=\xi(0)+\int_0^t b(s,\Phi(s),u(s))\,ds+\int_0^t \sigma(s,\Phi(s))u(s)\circ dW(s).$$

Последнее в сочетании с начальным условием $x(0)=\xi(0)$ означает, что процесс $\xi(t)=\Phi(t,u(t)W(t)+y(t))$ является единственным решением задачи (1.1). □

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 процесс $x(t)$ является решением (1.1) тогда и только тогда, когда он представляется в виде (2.3), а $y(t)$ является решением (2.4). Из этого можно сделать вывод о том, что ограничение, накладываемое уравнением (1.1), эквивалентно уравнению (2.4) при условии (2.3). Поэтому если в функционале качества (1.2) заменить $x(t)$ на его представление через Φ, то можно перейти к эквивалентной задаче с новой фазовой координатой:

$$dy(t)=B(t,y(t),u(t))\,dt-W(t)\,du(t),\quad y(0)=y_0, \tag{2.6}$$
$$\mathbf{E}J=\mathbf{E}G(y(T),u(T))\to\min_{u\in\mathcal{N}}. \tag{2.7}$$

Здесь и далее $B(t,y,u)$ — функция, заданная соотношением (2.2), $G(y,u)=g(\Phi(T,uW(T)+y))$.

В новой задаче, хотя коэффициенты (2.6) и являются случайными функциями, само уравнение не содержит стохастических дифференциалов, поэтому для каждого значения ω мы можем рассматривать его как детерминированное дифференциальное уравнение. То же самое можно сказать и о самой задаче (2.6), (2.7), для каждого ω она является детерминированной задачей оптимизации. Такая интерпретация позволяет решать задачу детерминированными методами. Однако при потраекторном рассмотрении выделение класса неупреждающих функций среди всех измеримых функций становится нетривиальной задачей. Кроме того, дополнительную сложность вызывает наличие функционала математического ожидания в (2.7), который в таком виде не вполне вписывается в детерминированную постановку задачи оптимального управления.

Для того чтобы избавиться от ограничения на неупреждаемость, будем искать решение задачи (2.6), (2.7) в классе $\mathcal{M}$ всех измеримых функций ограниченной вариации со значениями в V, более широком, чем класс $\mathcal{N}$. При этом, конечно же, потребуется каким-либо образом гарантировать, что решения расширенной задачи будут находиться в $\mathcal{N}$, то есть будут неупреждающими. Отметим, что и уравнение, и функционал качества не теряют смысла при переходе от $\mathcal{N}$ к $\mathcal{M}$, поэтому переход к расширенной задаче возможен.

Как показывает следующая лемма, усредненный функционал потерь может быть заменен на потраекторный.

Лемма 1. *Пусть $\inf_{u\in\mathcal{M}}J(u)$ ограничен снизу и достигается на некоторой измеримой функции $\overline{u}$. Тогда справедливо равенство*

$$\inf_{u\in\mathcal{M}}\mathbf{E}J(u)=\mathbf{E}\inf_{u\in\mathcal{M}}J(u). \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как $J(\overline{u})=\inf_{u\in\mathcal{M}}J(u)$, а J для $u\in\mathcal{M}$ определено в (2.7), то $\inf_{u\in\mathcal{M}}J(u)$ является измеримой функцией и интеграл в правой части (2.8) имеет смысл.

Утверждение леммы легко следует из неравенства $\mathbf{E}J(\overline{u}) \leqslant \mathbf{E}J(u)$ для всех $u \in \mathcal{M}$ и вытекающего из него неравенства

$$\mathbf{E}J(\overline{u}) \leqslant \inf_{u \in \mathcal{M}} \mathbf{E}J(u).$$

□

Применяя лемму 1 к (2.7), заменим его на потраекторный функционал и запишем расширение задачи (2.6), (2.7):

$$dy(t) = B(t, y(t), u(t))\, dt - W(t)\, du(t), \quad y(0) = y_0, \tag{2.9}$$

$$G(y(T), u(T)) \to \min_{u \in \mathcal{M}}. \tag{2.10}$$

Однако такая форма записи не очень удобна для дальнейшего исследования, так как импульсное управление входит в коэффициент B, а известные автору критерии оптимальности импульсных процессов непосредственно не применимы к задаче, сформулированной в виде (2.9)–(2.10). Тем не менее, если рассмотреть $u(t)$ как фазовую координату и ввести новую управляющую функцию ϑ, задача (2.9)–(2.10) принимает эквивалентный вид

$$dy(t) = B(t, y(t), u(t))\, dt - W(t)\, d\vartheta, \quad y(0) = y_0, \tag{2.11}$$

$$du(t) = d\vartheta, \quad u(t) \in V, \tag{2.12}$$

$$G(y(T), u(T)) \to \min_{u \in \mathcal{M}}. \tag{2.13}$$

Здесь введено новое импульсное управление $\vartheta = (\mu, \{v_\tau\})$ со значениями в конусе $K = \mathbf{R}$, а $u(t)$ рассматривается как фазовая координата. В силу (2.12) имеем $u \equiv \vartheta$, поэтому система (2.11)–(2.12) и уравнение (2.6) задают одно и то же ограничение, а задача поиска $u(t)$ сводится к поиску ϑ.

Задачу (2.11)–(2.13), которая представляет из себя параметризованное параметром $\omega \in \Omega$ семейство детерминированных задач оптимального импульсного управления, будем называть задачей $(\mathcal{D})$. Некоторые сведения о задачах импульсного управления приведены в приложении. Более подробно с теорией импульсного управления и условиями оптимальности импульсных процессов можно ознакомиться в работах [7, 9–11].

Важно отметить, что так как $(\mathcal{D})$ является расширением (2.6), (2.7), то в тех случаях, когда оптимум $(\mathcal{D})$ достигается на некоторой неупреждающей функции, на ней же достигается оптимум (2.6), (2.7) и, как следствие, оптимум $(\mathcal{S})$.

§ 3. Модификация детерминированной задачи

Обратимся теперь к вопросу неупреждаемости управлений. Воспользуемся идеей, предложенной в [4] и ранее примененной в [5], которая заключается в том, чтобы модифицировать функционал потерь, добавив к нему интегральное слагаемое, обеспечивающее неупреждаемость.

$$J^\Lambda = J + \int_0^T \Lambda(t)\, d\vartheta = G(y(T), u(T)) + \int_0^T \Lambda(t)\, d\vartheta.$$

Функция $\Lambda(t)$ будет определена ниже.

С новым функционалом потерь задача $(\mathcal{D})$ переписывается в следующем виде:

$$dy(t) = B(t, y(t), u(t))\, dt - W(t)\, d\vartheta, \tag{3.1}$$

$$du(t) = d\vartheta, \tag{3.2}$$

$$dz(t) = \Lambda(t)\, d\vartheta, \tag{3.3}$$

$$G^\Lambda(y(T), u(T), z(T)) = G(y(T), u(T)) + z(T) \to \min_{u \in \mathcal{M}}, \tag{3.4}$$

$$R(\vec{y}(t), t) \in C(t), \tag{3.5}$$

$$\vec{p} = (\vec{y}(0), \vec{y}(T)) \in S. \tag{3.6}$$

Здесь через $\vec{y}(t)$ обозначен вектор фазовых переменных $(y(t), u(t), z(t))$, $\vec{p}$ — вектор концевых значений, $R(t, \vec{y}(t)) = u(t)$, $C(t) = V$, $S = \{(y_0, u, 0, Y, U, Z) : u, U \in V;\ Y, Z \in \mathbf{R}\}$, ϑ принимает значения в конусе $K = \mathbf{R}$. Соотношение (3.5) задает фазовые ограничения, а (3.6) — ограничения на начальные и конечные значения. Отметим, что в задаче появилась новая фазовая переменная $z(t)$, отвечающая добавленному в функционал потерь интегральному слагаемому. Задачу (3.1)–(3.6) будем называть задачей $(\mathcal{D}^\Lambda)$.

Теперь мы готовы сформулировать явную формулу для функции $\Lambda(t)$, при котором решение задачи $(\mathcal{D}^\Lambda)$ будет неупреждающим и совпадать с $(\mathcal{D})$. В ходе доказательства теоремы будет использован принцип максимума Понтрягина для задач импульсного управления (см. [11]). В разделе «Дополнение» для удобства приведена его формулировка.

Теорема 2. *Пусть функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, функция $B(t, y, u)$ и ее частные производные по (y, u) ограничены, измеримы по Лебегу по t для всех фиксированных (y, u) и непрерывно дифференцируемы по (y, u). Пусть, кроме того, задача $(\mathcal{S})$ имеет оптимальные решение $(\widehat{x}, \widehat{u})$. Предположим, что $\Lambda(t)$ имеет вид*

$$\Lambda(t) = -W(t)\Psi^1(t) + \Psi^2(t),$$

где

$$\Psi^1(t) = -\frac{\partial G}{\partial y}(\widehat{y}(T), \widehat{u}(T)) \exp\Big\{ \int_t^T \frac{\partial B}{\partial y}(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\, ds \Big\},$$
$$\Psi^2(t) = -\frac{\partial G}{\partial u}(\widehat{y}(T), \widehat{u}(T)) \frac{t}{T}.$$

Здесь $\widehat{y}(t) = \Phi^{-1}(t, \widehat{x}(t)) - \widehat{u}(t)W(t)$, $\Phi^{-1}(t, x)$ — функция, обратная к $\Phi(t, v)$ по v. Тогда если оптимальное управление в задаче $(\mathcal{D}^\Lambda)$ существует, то оно совпадает с управлением $\widehat{u}$, оптимальным в исходной стохастической задаче $(\mathcal{S})$.

Доказательство. Выпишем принцип максимума для задачи (3.1)–(3.4):

$$H(t, \vec{y}(t), \vec{\psi}(t)) = B(t, y(t), u(t))\psi^1(t),$$

$$Q(t, \vec{y}(t), \vec{\psi}(t)) = -W(t)\psi^1(t) + \psi^2(t) + \Lambda(t)\psi^3(t).$$

Здесь через $\vec{y}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ обозначены соответственно векторы фазовых переменных $(y(t), u(t), z(t))$ и сопряженных переменных $(\psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t))$.

Предельные уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma^1_\tau(s)}{ds} = 0, \\ \dfrac{d\sigma^2_\tau(s)}{ds} = \eta_\tau(s), \\ \dfrac{d\sigma^3_\tau(s)}{ds} = 0, \\ s \in [0, 1], \quad \sigma^i_\tau(0) = \psi^i(\tau-), \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Следовательно, скачки может иметь только ψ^2. Сопряженные переменные подчиняются системе

$$\begin{cases} \psi^1(t) = \psi^1(0) - \displaystyle\int_0^t \frac{\partial B}{\partial y}\psi^1\, ds, \\ \psi^2(t) = \psi^2(0) - \displaystyle\int_0^t \frac{\partial B}{\partial u}\psi^1\, ds + \int_0^t \eta(s)\, ds + \sum_{\tau \in Ds(\vartheta)} (\sigma^2_\tau(1) - \psi^2(\tau-)), \\ \psi^3(t) = \psi^3(0). \end{cases}$$

Здесь $Ds(\vartheta)$ есть (не более чем счетное) множество точек $\tau \in [0,T]$, на котором сосредоточены скачки ϑ.

Условия трансверсальности имеют вид

$$(\vec{\psi}(0), -\vec{\psi}(T)) \in \lambda \frac{\partial G^{\Lambda}}{\partial \vec{p}} + N_S(\vec{p}).$$

Принимая во внимание, что $N_S(p) = (y, 0, z, 0, 0, 0)$, а $\nabla G^{\Lambda} = (0, 0, 0, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial u}, 1)$, можно вычислить сопряженные переменные

$$\psi^1(t) = -\lambda \frac{\partial G}{\partial y}(y(T), u(T)) \exp\left\{ \int_t^T \frac{\partial B}{\partial y}(s, y(s), u(s))\, ds \right\}, \tag{3.7}$$

$$\psi^2(t) = -\int_0^t \frac{\partial B}{\partial u}(s, y(s), u(s))\psi^1(s)\, ds + \int_0^t \eta(s)\, ds + \sum_{\tau \in Ds(\vartheta)} (\sigma^2_\tau(1) - \psi^2(\tau-)), \tag{3.8}$$

$$\psi^3(t) \equiv \psi^3(T) = -\lambda. \tag{3.9}$$

Кроме того, для ψ^2 должно выполняться условие

$$\psi^2(T) = -\lambda \frac{\partial G}{\partial u}(y(T), u(T)). \tag{3.10}$$

Условия максимума имеют вид

$$\begin{cases} \max\limits_{v \in K} v\Big(-W(t)\psi^1(t) + \psi^2(t) + \Lambda(t)\psi^3(t)\Big) = 0 \quad \forall t \in [0,T], \\ \max\limits_{v \in K} v\Big(-W(\tau)\sigma^1_\tau(s) + \sigma^2_\tau(s) + \Lambda(\tau)\sigma^3_\tau(s)\Big) = 0 \quad \text{для п.в. } s,\ \forall \tau \in Ds(\vartheta), \\ \int\limits_{[0,t]} \Big(-W(s)\psi^1(s) + \psi^2(s) + \Lambda(s)\psi^3(s)\Big)\, ds = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Первое условие максимума (3.11) равносильно равенству

$$-W(t)\psi^1(t) + \psi^2(t) - \lambda\Lambda(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.12}$$

Из второго условия (3.11) извлекаем

$$-W(\tau)\psi^1(\tau) + \int_0^s \eta_\tau(s)\, ds + \psi^2(\tau-) - \lambda\Lambda(\tau) = 0 \quad \text{для п.в. } s,\ \forall \tau \in Ds(\vartheta). \tag{3.13}$$

Условие (3.12) выполнено для всех $t \in [0,T]$, поэтому, применяя его к (3.13), получаем

$$\psi^2(\tau) - \psi^2(\tau-) = \int_0^s \eta_\tau(s)\, ds \quad \text{для п.в. } s,\ \forall \tau \in Ds(\vartheta),$$

откуда следует, что $\eta_\tau(s) = 0$ для п.в. s и всех $\tau \in Ds(\vartheta)$, и $\psi^2(t)$ скачков не имеет. Теперь в (3.8) $\eta(s)$ можно подобрать так, что выполняется (3.10):

$$\eta(s) = -\lambda \frac{\partial G}{\partial u}(y(T), u(T))\frac{1}{T} + \frac{\partial B}{\partial u}(s, y(s), u(s))\psi^1(s),$$

и при таком $\eta(s)$ сопряженная переменная $\psi^2(t)$ принимает вид

$$\psi^2(t) = -\lambda \frac{\partial G}{\partial u}(y(T), u(T))\frac{t}{T}. \tag{3.14}$$

Таким образом, вектор сопряженных переменных $\vec{\psi}(t)$ полностью определен и задается выражениями (3.7), (3.14), (3.9). При таком $\vec{\psi}(t)$ из (3.12) следуют второе и третье условия максимума (3.11).

Остается извлечь из (3.12) условия на фазовые координаты. Подставляя значение $\Lambda(t)$ из условия теоремы, имеем

$$-\lambda W(t)\Psi^1(t)+\lambda\Psi^2(t)=-W(t)\psi^1(t)+\psi^2(t)\quad \forall t\in[0,T].$$

Нетрудно проверить, что равенство возможно только при $y(t)=\widehat{y}(t)$ и $u(t)=\widehat{u}(t)$, то есть принцип максимума удовлетворяется только на этих значениях. Следовательно, $(\widehat{y}(t),\widehat{u}(t))$ является оптимальной траекторией для задачи $(\mathcal{D}^\Lambda)$. □

§ 4. Обобщение на задачи с интегральным функционалом качества

Приведенный выше результат, включая теорему 2, можно обобщить на тот случай, когда в задаче $(\mathcal{S})$ функционал потерь содержит интегральное слагаемое, то есть

$$\mathbf{E}J=\mathbf{E}\big[g(x(T))+\int_0^T f(t,x(t),u(t)\,dt)\big]\to\min_{u\in\mathcal{N}}. \tag{4.1}$$

Задачу (1.1), (4.1) обозначим $(\mathcal{S}')$. Так как в задачах $(\mathcal{S})$ и $(\mathcal{S}')$ дифференциальные уравнения совпадают, а формулировка и доказательство леммы 1 остаются справедливыми для J, заданного в (4.1), то, используя теорему 1 и лемму 1, задачу $(\mathcal{S}')$ можно свести к задаче $(\mathcal{D}')$:

$$\begin{aligned}
&dy(t)=B(t,y(t),u(t))\,dt-W(t)\,d\vartheta,\quad y(0)=y_0,\\
&du(t)=d\vartheta,\quad u(t)\in V,\\
&G(y(T),u(T))+\int_0^T F(t,y(t),u(t))\,dt\to\min_{u\in\mathcal{N}},
\end{aligned}$$

где $G(y,u)=g(\Phi(T,uW(T)+y))$, $F(t,y,u)=f(t,\Phi(t,uW(t)+y),u)$, $u(t)$ рассматривается как фазовая координата, а $\vartheta=(\mu,\{v_\tau\})$ — новое импульсное управление со значениями в конусе $K=\mathbf{R}$.

Неупреждаемость, аналогично, достигается при помощи интегрального слагаемого $\displaystyle\int_0^T\Lambda(t)\,d\vartheta$ в функционале потерь. Модифицированная задача $(\mathcal{D}^{\Lambda'})$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
&dy(t)=B(t,y(t),u(t))\,dt-W(t)\,d\vartheta,\\
&du(t)=d\vartheta,\\
&dz(t)=F(t,y(t),u(t))\,dt+\Lambda(t)\,d\vartheta,\\
&G^\Lambda(y(T),u(T),z(T))=G(y(T),u(T))+z(T)\to\min_{u\in\mathcal{M}},
\end{aligned}$$

с теми же концевыми и фазовыми ограничениями, что и задача $(\mathcal{D}^\Lambda)$. Для задачи $(\mathcal{D}^{\Lambda'})$ справедлива теорема аналогичная теореме 2.

Теорема 3. *Пусть функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, функции $B(t,y,u)$ и $F(t,y,u)$ и их частные производные по (y,u) ограничены, измеримы по Лебегу по t для всех фиксированных (y,u) и непрерывно дифференцируемы по (y,u). Пусть, кроме того, задача $(\mathcal{S}')$ имеет оптимальное решение $(\widehat{x},\widehat{u})$. Предположим, что $\Lambda(t)$ имеет вид*

$$\Lambda(t)=-W(t)\Psi^1(t)+\Psi^2(t),$$

где

$$\Psi^1(t)=-\frac{\partial G}{\partial y}(\widehat{y}(T),\widehat{u}(T))\exp\Big\{\int_t^T\frac{\partial B}{\partial y}(s,\widehat{y}(s),\widehat{u}(s))\,ds\Big\}-$$

$$-\exp\Big\{-\int_0^t\frac{\partial B}{\partial y}(s,\widehat{y}(s),\widehat{u}(s))\,ds\Big\}\int_t^T\bigg(\frac{\partial F}{\partial y}(s,\widehat{y}(s),\widehat{u}(s))\exp\Big\{\int_s^T\frac{\partial B}{\partial y}(s,\widehat{y}(\tau),\widehat{u}(\tau))\,d\tau\Big\}\bigg)\,ds,$$

$$\Psi^2(t) = -\frac{\partial G}{\partial u}(\widehat{y}(T), \widehat{u}(T))\frac{t}{T}.$$

Здесь $\widehat{y}(t) = \Phi^{-1}(t, \widehat{x}(t)) - \widehat{u}(t)W(t)$, $\Phi^{-1}(t,x)$ *— функция, обратная к* $\Phi(t,v)$ *по* v. *Тогда если оптимальное управление в задаче* $(\mathcal{D}^{\Lambda'})$ *существует, то оно совпадает с управлением* $\widehat{u}$, *оптимальным в исходной стохастической задаче* $(\mathcal{S}')$.

Доказательство такое, же как в теореме 2, и отличается лишь немного более громоздкими формулами.

§ 5. Пример

Рассмотрим задачу оптимального выбора инвестиционного портфеля. Пусть некоторому инвестору для вложения денежных средств доступны два вида активов: безрисковый (вклад в банк) и рисковый (акции). Стоимость безрискового актива задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$dp_0(t) = rp_0(t)\,dt,$$

а стоимость рискового подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению

$$dp_1(t) = bp_1(t)\,dt + \sigma p_1(t)\,dW_t.$$

Таким образом, в каждый момент времени инвестор может вложить некоторую часть состояния $u(t) \in [0,1]$ в рисковый актив и часть $1 - u(t)$ — в безрисковый. Если предположить, что начальный капитал равнялся x_0, то состояние инвестора будет изменяться согласно следующему дифференциальному уравнению:

$$dx(t) = \big(bu(t) + r(1-u(t))\big)x(t)\,dt + \sigma u(t)x(t)\,dW(t), \quad x(t) = x_0. \tag{5.1}$$

Задача инвестора состоит в том, чтобы выбрать функцию $u(t)$ такой, чтобы к моменту $T > 0$ максимизировать ожидаемую выгоду от капитала:

$$\mathbf{E}J = \mathbf{E}g(x(T)) = \mathbf{E}(x(T))^{\gamma} \to \max, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{5.2}$$

Применим к задаче (5.1)–(5.2) представленный в предыдущих параграфах подход. Сначала перепишем уравнение в форме Стратоновича:

$$dx(t) = \big(bu(t) + r(1-u(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2(t)\big)x(t)\,dt + \sigma u(t)x(t)\circ dW(t), \quad x(t) = x_0. \tag{5.3}$$

Согласно теореме 1, решение (5.3) имеет вид $x(t) = \Phi(t, u(t)W(t) + y(t))$, в котором функция $\Phi(t,v)$ определяется как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v}(t,v) = \sigma\Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi(t,v) = e^{\sigma v}.$$

Следовательно, $x(t) = e^{\sigma(u(t)W(t) + y(t))}$.

Функция $y(t)$, согласно (2.4), подчиняется уравнению с мерой

$$dy(t) = \frac{1}{\sigma}\big(bu(t) + r(1-u(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2u^2(t)\big)\,dt - W(t)\,du(t), \quad y(0) = \frac{1}{\sigma}\ln x_0,$$

следовательно, потраекторно-детерминированная задача, аналогично (2.11)–(2.13), имеет вид

$$\begin{aligned}
&dy(t) = \frac{1}{\sigma}\big(bu(t) + r(1-u(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2u^2(t)\big)\,dt - W(t)\,d\vartheta, \quad y(0) = \frac{1}{\sigma}\ln x_0,\\
&du(t) = d\vartheta, \quad u(t) \in [0,1],\\
&J(u) = G(y(T), u(T)) = -e^{\gamma\sigma(u(T)W(T) + y(T))} \to \min,
\end{aligned}$$

а модифицированная задача принимает вид

$$\begin{aligned} &dy(t) = \frac{1}{\sigma}\big(bu(t) + r(1-u(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2(t)\big)\,dt - W(t)\,d\vartheta, \quad y(0) = \frac{1}{\sigma}\ln x_0, \\ &du(t) = d\vartheta, \quad u(t) \in [0,1], \\ &dz(t) = \Lambda(t)\,d\vartheta, \quad z(0) = 0, \\ &J^{\Lambda}(u) = G(y(T), u(T)) + z(T) = -e^{\gamma\sigma(u(T)W(T)+y(T))} + z(T) \to \min . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Известно [12], что для задачи (5.1)–(5.2) оптимальная стратегия состоит в том, чтобы разделять инвестируемые средства между активами в фиксированном соотношении

$$\widehat{u}(t) = \frac{b-r}{\sigma^2(1-\gamma)}, \quad t \in [0,T],$$

то есть оптимальное управление $\widehat{u}(t)$ является константой.

Для такого управления фазовая координата $\widehat{y}(t)$ модифицированной задачи скачков не имеет и может быть легко вычислена из уравнения (5.4):

$$\widehat{y}(t) = Ct + \frac{1}{\sigma}\ln x_0, \quad \text{где} \quad C = \frac{r}{\sigma} + \frac{(b-r)^2}{2\sigma^3(1-\gamma)^2}(1-2\gamma).$$

Теорема 2 определяет функцию Λ, при которой управление оказывается неупреждающим в следующем виде:

$$\Lambda(t) = -W(t)\Psi^1(t) + \Psi^2(t),$$

и для его построения остается вычислить функции $\Psi^1(t)$ и $\Psi^2(t)$:

$$\begin{aligned} &\Psi^1(t) = -\frac{\partial G}{\partial y}(\widehat{y}(T), \widehat{u}(T)) \exp\Big\{\int_t^T \frac{\partial B}{\partial y}(s, \widehat{y}(s), \widehat{u}(s))\,ds\Big\} = -\gamma\sigma E, \\ &\Psi^2(t) = -\frac{\partial G}{\partial u}(\widehat{y}(T), \widehat{u}(T))\frac{t}{T} = -\gamma\sigma W(T)\frac{t}{T}E, \end{aligned}$$

где

$$E = \exp\left\{\gamma\sigma\left(\frac{b-r}{\sigma^2(1-\gamma)}W(t) + Ct + \frac{1}{\sigma}\ln x_0\right)\right\}.$$

Следовательно,

$$\Lambda(t) = -W(t)\Psi^1(t) + \Psi^2(t) = \gamma\sigma\left(W(t) - W(T)\frac{t}{T}\right)E.$$

§ 6. Заключения и выводы

Подытожим основные результаты работы.

- Предложен метод, позволяющий для заданной стохастической задачи оптимального управления с управляемой диффузией построить параметризованное семейство детерминированных задач, решение которых на неупреждающих функциях совпадает с решением исходной стохастической задачи.

- Доказано, что детерминированную задачу можно модифицировать таким образом, что решение модифицированной задачи, в тех случаях, когда оно существует, является неупреждающим и совпадает с исходной стохастической задачей.

Отметим, что при переходе от задачи (S) к задаче (D) в доказательстве теоремы 1 большую роль играет линейность коэффициента диффузии по управлению, и поэтому дальнейший интерес вызывают задачи с нелинейной по управлению диффузией. Кроме того, хотя теорема 2 и доказывает существование требуемого интегрального слагаемого, она не предоставляет методов вычисления этого слагаемого, если оптимальное управление заранее не известно. Поэтому другим направлением дальнейших исследований должна стать разработка методов построения $\Lambda(t)$ при отсутствии заранее известного оптимального управления либо разработка иного подхода к проблеме неупреждаемости решений детерминированной системы $(\mathcal{D})$.

§ 7. Дополнение

Для удобства читателя в этом разделе приводятся постановка задачи оптимального импульсного управления и принцип максимума для импульсных процессов. Мы будем придерживаться обозначений и формулировок, принятых в работах [10, 11].

Задача оптимального импульсного управления ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi(p) \to \min, \\ dx = f(x,u,t)\,dt + g(x,u,t)\,d\vartheta, \quad t \in T, \\ p = (x_0, x_1) \in S, \\ R(x,u,t) \in C(t). \end{cases} \tag{7.1}$$

Здесь $T = [t_0, t_1]$ есть фиксированный интервал времени; $p = (x_0, x_1)$, где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, — вектор концевых значений; S есть замкнутое множество в $\mathbf{R}^{2n}$; $C(t)$ непрерывно отображает $[t_0, t_1]$ на замкнутые выпуклые подмножества $\mathbf{R}^r$; $\varphi(p)$ — минимизируемый функционал стоимости и $\vartheta = (\mu, \nu, \{u_\tau, v_\tau\})$ — импульсное управление (подробнее см. [11]).

Функции $\varphi : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^1$, $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^n$, $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ и $R : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^r$ соответствуют следующим условиям. Функция f и ее частные производные по (x,u) измеримы по Лебегу для каждого (x,u) по переменной t и непрерывно дифференцируемы по (x,u) равномерно по t для почти всех t. Функции g и R непрерывны по всем аргументам и непрерывно дифференцируемы по (x,u). Каждая из функции f, g и R вместе со своими частными производными по (x,u) локально ограничены.

Рассмотрим импульсное управление $\vartheta = (\mu, \nu, \{u_\tau, v_\tau\})$, некоторое число $\tau \in T$ и произвольный вектор $x \in \mathbf{R}^n$. Обозначим через $\chi_\tau(\cdot) = \chi_\tau(\cdot, x)$ решение следующей динамической системы:

$$\begin{cases} \dot\chi_\tau(s) = g(\chi_\tau(s), u_\tau(s), \tau) v_\tau(s), \quad s \in [0,1], \\ \chi_\tau(0) = x. \end{cases}$$

Функция ограниченной вариации $x(t)$ на интервале T называется решением дифференциального уравнения (7.1), соответствующим управлению (u, ϑ) и начальному условию x_0, если $x(t_0) = x_0$ и для каждого $t \in (t_0, t_t]$ выполняется следующее равенство:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(x,u,\tau)\,d\tau + \int_{[t_0,t_1]} g(x,u,\tau)\,d\mu_{c.c.} + \sum_{\tau \leqslant t} [\chi_\tau(1, x(\tau-)) - x(\tau-)]. \tag{7.2}$$

Здесь $\mu_{c.c.}$ есть непрерывная компонента меры μ. Заметим, что сумма в (7.2) корректно определена, так как существует не более чем счетное число точек τ, в которых v_τ не равен нулю.

Обозначим через H функцию Понтрягина

$$H(x,u,\psi,t) := \langle f(x,u,t), \psi \rangle$$

и через Q — векторную функцию $Q(x,u,\psi,t) := g^T(x,u,t)\psi$.

В формулировке теоремы используется следующее обозначение, «крышка» над функцией от переменных (x,u,t) означает, что вместо пропущенных переменных подставляются оптимальные значения $(\widehat{x}, \widehat{u})$, например: $\widehat{f}(t) = f(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), t)$ или $\widehat{f}(u,t) = f(\widehat{x}(t), u, t)$. Аналогичное обозначение для крышки и нижнего индекса τ, означающее, что вместо пропущенных переменных подставляются оптимальные значения в моменты скачков, например: $\widehat{f}_\tau(s) = f(\widehat{\chi}_\tau(s), \widehat{u}_\tau(s), \tau)$. Кроме того, через $N_K(x)$ обозначим нормальный конус Мордуховича в $x \in K$ (см. [10, 13]).

Теорема 4. *Пусть процесс* $(\widehat{x}, \widehat{u}, \widehat{\vartheta})$ *оптимален в задаче* (7.1) *и пара* $(\widehat{x}, \widehat{u})$ *является регулярной* (см. [10]). *Тогда существуют число* $\lambda \geqslant 0$, *векторная функция ограниченной вариации* ψ, *измеримая векторная функция* $\eta \in \mathbf{L}_1^r(T)$, $\eta(t) \in N_{C(t)}(\widehat{R}(t))$ *для п.в.* t, *и для каждой точки* $\tau \in Ds(\widehat{\vartheta})$ *существуют абсолютно непрерывная векторная функция* σ_τ *и существенно* *ограниченная векторная функция* $\eta_\tau \in \mathbf{L}^r_\infty([0,1])$, $\eta_\tau(s) \in N_{C(t)}(\widehat{R}_\tau(s))$ *для п.в.* s, *определенные на интервале* $[0,1]$, *такие, что*

$$\lambda + |\psi| \neq 0 \quad \forall t \in T, \quad \lambda + |\sigma_\tau(s)| \neq 0 \quad \forall s \in [0,1] \quad \forall \tau \in Ds(\widehat{\vartheta}),$$

$$\psi(t) = \psi(t_0) - \int_0^t \frac{\partial \widehat{H}}{\partial x}(\psi(\tau,\tau))\,d\tau - \int_{[t_0,t_1]} \frac{\partial}{\partial x}\langle \widehat{Q}(\psi(\tau,\tau),\tau),\, d\widehat{\mu}_{c.c.}\rangle + \\ + \int_{t_0}^t \frac{\partial \widehat{R}^T}{\partial x}(\tau)\eta(\tau)\,d\tau + \sum_{\tau \in Ds(\widehat{\vartheta}):\tau \leqslant t} [\sigma_\tau(1) - \psi(\tau-)] \quad \forall t \in (t_0, t_1],$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{\chi}_\tau}{ds}(s) = \widehat{g}_\tau(s)\widehat{v}_\tau(s), \\ \dfrac{d\sigma_\tau}{ds}(s) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\langle \widehat{Q}_\tau(\sigma_\tau(s),s), \widehat{v}(s)\rangle + \dfrac{\partial \widehat{R}^T_\tau}{\partial x}(s)\eta_\tau(s), \\ \widehat{\chi}(0) = \widehat{x}(\tau-), \quad \sigma_\tau(0) = \psi(\tau-), \\ s \in [0,1] \quad \forall \tau \in Ds(\widehat{\vartheta}), \end{cases}$$

$$(\psi(t_0), -\psi(t_1)) \in \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\widehat{p}) + N_S(\widehat{p}),$$

$$\max_{u \in \widehat{\Omega}(t)} \widehat{H}(u, \psi(t), t) = \widehat{H}(\psi(t), t) \quad \textit{для п.в. } t \in T,$$

$$\begin{cases} \max\limits_{v \in K} \max\limits_{u \in \widehat{\Omega}(t)} \langle \widehat{Q}(u, \psi(t), t), v\rangle = 0 \quad \forall t \in T, \\ \max\limits_{v \in K} \max\limits_{u \in \widehat{\Omega}_\tau(s)} \langle \widehat{Q}_\tau(u, \sigma_\tau(s), s), v\rangle = 0 \quad \textit{для п.в. } s \in [0,1], \ \forall \tau \in Ds(\widehat{\vartheta}), \\ \displaystyle\int_{[t_0,t]} \langle \widehat{Q}(\psi(\tau),\tau), d\widehat{\mu}_{c.c.}\rangle = 0 \quad \forall t \in T, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(\psi(t),t) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left\langle \widehat{Q}(\psi(t),t), \dfrac{d\widehat{\mu}_{a.c.}}{dt}\right\rangle = \dfrac{\partial \widehat{R}^T}{\partial u}(t)\eta(t) \quad \textit{для п.в. } t \in T, \\ \displaystyle\int_{[t_0,t]} \frac{\partial}{\partial u}\langle \widehat{Q}(\psi(\tau),\tau), d\widehat{\mu}_{s.c.}\rangle = 0 \quad \forall t \in T, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\langle \widehat{Q}(\sigma_\tau(s),s), \widehat{v}_\tau(s)\rangle = \dfrac{\partial R^T_\tau}{\partial u}(s)\eta_\tau(s) \quad \textit{для п.в. } s \in [0,1], \forall \tau \in Ds(\widehat{\vartheta}), \end{cases}$$

где $\widehat{\mu}_{a.c.}$, $\widehat{\mu}_{s.c.}$ *абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты меры* $\widehat{\mu}$ *соответственно.*

Доказательство приведено в работе [11].

Автор выражает благодарность Ф. С. Насырову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wets R.J.B. On the relation between stochastic and deterministic optimization // Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1975. Vol. 107. P. 350–361.
2. Rockafellar R.T., Wets R.J.B. Nonanticipativity and L^1-martingales in stochastic optimization problems // Mathematical Programming Study. 1973. Vol. 6. P. 170–187.
3. Davis M.H.A. Anticipative LQG control // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 1989. Vol. 6. № 3. P. 259–265.
4. Davis M.H.A., Burstein G. A deterministic approach to stochastic optimal control, with application to anticipative control // Stochastics and Stochastics Reports. 1992. Vol. 40. № 3–4. P. 203–256.

5. Исмагилов Н.С., Насыров Ф.С. О детерминированном подходе к задаче стохастического оптимального управления // Вестник УГАТУ. 2013. Т. 17. № 5. С. 38–43.

6. Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. М.: Физматлит, 2011. 212 с.

7. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 429 с.

8. Protter P. Stochastic integration and differential equations. Berlin: Springer, 2004. 415 p.

9. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.

10. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L. On constrained impulsive control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 156. № 6. P. 654–688.

11. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F. Pontryagin's maximum principle for constrained impulsive control problems // Nonlinear Analysis. 2012. Vol. 75. № 3. P. 1045–1057.

12. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М: Мир, 2003. 408 с.

13. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. Berlin: Springer, 2006. 579 p.

Поступила в редакцию 29.10.2013

Исмагилов Нияз Салаватович, аспирант, кафедра математики, Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000, Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.
E-mail: niyaz.ismagilov@gmail.com

N. S. Ismagilov

On deterministic approach to solution of stochastic optimal control problem with controlled diffusion

Keywords: stochastic optimal control, stochastic differential equations, deterministic approach, pathwise optimization, optimal impulsive control.

MSC: 93E20, 49K45, 60H30, 49N25

We consider an optimal control problem for a one-dimensional process driven by stochastic differential equation, which has both drift and diffusion coefficients controlled, diffusion being linear in control

$$dx(t) = b(t, x(t), u(t))\,dt + \sigma(t, x(t))u(t)\,dW(t), \quad x(0) = x_0,$$

where $x(t)$ is the state variable, $u(t)$ is the control variable and $W(t)$ is the Wiener process. We prove a theorem which gives a structure of solution for the considered differential equation as a superposition of functions $x(t) = \Phi(t, u(t)W(t) + y(t))$, where $\Phi(t, v)$ is the known function, which is completely determined by the diffusion coefficient $\sigma(t, x)$ and is independent of control, and $y(t)$ is the solution to the pathwise-deterministic measure-driven differential equation

$$dy(t) = B(t, y(t), u(t))\,dt - W(t)\,du(t).$$

The revealed structure of the solution enables us to consider a new pathwise-deterministic impulsive optimal control problem with the state variable $y(t)$ which is equivalent to the original stochastic optimal control problem. Pathwise problems may have anticipative solutions, so we propose a method that makes it possible to build nonanticipative optimal solutions. The basic idea of the method is to modify cost functional in new pathwise problem with special integral term, which guarantees nonanticipativity of solutions.

REFERENCES

1. Wets R.J.B. On the relation between stochastic and deterministic optimization, *Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Berlin: Springer-Verlag, 1975, vol. 107, pp. 350–361.

2. Rockafellar R.T., Wets R.J.B. Nonanticipativity and L^1-martingales in stochastic optimization problems, *Mathematical Programming Study*, 1973, vol. 6, pp. 170–187.

3. Davis M.H.A. Anticipative LQG control, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1989, vol. 6, no. 3, pp. 259–265.

4. Davis M.H.A., Burstein G. A deterministic approach to stochastic optimal control, with application to anticipative control, *Stochastics and Stochastics Reports*, 1992, vol. 40, no. 3–4, pp. 203–256.

5. Ismagilov N.S., Nasyrov F.S. On deterministic approach to stochastic optimal control problem, *Vestnik UGATU*, 2013, vol. 17, no. 5, pp. 38–43 (in Russian).

6. Nasyrov F.S. *Lokal'nye vremena, simmetrichnye integraly i stokhasticheskii analiz* (Local times, symmetric integrals and stochastic analysis), Moscow: Fizmatlit, 2011, 212 p.

7. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* (Optimization of dynamic systems with pulse control), Moscow: Nauka, 2005, 429 p.

8. Protter P. *Stochastic integration and differential equations*, Berlin: Springer, 2004, 415 p.

9. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* (Optimal impulse control with applications), Moscow: Fizmatlit, 2000, 256 p.

10. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F.L. On constrained impulsive control problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 165, no. 6, pp. 654–688.

11. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira F. Pontryagin's maximum principle for constrained impulsive control problems, *Nonlinear Analysis*, 2012, vol. 75, no. 3, pp. 1045–1057.

12. Øksendal B. *Stochastic differential equations*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2003, 360 p.

13. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and generalized differentiation*, Berlin: Springer, 2006, 579 p.

Received 29.10.2013

Ismagilov Niyaz Salavatovich, Post-graduate student, Department of Mathematics, Ufa State Aviation Technical University, ul. K. Marksa, 12, Ufa, 450000, Russia.
E-mail: niyaz.ismagilov@gmail.com