УДК 517.958+517.984.5

© *Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ДВУМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА. II [1]

Работа посвящена вопросу об абсолютной непрерывности спектра двумерного обобщенного периодического оператора Шрёдингера $H_g + V = -\nabla g \nabla + V$, где непрерывная положительная функция g и скалярный потенциал V имеют общую решетку периодов Λ. Решения уравнения $(H_g + V)\varphi = 0$ определяют, в частности, электрическое и магнитное поля для электромагнитных волн, распространяющихся в двумерных фотонных кристаллах. При этом функция g и скалярный потенциал V выражаются через диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ (V также зависит от частоты электромагнитной волны). Диэлектрическая проницаемость ε может быть разрывной функцией (и обычно выбирается кусочно-постоянной), поэтому возникает задача об ослаблении известных условий гладкости для функции g, обеспечивающих абсолютную непрерывность спектра оператора $H_g + V$. В настоящей работе предполагается, что коэффициенты Фурье функций $g^{\pm\frac{1}{2}}$ при некотором $q \in [1, \frac{4}{3})$ удовлетворяют условию $\sum \big(|N|^{\frac{1}{2}} |(g^{\pm\frac{1}{2}})_N|\big)^q < +\infty$ и скалярный потенциал V имеет нулевую грань относительно оператора $-\Delta$ в смысле квадратичных форм. Пусть K — элементарная ячейка решетки Λ, K^* — элементарная ячейка обратной решетки Λ^*. Оператор $H_g + V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов $H_g(k) + V$, где k — квазиимпульс из $2\pi K^*$, действующих в $L^2(K)$. Последние операторы можно также рассматривать при комплексных векторах $k + ik' \in \mathbb{C}^2$. В статье используется метод Томаса. Доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора $H_g + V$ сводится к доказательству обратимости операторов $H_g(k + ik') + V - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, при определенным образом выбираемых комплексных векторах $k + ik' \in \mathbb{C}^2$ (зависящих от g, V и числа λ) с достаточно большой мнимой частью k'.

Ключевые слова: обобщенный оператор Шрёдингера, абсолютная непрерывность спектра, периодический потенциал.

Введение

Рассматривается двумерный обобщенный периодический оператор Шрёдингера

$$\widehat{H}_g + V = \sum_{j=1}^{2} \big(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\big) g \big(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\big) + V, \tag{0.1}$$

действующий в $L^2(\mathbb{R}^2)$ ($i^2 = -1$). Скалярный потенциал $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и положительная функция $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ предполагаются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ и

$$c_1(g) \leqslant g(x) \leqslant c_2(g), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{0.2}$$

где $c_1(g)$ и $c_2(g)$ — некоторые положительные константы. Декартовы координаты векторов $x \in \mathbb{R}^2$ определяются относительно некоторого ортогонального базиса $\{E_j\}_{j=1,2}$.

Пусть $\mathfrak{a}_j$, $j = 1, 2$, — базисные векторы решетки Λ, $K = \{x = \xi_1 \mathfrak{a}_1 + \xi_2 \mathfrak{a}_2 : 0 \leqslant \xi_1, \, \xi_2 < 1\}$ — элементарная ячейка решетки Λ. Обратная решетка $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^2$ имеет базисные векторы $\mathfrak{a}_j^*$, $j = 1, 2$, для которых $(\mathfrak{a}_j^*, \mathfrak{a}_l) = \delta_{jl}$ (где δ_{jl} — символ Кронекера; $|\cdot|$ и $(.,.)$ — длина и скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^2$), K^* — элементарная ячейка решетки Λ^*.

[1] Работа поддержана РФФИ (грант № 12–01–00195).

Функции, определенные на элементарной ячейке K, в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^2$. Коэффициенты Фурье функций $\varphi \in L^1(K)$ обозначаются через

$$\varphi_N = v^{-1}(K) \int_K \varphi(x)\, e^{-2\pi i\,(N,x)}\, dx\,, \quad N \in \Lambda^*,$$

где $v(.)$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^2$.

Скалярные произведения и нормы в пространствах $L^2(\mathbb{R}^2)$ и $L^2(K)$ вводятся обычным образом, при этом предполагается линейность скалярного произведения по второму аргументу (в обозначениях пространство $L^2(K)$ не всегда будет явно указываться). Пусть $H^s(\mathbb{R}^2)$ — класс Соболева порядка $s \geqslant 0$, $H^0(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}^2)$; $\widetilde{H}^s(K)$ — множество функций $\varphi : K \to \mathbb{C}$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $l^{\{q\}}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $q \in [1,2]$, — множество функций $\mathcal{G} \in L^2(K)$, для которых

$$\|\mathcal{G}\|_q \;\doteq\; \Bigl(\sum_{n\,\in\,\Lambda^*} |\mathcal{G}_n|^q\Bigr)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Справедливо вложение $l^{\{q\}}_\Lambda(\mathbb{R}^2) \subseteq L^p(K)$, где $p = \frac{q}{q-1}$ ($p = \infty$ при $q = 1$), которое является строгим, если $q \in [1,2)$. Если $\mathcal{G} \in l^{\{q\}}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, то

$$\|\mathcal{G}\|_{L^p(K)} \;\leqslant\; (v(K))^{\frac{1}{p}}\, \|\mathcal{G}\|_q$$

(неравенство Хаусдорфа–Юнга [1]).

Через $\mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $q \in [1,2]$, обозначим пространство периодических (с решеткой периодов Λ) функций $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_q \;=\; \Bigl(\sum_{n\,\in\,\Lambda^*} \bigl((2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}|\mathcal{G}_n|\bigr)^q\Bigr)^{\frac{1}{q}} \;<\; +\infty$$

(оператор $(-\Delta)^s$, $s \in \mathbb{R}$, ставит в соответствие функциям $\mathcal{G}$ с коэффициентами Фурье $\mathcal{G}_n$ функции с коэффициентами Фурье $(2\pi|n|)^{2s}\mathcal{G}_n$, $n \in \Lambda^*$). Если $1 \leqslant q_1 < q_2 < 2$, то

$$\mathcal{L}^{(q_1)}_\Lambda(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{L}^{(q_2)}_\Lambda(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{L}^{(2)}_\Lambda(\mathbb{R}^2) = \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K).$$

Пусть $\mathbb{L}^a_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, где $a \geqslant 0$, — множество периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ функций $\mathcal{F} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ таких, что для любой функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ функция $\mathcal{F}\varphi$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^2)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C(\varepsilon,\mathcal{F}) \geqslant 0$ такая, что для всех функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \;\leqslant\; (a+\varepsilon)\Bigl(\sum_{j\,=\,1}^{2} \Bigl\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Bigr\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Bigr)^{\frac{1}{2}} \;+\; C(\varepsilon,\mathcal{F})\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{0.3}$$

В настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Спектр двумерного обобщенного периодического оператора Шрёдингера* (0.1) *абсолютно непрерывен, если для положительной функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ выполняется условие* (0.2)*, при этом $\sqrt{g} \in \mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ и $\frac{1}{\sqrt{g}} \in \mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ для некоторого $q \in [1,\frac{4}{3})$ и $\sqrt{|V|} \in \mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$.*

В [2–12] рассматривался оператор

$$\sum_{j,\,l\,=\,1}^{2} \bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\bigr) G_{jl} \bigl(-i\,\frac{\partial}{\partial x_l} - A_l\bigr) + V, \tag{0.4}$$

для которого скалярный и векторный потенциалы $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ и $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, а также матричная функция (метрика) $\widehat{G}=\{G_{jl}\}_{j,l=1,2}$ являются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$, $\widehat{G}(.)$ — вещественная, симметрическая и положительно определенная матричная функция, для которой $C_1\widehat{I}\leqslant\widehat{G}(x)\leqslant C_2\widehat{I}$ при почти всех (п. в.) $x\in\mathbb{R}^2$, $0<C_1\leqslant C_2$ ($\widehat{I}$ — единичная 2×2-матрица). В частности, в [9] (см. также [12]) доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.4), если

$$\det\widehat{G}\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2),\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\det\widehat{G}\in\mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2),\quad j=1,2\,, \tag{0.5}$$

$A_j\in\mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $j=1,2$, и $\sqrt{|V|}\in\mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$. При доказательстве в [9] применяется периодическая изотермическая замена координат, приводящая матричную функцию $\widehat{G}$ к скалярному виду $g\widehat{I}$. В [10–12] при доказательстве абсолютной непрерывности спектра оператора (0.4) используются результаты о двумерном обобщенном периодическом операторе Дирака (см. [13]). В применении к оператору (0.1) условие (0.5) означает, что $\frac{\partial g}{\partial x_j}\in\mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $j=1,2$. В [14] исследовался оператор (0.1) (при $\sqrt{|V|}\in\mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$), если $g^{\pm\frac12}\in\mathcal{L}^{(1)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$. В настоящей работе (как и в [14]) предполагается, что матричная функция $\widehat{G}(\cdot)$ (с помощью периодической изотермической замены координат) приведена к виду $g\widehat{I}$ и рассматривается случай $A\equiv0$.

Вопрос об абсолютной непрерывности спектра d-мерных (при $d\geqslant3$) (обобщенных) периодических операторов Шрёдингера изучался во многих работах (см., например, [4, 5, 15–20] и более поздние статьи [21–26], а также ссылки из этих статей).

В § 1 теорема 1 выводится из теоремы 3, а также доказываются некоторые вспомогательные утверждения. В § 2 теорема 3 доказывается с помощью теорем 4, 5 и 6. Доказательство теоремы 5 приведено в § 3, а доказательство теоремы 6 — в § 4.

Далее в разных оценках положительные константы будут обозначаться через C и c (с индексами или без них). Как правило, будет явно указываться, от чего они могут зависеть. При этом обозначаемые одинаково константы C (с разными индексами) не обязательно совпадают в разных оценках, а константы c (также с разными индексами) после их определения будут фиксироваться.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Так как $\sqrt{|V|}\in\mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, то полуторалинейная форма

$$W_{g,V}(\psi,\varphi)=\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2}g\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}V\overline{\psi}\varphi\,dx,$$

задаваемая в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и имеющая область определения $Q(W_{g,V})=H^1(\mathbb{R}^2)$, замкнута и полуограничена, поэтому она порождает самосопряженный оператор $\widehat{H}_g+V$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ с некоторой областью определения $D(\widehat{H}_g+V)\subset H^1(\mathbb{R}^2)$ (см., например, [1]).

При $k\in\mathbb{R}^2$, $e\in S^1=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|=1\}$ и $\varkappa\in\mathbb{R}$ рассмотрим в $L^2(K)$ полуторалинейные формы

$$W_g(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)=\sum_{j=1}^{2}\big((k_j-i\varkappa e_j-i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\psi,g(k_j+i\varkappa e_j-i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\varphi\big),$$

$$W_{g,V}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)=W_g(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)+\int_K V\overline{\psi}\varphi\,dx$$

с областью определения $Q(W_g(k+i\varkappa e;.,.))=Q(W_{g,V}(k+i\varkappa e;.,.))=\widetilde{H}^1(K)$, где $k_j=(E_j,k)$, $e_j=(E_j,e)$, $j=1,2$. Форма $W_{g,V}(k+i\varkappa e;.,.)$ замкнута и секториальна, поэтому она порождает m -секториальный оператор $\widehat{H}_g(k+i\varkappa e)+V$ с областью определения $D(\widehat{H}_g(k+i\varkappa e)+V)\subset$ $\subset\widetilde{H}^1(K)\subset L^2(K)$, которая не зависит от $k+i\varkappa e\in\mathbb{C}^2$. Операторы $\widehat{H}_g(k)+V$ (при $\varkappa=0$)

являются полуограниченными самосопряженными операторами с компактной резольвентой и, следовательно, с дискретным спектром. Для любых $k \in \mathbb{R}^2$ и $e \in S^1$ операторы $\widehat{H}_g(k+\zeta e)+V$, $\zeta \in \mathbb{C}$, образуют самосопряженное аналитическое семейство типа (B) (см. [27]).

Оператор $\widehat{H}_g + V$ унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*} \oplus \, (\widehat{H}_g(k)+V) \, \frac{dk}{(2\pi)^2 \, v(K^*)} \,, \tag{1.1}$$

при этом сингулярный спектр оператора $\widehat{H}_g + V$ пуст и для доказательства отсутствия в спектре оператора $\widehat{H}_g + V$ собственных значений $\lambda \in \mathbb{R}$ (бесконечной кратности) достаточно показать, что числа $\lambda \in \mathbb{R}$ при некоторых комплексных векторах $k + i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$ не являются собственными значениями операторов $\widehat{H}_g(k+i\varkappa e)+V$ (см. [28, 29]). Заменяя скалярный потенциал V на $V-\lambda$ (для которого также $\sqrt{|V-\lambda|} \in \mathbb{L}^0_\Lambda(\mathbb{R}^2)$), можно рассматривать только случай $\lambda = 0$. Поэтому достаточно показать, что при некотором комплексном векторе $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^2$ для любой ненулевой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ найдется функция $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$ такая, что $W_{g,V}(k+i\varkappa e; \psi, \varphi) \neq 0$. Следовательно, теорема 1 вытекает из приводимой ниже теоремы 2. (Используемый здесь метод доказательства абсолютной непрерывности спектра был впервые предложен в статье [15].)

Для каждого вектора $e \in S^1$ определим вектор $\widetilde{e} \in S^1$, образующий вместе с вектором e ортогональный базис в $\mathbb{R}^2$: $\widetilde{e}_1 = (E_1, \widetilde{e}) = -e_2$, $\widetilde{e}_2 = (E_2, \widetilde{e}) = e_1$. Для всех $N \in \Lambda^*$, $k \in \mathbb{R}^2$, $e \in S^1$ и $\varkappa \in \mathbb{R}$ обозначим

$$G^{\pm}_N = G^{\pm}_N(k+i\varkappa e) \doteq |k + 2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}| = \big((k_1 + 2\pi N_1 \mp \varkappa e_2)^2 + (k_2 + 2\pi N_2 \pm \varkappa e_1)^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Выберем (и зафиксируем) вектор $\mathfrak{a} \in \Lambda$, для которого $|\mathfrak{a}| = \min\{|\mathfrak{b}| : \mathfrak{b} \in \Lambda \backslash \{0\}\}$. Так как

$$\left(k + 2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}, \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}\right) \in \frac{(k \pm \varkappa \widetilde{e}, \mathfrak{a})}{|\mathfrak{a}|} + \frac{2\pi}{|\mathfrak{a}|}\,\mathbb{Z}\,,$$

то для любого вектора $\varkappa e \in \mathbb{R}^2$ найдется число $\mu = \mu(\mathfrak{a}, \varkappa e) \in \{0,1\}$ такое, что для всех векторов $k \in \mathbb{R}^2$, для которых $(k, \mathfrak{a}) = \mu\pi$, и всех $N \in \Lambda^*$

$$\left|\left(k + 2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}, \frac{\mathfrak{a}}{|\mathfrak{a}|}\right)\right| \geqslant \frac{\pi}{2|\mathfrak{a}|}$$

и, следовательно,

$$G^{\pm}_N \geqslant \frac{\pi}{2|\mathfrak{a}|}$$

(длина вектора $\mathfrak{a}$ зависит только от решетки Λ). Пусть

$$\mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e) = \{k \in \mathbb{R}^2 : (k, \mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a}, \varkappa e)\,\pi\}.$$

Далее (если не оговорено противное) будут выбираться векторы $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$. Справедливы оценки

$$\max_{\pm} G^{\pm}_N \geqslant |\varkappa|\,, \quad G^+_N G^-_N = |(k + 2\pi N + i\varkappa e)^2| \geqslant \frac{\pi}{|\mathfrak{a}|}\,|\varkappa|\,.$$

Через $\widehat{P}^{\,\pm} = \widehat{P}^{\,\pm}(k+i\varkappa e)$ обозначаются ортогональные проекторы в $L^2(K)$, ставящие в соответствие функциям $\varphi \in L^2(K)$ функции

$$\widehat{P}^{\,+}\varphi = \sum_{N \in \Lambda^* :\, (k+2\pi N, \widetilde{e}) < 0} \varphi_N \, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \widehat{P}^{\,-}\varphi = \sum_{N \in \Lambda^* :\, (k+2\pi N, \widetilde{e}) \geqslant 0} \varphi_N \, e^{2\pi i\,(N,x)}.$$

Для $s > 0$ определим операторы $\widehat{G}^{\,s}_{\pm} = \widehat{G}^{\,s}_{\pm}(k+i\varkappa e)$:

$$\widehat{G}^{\,s}_{\pm}\varphi = \sum_{N \in \Lambda^*} \big(G^{\pm}_N(k+i\varkappa e)\big)^s \varphi_N \, e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi \in D(\widehat{G}^{\,s}_{\pm}) = \widetilde{H}^s(K).$$

Будем обозначать $\widehat{G}_{\pm} = \widehat{G}^{1}_{\pm}$. Справедливы равенства $\widehat{G}_{\pm}(k + i\varkappa e) = \widehat{G}_{\mp}(k - i\varkappa e)$. Если $s' \geqslant s > 0$, то операторы $\widehat{G}^{s}_{\pm}$ непрерывно отображают класс Соболева $\widetilde{H}^{s'}(K)$ на класс Соболева $\widetilde{H}^{s'-s}(K)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность подмножеств $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$ таких, что

$$\sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{J}} \frac{1}{j \ln (j+1)} < +\infty.$$

Множества $\mathbb{J} \in \mathcal{A}$ состоят из бесконечного количества натуральных чисел. Следующая простая лемма постоянно используется в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $a_j \geqslant 0$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\Bigl\{ j \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : a_j \leqslant \frac{\varepsilon}{j \ln j} \Bigr\} \in \mathcal{A}.$$

Если $\mathbb{J}_{\mu} \in \mathcal{A}$, $\mu = 1, \ldots, m$, то также

$$\bigcap_{\mu=1}^{m} \mathbb{J}_{\mu} \in \mathcal{A}.$$

Теорема 2. *Пусть периодические (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$) функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда найдутся множество $\mathbb{J} \in \mathcal{A}$ и константа $C = C(\Lambda, g) > 0$ такие, что для каждого числа $\varkappa \in \mathbb{J}$ существует вектор $e \in S^1$ такой, что для всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$\sup_{\psi \in \widetilde{H}^1(K) \, : \, \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k+i\varkappa e)\psi\|_{L^2(K)} \leqslant 1} |W_{g,V}(k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| \geqslant$$

$$\geqslant C \, \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\varphi\|_{L^2(K)}.$$

Теорема 2 является следствием теоремы 3 и леммы 2.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{L}^0_{\Lambda}(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\varkappa_0 = \varkappa_0(\Lambda, \mathcal{V}; \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$\|\mathcal{V}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant \varepsilon \, \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\varphi\|_{L^2(K)}.$$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1.2 в [14].

Теорема 3. *Предположим, что периодическая (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$) функция $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда найдутся множество $\mathbb{J} \in \mathcal{A}$ и константа $C = C(\Lambda, g) > 0$ такие, что для любого числа $\varkappa \in \mathbb{J}$ существует вектор $e \in S^1$ такой, что для всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$\sup_{\psi \in \widetilde{H}^1(K) \, : \, \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k+i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k+i\varkappa e)\psi\|_{L^2(K)} \leqslant 1} |W_{g}(k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| \geqslant \tag{1.2}$$

$$\geqslant C \, \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}}(k + i\varkappa e)\varphi\|_{L^2(K)}.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в следующем параграфе.

Пусть $\widehat{p}_j = k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$, $\widehat{p}_\pm \doteq \widehat{p}_1 \pm i\widehat{p}_2$. Если $k_\pm = k_1 \pm ik_2$ и $\widehat{d}_\pm = \frac{\partial}{\partial x_1} \pm i\,\frac{\partial}{\partial x_2}$ ($\widehat{d}_+ = 2\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $\widehat{d}_- = 2\,\frac{\partial}{\partial z}$, где $z = x_1 + ix_2$), то $\widehat{p}_\pm = k_\pm - i\widehat{d}_\pm$. Определим также операторы

$$\widehat{\mathcal{P}}_\pm = \widehat{\mathcal{P}}_\pm(k,e) = (e_1 \mp ie_2)\,\widehat{p}_\pm\,, \quad \widehat{\mathcal{D}}_\pm = \widehat{\mathcal{D}}_\pm(k,e) = (e_1 \mp ie_2)\,\widehat{d}_\pm\,.$$

Имеют место равенства

$$|\widehat{\mathcal{P}}_+ + i\varkappa| = |\widehat{\mathcal{P}}_- - i\varkappa| = \widehat{G}_+\,, \quad |\widehat{\mathcal{P}}_+ - i\varkappa| = |\widehat{\mathcal{P}}_- + i\varkappa| = \widehat{G}_-\,,$$

где слева стоят положительные операторы из полярных разложений операторов $\widehat{\mathcal{P}}_\pm + i\varkappa$ и $\widehat{\mathcal{P}}_\pm - i\varkappa$. При этом для всех $s \geqslant 0$

$$|\widehat{\mathcal{P}}_\pm|^s\varphi = |\widehat{p}_\pm|^s\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} |k + 2\pi N|^s\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi \in \widetilde{H}^s(K).$$

Частным случаем оператора $|\widehat{p}_\pm|$ при $k = 0$ является оператор $|\widehat{d}_\pm| = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$.

Из (0.3) и разложения (1.1) следует, что периодическая (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$) функция $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ принадлежит $\mathbb{L}^q_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, где $a \geqslant 0$, тогда и только тогда, когда для любой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ функция $\mathcal{F}\varphi$ принадлежит пространству $L^2(K)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C(\varepsilon,\mathcal{F}) \geqslant 0$ (та же, что и в оценке (0.3)) такая, что для всех $k \in \mathbb{R}^2$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2(K)} \leqslant (a + \varepsilon)\,\|\,|\widehat{p}_+|\,\varphi\,\|_{L^2(K)} + C(\varepsilon,\mathcal{F})\,\|\varphi\|_{L^2(K)}\,. \tag{1.3}$$

Числа $q \in [1, \frac{4}{3})$ будем представлять в виде $q = \frac{4}{3+\delta}$, где $\delta = \delta(q) \in (0, 1]$.

Если $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $q \in (1, \frac{4}{3})$, то для всех $\varkappa \geqslant \min\{2\pi|n| : n \in \Lambda^* \setminus \{0\}\}$ и $\varepsilon \in [0, \frac{\delta}{2})$

$$\sum_{n\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\,\geqslant\,\varkappa} (2\pi|n|)^\varepsilon|\mathcal{G}_n| \;\leqslant \tag{1.4}$$

$$\leqslant\; \Bigg(\sum_{n\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\,\geqslant\,\varkappa} (2\pi|n|)^{-2\,\frac{1-2\varepsilon}{1-\delta}}\Bigg)^{\frac{1-\delta}{4}} \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_q \;\leqslant\; C(\Lambda;\varepsilon,\delta)\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_q\,\varkappa^{-\left(\frac{\delta}{2}-\varepsilon\right)}\,.$$

Если $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^{(1)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, то для всех $\varkappa \geqslant \min\{2\pi|n| : n \in \Lambda^* \setminus \{0\}\}$ и $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2})$

$$\sum_{n\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\,\geqslant\,\varkappa} (2\pi|n|)^\varepsilon|\mathcal{G}_n| \;\leqslant \tag{1.5}$$

$$\leqslant\; \Bigg(\max_{n\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\,\geqslant\,\varkappa} (2\pi|n|)^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\Bigg) \sum_{n\,\in\,\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\,\geqslant\,\varkappa} (2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}|\mathcal{G}_n| \;\leqslant \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_1\,\varkappa^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}$$

(можно положить $1 = C(\Lambda;\varepsilon,1)$). Из (1.4) и (1.5) для функций $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $q \in [1, \frac{4}{3})$, в частности, получаем

$$\sum_{n\,\in\,\Lambda^*\setminus\{0\}} |\mathcal{G}_n| \;\leqslant\; C_1\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_q\,, \tag{1.6}$$

где

$$C_1 \;=\; C_1(\Lambda,q) \;=\; \Big(2\pi \min_{n\,\in\,\Lambda^*\setminus\{0\}} |n|\Big)^{-\frac{\delta(q)}{2}} C(\Lambda;0,\delta(q)) \;>\; 0.$$

Лемма 3. *Если $\mathcal{G} \in \mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$ для некоторого $q \in [1, \frac{4}{3})$, то также $\mathcal{G}^2 \in \mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.6) следует оценка

$$\sum_{n\in\Lambda^*} |\mathcal{G}_n| < +\infty\,.$$

Для всех $N\in\Lambda^*$

$$\big(\mathcal{G}(-\Delta)^{\frac14}\,\mathcal{G}\big)_N = \sum_{n\in\Lambda^*} \mathcal{G}_n\,(2\pi|N-n|)^{\frac12}\,\mathcal{G}_{N-n}\,.$$

Поэтому

$$\Big(\sum_{N\in\Lambda^*} |(\mathcal{G}(-\Delta)^{\frac14}\,\mathcal{G})_N|^q\Big)^{\frac1q} \leqslant \Big(\sum_{n\in\Lambda^*}|\mathcal{G}_n|\Big)\,\|(-\Delta)^{\frac14}\mathcal{G}\|_q\,. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$\Phi = (-\Delta)^{\frac14}\,\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}(-\Delta)^{\frac14}\,\mathcal{G}\,. \tag{1.8}$$

Тогда для всех $N\in\Lambda^*$

$$\Phi_N = \sum_{n\in\Lambda^*}\big((2\pi|N|)^{\frac12} - (2\pi|N-n|)^{\frac12}\big)\,\mathcal{G}_n\mathcal{G}_{N-n}\,.$$

Так как для всех векторов $x,\ y\in\mathbb{R}^2$ выполняется неравенство $\big|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\,\big| \leqslant \sqrt{|x-y|}$, то

$$|\Phi_N| \leqslant \sum_{n\in\Lambda^*}(2\pi|n|)^{\frac12}\,|\mathcal{G}_n|\cdot|\mathcal{G}_{N-n}| = \sum_{n\in\Lambda^*}(2\pi|N-n|)^{\frac12}\,|\mathcal{G}_n|\cdot|\mathcal{G}_{N-n}|$$

и, следовательно, также

$$\Big(\sum_{N\in\Lambda^*}|\Phi_N|^q\Big)^{\frac1q} \leqslant \Big(\sum_{n\in\Lambda^*}|\mathcal{G}_n|\Big)\,\|(-\Delta)^{\frac14}\mathcal{G}\|_q\,. \tag{1.9}$$

Теперь из (1.7), (1.8) и (1.9) вытекает оценка

$$\|(-\Delta)^{\frac14}\,\mathcal{G}^2\|_q \leqslant \Big(\sum_{N\in\Lambda^*}|(\mathcal{G}(-\Delta)^{\frac14}\,\mathcal{G})_N|^q\Big)^{\frac1q} + \Big(\sum_{N\in\Lambda^*}|\Phi_N|^q\Big)^{\frac1q} \leqslant$$

$$\leqslant 2\Big(\sum_{n\in\Lambda^*}|\mathcal{G}_n|\Big)\,\|(-\Delta)^{\frac14}\mathcal{G}\|_q < +\infty\,.$$

Лемма 3 доказана. □

Так как $g^{\pm\frac12}\in\mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $q\in[1,\frac43)$, то в силу леммы 3 также $g\in\mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$. При этом из (1.6) следует, что g — непрерывная функция и ряды Фурье функций g и $g^{\pm\frac12}$ абсолютно сходятся.

Лемма 4. *Для любых $\varkappa\in\mathbb{R}$, $e\in S^1$ и любого вектора $k\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ найдутся векторы $N^\pm\in\Lambda^*$ такие, что для всех $s>0$ и всех функций $\varphi\in\widetilde{H}^s(K)$ выполняются оценки*

$$\|\,(-\Delta)^{\frac{s}{2}}e^{2\pi i\,(N^\pm,x)}\varphi\,\| \leqslant C\,\|\widehat{G}^s_\pm\varphi\|\,,$$

где $C=C(s,\Lambda)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varkappa\in\mathbb{R}$ и $e\in S^1$. Для любого вектора $k\in\mathbb{R}^2$ можно найти такие векторы $N^\pm\in\Lambda^*$, что $|2\pi N^\pm-(k\pm\varkappa\widetilde{e})|\leqslant C_1$, где $C_1=C_1(\Lambda)>0$. Так как $|k+2\pi N\pm\pm\varkappa\widetilde{e}\,| = G^\pm_N \geqslant \frac{\pi}{2|\mathfrak{a}|}$, то для всех $N\in\Lambda^*$

$$2\pi|N+N^\pm| \leqslant |k+2\pi N\pm\varkappa\widetilde{e}\,| + |2\pi N^\pm-(k\pm\varkappa\widetilde{e})| \leqslant \tag{1.10}$$

$$\leqslant |k+2\pi N \pm \varkappa\widetilde{e}\,| + C_1 \leqslant \left(1+\frac{2|\mathfrak{a}|}{\pi}\,C_1\right)|k+2\pi N \pm \varkappa\widetilde{e}\,|\,.$$

С другой стороны,

$$e^{-2\pi i\,(N^{\pm},x)}\,(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\,e^{2\pi i\,(N^{\pm},x)}\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*}(2\pi|N+N^{\pm}|)^s\varphi_N e^{2\pi i\,(N,x)},$$

$$\widehat{G}^s_{\pm}\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*}|k+2\pi N\pm\varkappa\widetilde{e}\,|^s\varphi_N e^{2\pi i\,(N,x)}.$$

Поэтому доказываемые неравенства непосредственно следуют из оценок (1.10). □

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{G}\in\mathcal{L}^{(q)}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2)$, $q\in[1,\frac{4}{3})$. *Тогда для всех функций* $\varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$ *также* $\mathcal{G}\varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$ *и для всех чисел* $\varkappa\in\mathbb{R}$, *всех векторов* $e\in S^1$ *и всех векторов* $k\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$

$$\|\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{\pm}(\mathcal{G}\varphi)-\mathcal{G}\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{\pm}\varphi\| \leqslant C\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_q\,\|\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{\pm}\varphi\|\,,\quad \varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)\,, \tag{1.11}$$

где $C=C(q,\Lambda)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы убедиться, что $\mathcal{G}\varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$ для всех $\varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$ и, более того, отображение $\varphi\mapsto\mathcal{G}\varphi$ непрерывно в $\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$, достаточно доказать оценки (1.11) для тригонометрических многочленов φ и воспользоваться плотностью множества тригонометрических многочленов в $\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$ (и ограниченностью функции $\mathcal{G}$). Поэтому, хотя далее рассматриваются функции $\varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$, можно их считать тригонометрическими многочленами. Обозначим

$$\Phi^{\pm} = \widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{\pm}(\mathcal{G}\varphi) - \mathcal{G}\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{\pm}\varphi\,.$$

Для всех $N\in\Lambda^*$

$$\Phi^{\pm}_N = \sum_{n\,\in\,\Lambda^*}\big((G^{\pm}_N)^{\frac{1}{2}}-(G^{\pm}_{N-n})^{\frac{1}{2}}\big)\mathcal{G}_n\varphi_{N-n}\,.$$

Так как $G^{\pm}_N=|k+2\pi N\pm\varkappa\widetilde{e}|$, $N\in\Lambda^*$, и для всех векторов $x,y\in\mathbb{R}^2$ справедлива оценка $|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\,|\leqslant\sqrt{|x-y|}$, то

$$\big|(G^{\pm}_N)^{\frac{1}{2}}-(G^{\pm}_{N-n})^{\frac{1}{2}}\big| \leqslant \sqrt{2\pi|n|}$$

и, следовательно,

$$|\Phi^{\pm}_N| \leqslant \sum_{n\,\in\,\Lambda^*}\sqrt{2\pi|n|}\,|\mathcal{G}_n|\cdot|\varphi_{N-n}|\,,\quad N\in\Lambda^*. \tag{1.12}$$

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \sum_{n\,\in\,\Lambda^*}|\mathcal{G}_n|\,e^{2\pi i\,(n,x)}.$$

Для $\varkappa\in\mathbb{R}$, $e\in S^1$ и вектора $k\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ выберем векторы $N^{\pm}\in\Lambda^*$ в соответствии с леммой 4 и для функций $\varphi\in\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$ будем обозначать

$$\varphi^{\pm} = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*}|\varphi_N|\,e^{2\pi i\,(N+N^{\pm},\,x)}.$$

Тогда из (1.12) получаем

$$\|\Phi^{\pm}\| \leqslant \|((-\Delta)^{\frac{1}{4}}\widetilde{\mathcal{G}})\varphi^{\pm}\| \leqslant \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\widetilde{\mathcal{G}}\|_{L^{\frac{4}{1-\delta}}(K)}\,\|\varphi^{\pm}\|_{L^{\frac{4}{1+\delta}}(K)}\,. \tag{1.13}$$

В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга

$$\|\,(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\widetilde{\mathcal{G}}\|_{L^{\frac{4}{1-\delta}}(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1-\delta}{4}}\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\widetilde{\mathcal{G}}\|_q = (v(K))^{\frac{1-\delta}{4}}\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\mathcal{G}\|_q\,. \tag{1.14}$$

При $q \in (1, \frac{4}{3})$

$$\|\varphi^{\pm}\|_{L^{\frac{4}{1+\delta}}(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1+\delta}{4}} \biggl(|\varphi_0^{\pm}| + \biggl(\sum_{N \in \Lambda^* \setminus \{0\}} |\varphi_N^{\pm}|^{\frac{4}{3-\delta}} \biggr)^{\frac{3-\delta}{4}} \biggr) \leqslant \tag{1.15}$$

$$\leqslant (v(K))^{\frac{1+\delta}{4}} \biggl(|\varphi_0^{\pm}| + (v(K))^{-\frac{1}{2}} \biggl(\sum_{n \in \Lambda^* \setminus \{0\}} (2\pi|n|)^{-\frac{2}{1-\delta}} \biggr)^{\frac{1-\delta}{4}} \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \varphi^{\pm}\| \biggr).$$

Если $q = 1$ (и $\delta = \delta(1) = 1$), то

$$\|\varphi^{\pm}\|_{L^2(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{2}} \biggl(|\varphi_0^{\pm}| + \biggl(\sum_{N \in \Lambda^* \setminus \{0\}} |\varphi_N^{\pm}|^2 \biggr)^{\frac{1}{2}} \biggr) \leqslant \tag{1.16}$$

$$\leqslant (v(K))^{\frac{1}{2}} \biggl(|\varphi_0^{\pm}| + (v(K))^{-\frac{1}{2}} \biggl(\max_{n \in \Lambda^* \setminus \{0\}} (2\pi|n|)^{-\frac{1}{2}} \biggr) \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \varphi^{\pm}\| \biggr).$$

С другой стороны, в силу леммы 4

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \varphi^{\pm}\| = (v(K))^{\frac{1}{2}} \biggl(\sum_{N \in \Lambda^* \setminus \{0\}} (2\pi|N + N^{\pm}|)\, |\varphi_N|^2 \biggr)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i\,(N^{\pm},\,x)} \varphi\| \leqslant C\bigl(\frac{1}{2}, \Lambda\bigr)\, \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi\|$$

(где $C(\frac{1}{2}, \Lambda) > 0$ — константа из леммы 4). Поэтому оценки (1.11) следуют из (1.13), (1.14), (1.15), (1.16) и неравенств

$$|\varphi_0^{\pm}| \leqslant (v(K))^{-\frac{1}{2}} \biggl(\frac{2|\mathfrak{a}|}{\pi} \biggr)^{\frac{1}{2}} \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi\|.$$

Лемма 5 доказана. □

Если $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_{\Lambda}^{(q)}(\mathbb{R}^2)$, $q \in [1, \frac{4}{3})$, то из леммы 5 и оценки (1.6) получаем, что для всех $\varkappa \in \mathbb{R}$, $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(K)$

$$\|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \mathcal{G} \varphi\| \leqslant C'\bigl(|\mathcal{G}_0| + \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\, \mathcal{G}\|_q\bigr)\, \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi\|, \tag{1.17}$$

где $C' = C'(q, \Lambda) > 0$.

Выберем четную функцию $\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \Omega(x) \in \mathbb{R}$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, для которой преобразование Фурье

$$\mathbb{R}^2 \ni \xi \mapsto \widehat{\Omega}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(x)\, e^{-i\,(\xi, x)}\, dx,$$

являющееся вещественнозначной функцией из $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяет условиям $\widehat{\Omega}(\xi) = 1$ при $|\xi| \leqslant 1$, $0 \leqslant \widehat{\Omega}(\xi) \leqslant 1$ при $1 < |\xi| \leqslant 2$ и $\widehat{\Omega}(\xi) = 0$ при $|\xi| > 2$.

Для $\varkappa > 0$ определим функции

$$\Omega_{4\varkappa}(x) = (4\varkappa)^2\, \Omega(4\varkappa x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\Omega}\biggl(\frac{\xi}{4\varkappa}\biggr) e^{i\,(x,\,\xi)}\, d\xi,$$

$$g_{4\varkappa}(x) = (g * \Omega_{4\varkappa})(x) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x - y)\, \Omega_{4\varkappa}(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Имеем $(g_{4\varkappa})_n = g_n \widehat{\Omega}\bigl(\frac{\pi n}{2\varkappa}\bigr)$, $n \in \Lambda^*$. При этом $(g_{4\varkappa})_n = 0$ при $2\pi|n| \geqslant 8\varkappa$ и $|(g_{4\varkappa})_n| \leqslant |g_n|$ при всех $n \in \Lambda^*$. Обозначим $\widetilde{g}_{4\varkappa} = g - g_{4\varkappa}$. Тогда $(\widetilde{g}_{4\varkappa})_n = 0$ при $2\pi|n| \leqslant 4\varkappa$ и также $|(\widetilde{g}_{4\varkappa})_n| \leqslant |g_n|$ при всех $n \in \Lambda^*$.

Вместе с неравенствами (0.2) для всех $\varkappa > 0$ и при всех $x \in \mathbb{R}^2$ выполняются также неравенства

$$c_1(g) \leqslant g_{4\varkappa}(x) \leqslant c_2(g)$$

с теми же константами $c_1(g)$ и $c_2(g)$.

Так как $g_{4\varkappa} = g_{4\varkappa} * \Omega_{8\varkappa}$, где

$$\Omega_{8\varkappa}(x) = (8\varkappa)^2\,\Omega(8\varkappa x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

то

$$\|\widehat{d}_\pm g_{4\varkappa}\|_{L^\infty} \leqslant \|g_{4\varkappa}\|_{L^\infty}\,\|\widehat{d}_\pm \Omega_{8\varkappa}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant c^{(1)}c_2(g)\varkappa\,, \tag{1.18}$$

где $c^{(1)} = 8\,\|\widehat{d}_\pm\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$. Обозначим также $c^{(0)} = \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$. Зафиксировав рассматриваемую функцию $\Omega(\cdot)$, можно считать, что $c^{(0)}$ и $c^{(1)}$ — универсальные константы.

§ 2. Доказательство теоремы 3

Будем рассматривать полуторалинейную форму

$$W_g(k+i\varkappa e;\psi,\varphi) = \sum_{j=1}^{2}\big((\widehat{p}_j - i\varkappa e_j)\psi, g(\widehat{p}_j + i\varkappa e_j)\varphi\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big((\widehat{\mathcal{P}}_+ - i\varkappa)\psi, g(\widehat{\mathcal{P}}_+ + i\varkappa)\varphi\big) + \frac{1}{2}\big((\widehat{\mathcal{P}}_- - i\varkappa)\psi, g(\widehat{\mathcal{P}}_- + i\varkappa)\varphi\big)\,, \quad \psi,\varphi \in \widetilde{H}^1(K).$$

Справедливо равенство

$$W_g(k+i\varkappa e;\psi,\varphi) = W_{g_{4\varkappa}}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi) + W_{\widetilde{g}_{4\varkappa}}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi), \tag{2.1}$$

при этом $\|(-\Delta)^{\frac14}\,g_{4\varkappa}\|_q \leqslant \|(-\Delta)^{\frac14}\,g\|_q$ и $\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q \leqslant \|(-\Delta)^{\frac14}\,g\|_q$. Получим оценки для слагаемых в правой части (2.1).

Теорема 4. *Для всех $\varkappa > 0$, всех векторов $e \in S^1$, $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ и всех функций $\psi,\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$|W_{\widetilde{g}_{4\varkappa}}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)| \leqslant C\,\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|\,,$$

где $C = C(q,\Lambda) > 0$.

Доказательство. Для чисел $\varkappa > 0$, векторов $e \in S^1$, $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ и функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ будем обозначать

$$\varphi^{(1)} = \sum_{N\in\Lambda^*\,:\,|k+2\pi N|\leqslant 2\varkappa}\varphi_N e^{2\pi i\,(N,x)}, \quad \varphi^{(2)} = \varphi - \varphi^{(1)} \tag{2.2}$$

(такие же обозначения будут использоваться и для функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$). Так как $(\widetilde{g}_{4\varkappa})_n = 0$ при $2\pi|n| \leqslant 4\varkappa$, то

$$\big((\widehat{\mathcal{P}}_\pm - i\varkappa)\psi^{(1)}, \widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal{P}}_\pm + i\varkappa)\varphi^{(1)}\big) = 0. \tag{2.3}$$

Если $|k+2\pi N| > 2\varkappa$, то $G_N^\pm > \frac12\,|k+2\pi N| > \varkappa$ и $\frac13 < G_N^+(G_N^-)^{-1} < 3$. Поэтому

$$\|(\widehat{\mathcal{P}}_\pm - i\varkappa)\psi^{(2)}\| = \|\widehat{G}_\mp\psi^{(2)}\| \leqslant \sqrt{3}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi^{(2)}\|\,,$$

$$\|(\widehat{\mathcal{P}}_\pm + i\varkappa)\varphi^{(2)}\| = \|\widehat{G}_\pm\varphi^{(2)}\| \leqslant \sqrt{3}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(2)}\|$$

и, следовательно (см. неравенство (1.6)),

$$\big|\big((\widehat{\mathcal{P}}_\pm - i\varkappa)\psi^{(2)}, \widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal{P}}_\pm + i\varkappa)\varphi^{(2)}\big)\big| \leqslant \tag{2.4}$$

$$\leqslant 3\,\|\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^\infty}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi^{(2)}\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(2)}\|\;\leqslant\;3C_1\,\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi^{(2)}\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(2)}\|\,,$$

где $C_1=C_1(q,\Lambda)>0$. Далее, справедливы равенства

$$\big((\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\psi^{(2)},\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\big)\;=\;\big((\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\widehat{G}_\mp^{-\frac12}\psi^{(2)},\widehat{G}_\mp^{\frac12}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\big).$$

При этом

$$\|(\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\widehat{G}_\mp^{-\frac12}\psi^{(2)}\|\;=\;\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}\psi^{(2)}\|\;\leqslant\;\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi^{(2)}\|$$

и (в силу неравенства (1.17))

$$\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\|\;\leqslant\;C'\,\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\|\,, \tag{2.5}$$

где $C'=C'(q,\Lambda)>0$. Так как при $|k+2\pi N|\leqslant 2\varkappa$ выполняются оценки $G_N^\pm\leqslant 3\varkappa$, то

$$\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\|\;=\;\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}\widehat{G}_\pm\varphi^{(1)}\|\;\leqslant\;\sqrt{3\varkappa}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(1)}\|$$

и из (2.5) получаем

$$\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\|\;\leqslant\;\sqrt3\,C'\sqrt{\varkappa}\,\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(1)}\|\,.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\big|\big((\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\psi^{(2)},\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\big)\big|\;\leqslant\\ &\leqslant\;\|(\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\widehat{G}_\mp^{-\frac12}\psi^{(2)}\|\cdot\|\widehat{G}_\mp^{\frac12}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(1)}\|\;\leqslant\\ &\leqslant\;\sqrt3\,C'\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi^{(2)}\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(1)}\|\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Аналогично получаются неравенства

$$\begin{aligned}&\big|\big((\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\psi^{(1)},\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\varphi^{(2)}\big)\big|\;\leqslant\\ &\leqslant\;\|\widehat{G}_\pm^{\frac12}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_\pm-i\varkappa)\psi^{(1)}\|\cdot\|(\widehat{\mathcal P}_\pm+i\varkappa)\widehat{G}_\pm^{-\frac12}\varphi^{(2)}\|\;\leqslant\\ &\leqslant\;\sqrt3\,C'\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi^{(1)}\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi^{(2)}\|\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Теперь из оценок (2.3), (2.4), (2.6) и (2.7) вытекает доказываемое неравенство

$$\begin{aligned}&|W_{\widetilde{g}_{4\varkappa}}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)|\;\leqslant\\ &\leqslant\;\frac12\sum_{j,\,l\,=1}^{2}\big|\big((\widehat{\mathcal P}_+-i\varkappa)\psi^{(j)},\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_++i\varkappa)\varphi^{(l)}\big)\big|\;+\;\frac12\sum_{j,\,l\,=1}^{2}\big|\big((\widehat{\mathcal P}_--i\varkappa)\psi^{(j)},\widetilde{g}_{4\varkappa}(\widehat{\mathcal P}_-+i\varkappa)\varphi^{(l)}\big)\big|\;\leqslant\\ &\leqslant\;(3C_1+2\sqrt3\,C')\,\|(-\Delta)^{\frac14}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|\,.\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана. □

Для полуторалинейной формы $W_{g_{4\varkappa}}(k+i\varkappa e;\cdot,\cdot)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned}&W_{g_{4\varkappa}}(k+i\varkappa e;\psi,\varphi)\;=\\ &=\;\big((\widehat{\mathcal P}_+-i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\psi,(\widehat{\mathcal P}_++i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\varphi\big)\;+\;\big(\psi,\sqrt{g_{4\varkappa}}\,(\Delta\sqrt{g_{4\varkappa}}\,)\varphi\big),\quad \psi,\varphi\in\widetilde{H}^1(K).\end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом

$$\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\Delta\sqrt{g_{4\varkappa}}\;=\;\frac12\,\Delta g_{4\varkappa}\;-\;\frac{1}{4g_{4\varkappa}}\,|\widehat{d}_+g_{4\varkappa}|^2. \tag{2.9}$$

Теорема 5. *Пусть $g \in \mathcal{L}^{(\frac{4}{3})}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2)$ и выполняются неравенства (0.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $\mathbb{J}(\varepsilon) = \mathbb{J}(\varepsilon; \Lambda, g) \in \mathcal{A}$ такое, что для каждого числа $\varkappa \in \mathbb{J}(\varepsilon)$ найдется вектор $e \in S^1$ такой, что для всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$|(\psi, \sqrt{g_{4\varkappa}}\,(\Delta\sqrt{g_{4\varkappa}}\,)\varphi)| \leqslant \varepsilon\, \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,. \tag{2.10}$$

Доказательство теоремы 5 приведено в § 3. Следующая теорема доказывается в § 4.

Теорема 6. *Пусть $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — положительная функция, для которой выполняются неравенства (0.2) и $g^{\frac{1}{2}}, g^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}^{(q)}_{\Lambda}(\mathbb{R}^2)$, где $q \in [1, \frac{4}{3})$. Тогда найдутся константы $C_\pm = C_\pm(\Lambda, g) > 0$ и множество $\widetilde{\mathbb{J}} = \widetilde{\mathbb{J}}(\Lambda, g) \in \mathcal{A}$ такие, что для всех $\varkappa \in \widetilde{\mathbb{J}}$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac{1}{2}}\varphi\| \leqslant C_\pm\, \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Выберем число $\varepsilon = \frac{1}{4}\,C_-^{-2}$, где C_- — константа из теоремы 6, и число $\varkappa_0 > 0$ такое, что для всех $\varkappa > \varkappa_0$

$$C\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\,\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q \leqslant \frac{1}{4}\,C_-^{-2},$$

где C — константа из теоремы 4. Для выбранного числа ε в соответствии с теоремой 5 найдем множество $\mathbb{J}(\varepsilon) \in \mathcal{A}$. Обозначим $\mathbb{J} = (\mathbb{J}(\varepsilon) \cap \widetilde{\mathbb{J}}\,)\backslash(0, \varkappa_0]$ (где $\widetilde{\mathbb{J}} \in \mathcal{A}$ — множество из теоремы 6). Множество $\mathbb{J}$ также принадлежит $\mathcal{A}$. Будем далее предполагать, что $\varkappa \in \mathbb{J}$. Из теоремы 5 следует, что для числа $\varkappa$ (и для выбранного числа ε) найдется вектор $e \in S^1$ такой, что (для всех $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$) выполняется оценка (2.10). Пусть k — произвольный вектор из $\mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$. Для любой функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ определим функцию $\psi \in \widetilde{H}^1(K)$:

$$\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\mathcal{P}}_+ - i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\psi = \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\mathcal{P}}_+ + i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\varphi$$

(что можно сделать, так как $\sqrt{g_{4\varkappa}} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и операторы $\widehat{\mathcal{P}}_+ \pm i\varkappa$ взаимно однозначно отображают $\widetilde{H}^1(K)$ на $L^2(K)$). При этом

$$\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\psi\| = \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\mathcal{P}}_+ - i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\psi\| =$$

$$= \|\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\mathcal{P}}_+ + i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\varphi\| = \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\varphi\|\,.$$

Справедливо тождество (см. (2.1) и (2.8))

$$W_g(k + i\varkappa e; \psi, \varphi) =$$

$$= W_{\widetilde{g}_{4\varkappa}}(k{+}i\varkappa e; \psi, \varphi) + (\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\mathcal{P}}_+{-}i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\psi, \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_+^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\mathcal{P}}_+{+}i\varkappa)\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\varphi) + \bigl(\psi, \sqrt{g_{4\varkappa}}\,(\Delta\sqrt{g_{4\varkappa}}\,)\varphi\bigr),$$

из которого с помощью теорем 4, 5 и 6 (для всех $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$) получаем

$$|W_g(k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| \geqslant \tag{2.12}$$

$$\geqslant \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\sqrt{g_{4\varkappa}}\,\varphi\| - |W_{\widetilde{g}_{4\varkappa}}(k + i\varkappa e; \psi, \varphi)| - \bigl|\bigl(\psi, \sqrt{g_{4\varkappa}}\,(\Delta\sqrt{g_{4\varkappa}}\,)\varphi\bigr)\bigr| \geqslant$$

$$\geqslant \bigl(C_-^{-2} - C\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_q - \varepsilon\bigr)\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\| \geqslant \frac{1}{2}\,C_-^{-2}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi\|\,.$$

Из (2.12) непосредственно следует доказываемое неравенство (1.2). □

§ 3. Доказательство теоремы 5

В этом параграфе функцию g можно считать комплекснозначной (через $\overline{g}$ обозначается комплексно-сопряженная функция к функции g). Доказательство теоремы 5 опирается на приводимые ниже теоремы 7 и 8.

Лемма 6. *Для любой функции $g \in \mathcal{L}_\Lambda^{(\frac{4}{3})}(\mathbb{R}^2)$ существует множество $\mathbb{J}' = \mathbb{J}'(\Lambda, g) \in \mathcal{A}$ такое, что для всех $\varkappa \in \mathbb{J}'$ выполняются неравенства*

$$\|\widehat{d}_\pm g_{4\varkappa}\|_{L^4(K)} = \|\widehat{d}_\mp \overline{g}_{4\varkappa}\|_{L^4(K)} \leqslant \varkappa^{\frac{1}{2}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим

$$a_m = \sum_{n \in \Lambda^* \, : \, 8(m-1) < 2\pi|n| \leqslant 8m} (2\pi|n|)^{\frac{2}{3}} |g_n|^{\frac{4}{3}}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad A_j = j^{-\frac{5}{3}} \sum_{m=1}^{j} m^{\frac{2}{3}} a_m, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{+\infty} A_j = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=m}^{+\infty} j^{-\frac{5}{3}} \right) m^{\frac{2}{3}} a_m \leqslant C \sum_{m=1}^{+\infty} a_m = C \, \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} g\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} < +\infty$$

(где C — некоторая универсальная константа) и, следовательно (см. лемму 1), при $\varepsilon = \frac{1}{4} (v(K))^{-\frac{1}{3}}$

$$\mathbb{J}' = \mathbb{J}'(\Lambda, g) \doteq \left\{ j \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : A_j \leqslant \frac{\varepsilon}{j \ln j} \right\} \in \mathcal{A}.$$

При этом для всех $\varkappa = j \in \mathbb{J}'$ имеем

$$\sum_{n \in \Lambda^* \, : \, 2\pi|n| \leqslant 8\varkappa} (2\pi|n|)^{\frac{4}{3}} |g_n|^{\frac{4}{3}} \leqslant \sum_{m=1}^{j} (8m)^{\frac{2}{3}} a_m = 4 j^{\frac{5}{3}} A_j \leqslant \frac{4\varepsilon \, j^{\frac{2}{3}}}{\ln j} = \frac{4\varepsilon \, \varkappa^{\frac{2}{3}}}{\ln \varkappa}.$$

Доказываемые оценки теперь следуют из неравенства Хаусдорфа–Юнга:

$$\|\widehat{d}_\pm g_{4\varkappa}\|_{L^4(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n \in \Lambda^*} |(d_\pm g_{4\varkappa})_n|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n \in \Lambda^* \, : \, 2\pi|n| \leqslant 8\varkappa} (2\pi|n|)^{\frac{4}{3}} |g_n|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \frac{\sqrt{\varkappa}}{(\ln \varkappa)^{\frac{3}{4}}}.$$

Лемма 6 доказана. □

При $b \geqslant 2$ (и $\varkappa > 0$) для функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ будут использоваться обозначения (введенные в (2.2) при $b = 2$)

$$\varphi_b^{(1)} = \sum_{N \in \Lambda^* \, : \, |k + 2\pi N| \leqslant b\varkappa} \varphi_N \, e^{2\pi i \, (N, x)}, \quad \varphi_b^{(2)} = \varphi - \varphi_b^{(1)}.$$

Лемма 7. *Для любой функции $g \in \mathcal{L}_\Lambda^{(\frac{4}{3})}(\mathbb{R}^2)$ существует множество $\mathbb{J}' = \mathbb{J}'(\Lambda, g) \in \mathcal{A}$ такое, что для всех $\varkappa \in \mathbb{J}'$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$, всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ и всех $b \geqslant 2$ справедливы оценки*

$$\|(\widehat{d}_\pm g_{4\varkappa}) \varphi_b^{(1)}\| \leqslant C \, (\ln b\varkappa)^{\frac{1}{4}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}} \, \|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} \varphi_b^{(1)}\|,$$

где $C = C(\Lambda) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbb{J}' = \mathbb{J}'(\Lambda, g) \in \mathcal{A}$ — множество из леммы 6 и $\varkappa \in \mathbb{J}'$. Так как

$$\|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(1)}\| \leqslant \|\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa}\|_{L^4(K)} \, \|\varphi_b^{(1)}\|_{L^4(K)} \tag{3.2}$$

и

$$\|\varphi_b^{(1)}\|_{L^4(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}} \Bigg(\sum_{N \in \Lambda^* : \, |k+2\pi N| \leqslant b\varkappa} |\varphi_N|^{\frac{4}{3}} \Bigg)^{\frac{3}{4}} \leqslant \tag{3.3}$$

$$\leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}} \Bigg(\sum_{N \in \Lambda^* : \, |k+2\pi N| \leqslant b\varkappa} |k + 2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}|^{-2} \Bigg)^{\frac{1}{4}} \Bigg(\sum_{N \in \Lambda^*} |k + 2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}| \cdot |(\varphi_b^{(1)})_N|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (v(K))^{-\frac{1}{4}} \Bigg(\sum_{N \in \Lambda^* : \, |k+2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}| \leqslant (b+1)\varkappa} |k + 2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}|^{-2} \Bigg)^{\frac{1}{4}} \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi_b^{(1)}\| \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\Lambda) \, (\ln b\varkappa)^{\frac{1}{4}} \, \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi_b^{(1)}\| \,,$$

то из (3.2), (3.3) и леммы 6 следуют оценки

$$\|(\widehat{d}_{+} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(1)}\| \leqslant C_1(\Lambda) \sqrt{\varkappa} \, (\ln b\varkappa)^{\frac{1}{4}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}} \, \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi_b^{(1)}\| \,, \tag{3.4}$$

$$\|(\widehat{d}_{-} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(1)}\| \leqslant C_1(\Lambda) \sqrt{\varkappa} \, (\ln b\varkappa)^{\frac{1}{4}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}} \, \|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}} \varphi_b^{(1)}\| \,. \tag{3.5}$$

Представив функцию $\varphi_b^{(1)}$ в виде $\varphi_b^{(1)} = \widehat{P}^{+} \varphi_b^{(1)} + \widehat{P}^{-} \varphi_b^{(1)}$, из оценок (3.4) и (3.5), в которых можно заменить функцию $\varphi_b^{(1)}$ на функции $\widehat{P}^{+} \varphi_b^{(1)}$ и $\widehat{P}^{-} \varphi_b^{(1)}$, также получаем

$$\|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(1)}\| \leqslant \|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\widehat{P}^{+} \varphi_b^{(1)}\| + \|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\widehat{P}^{-} \varphi_b^{(1)}\| \leqslant \tag{3.6}$$

$$\leqslant C_1(\Lambda) \sqrt{\varkappa} \, (\ln b\varkappa)^{\frac{1}{4}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}} \left(\|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}} \widehat{P}^{+} \varphi_b^{(1)}\| + \|\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}} \widehat{P}^{-} \varphi_b^{(1)}\| \right).$$

Так как

$$\|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}} \widehat{P}^{+} \varphi_b^{(1)}\| + \|\widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}} \widehat{P}^{-} \varphi_b^{(1)}\| \leqslant \sqrt{2} \, (v(K))^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{N \in \Lambda^*} \big(\min_{\pm} G_N^{\pm}\big) \, |(\varphi_b^{(1)})_N|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

и для всех $N \in \Lambda^*$

$$\varkappa \big(\min_{\pm} G_N^{\pm}\big) \leqslant \big(\max_{\pm} G_N^{\pm}\big) \big(\min_{\pm} G_N^{\pm}\big) = G_N^{+} G_N^{-} \,, \tag{3.8}$$

то из (3.6), (3.7) и (3.8) (при $C = \sqrt{2}\, C_1(\Lambda)$) следуют доказываемые оценки. □

Замечание 1. При доказательстве леммы 7 выбиралось множество $\mathbb{J}'$ такое же, как и в лемме 6. Так как число ε из доказательства леммы 6 может быть любым (что приведет только к умножению правой части неравенства (3.1) на некоторую константу), то в неравенствах (3.4) и (3.5), которые являются следствием леммы 6, при выборе соответствующих множеств $\mathbb{J}' \in \mathcal{A}$ и при $\varkappa \in \mathbb{J}'$ можно использовать любую константу $C_1 > 0$. Поэтому лемма 7 также остается справедливой, если положить $C = 1$.

Теорема 7. *Для любых функции $g \in \mathcal{L}_{\Lambda}^{(\frac{4}{3})}(\mathbb{R}^2)$, для которой при п. в. $x \in \mathbb{R}^2$ выполняется условие $|g(x)| \leqslant c_2(g)$, и числа $\varepsilon_1 > 0$ найдется множество $\mathbb{J}_1(\varepsilon_1) = \mathbb{J}_1(\varepsilon_1; \Lambda, g) \in \mathcal{A}$ такое, что для всех $\varkappa \in \mathbb{J}_1(\varepsilon_1)$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$\|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi\| \leqslant \varepsilon_1 \, \|\widehat{G}_{+}^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_{-}^{\frac{1}{2}} \varphi\| \,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbb{J}' = \mathbb{J}'(\Lambda, g) \in \mathcal{A}$ — множество из лемм 6 и 7 и $\varkappa \in \mathbb{J}'$. Если $b \geqslant 2$ и $|k+2\pi N| > b\varkappa$, то $G_N^{\pm} \geqslant (b-1)\varkappa > \frac{b}{2}\,\varkappa$ и, следовательно (см. неравенство (1.18)),

$$\|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(2)}\| \leqslant \|\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa}\|_{L^\infty}\, \|\varphi_b^{(2)}\| \leqslant \tag{3.9}$$

$$\leqslant c^{(1)} c_2(g)\,\varkappa\, \|\varphi_b^{(2)}\| \leqslant 2c^{(1)} c_2(g)\, b^{-1}\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi_b^{(2)}\|\,.$$

Выберем число $b \geqslant 2$ так, что $\varepsilon_1 b \geqslant 4c^{(1)} c_2(g)$. Так как $(\ln\, b\varkappa)^{\frac14}\, (\ln\, \varkappa)^{-\frac34} \to 0$ при $\varkappa \to +\infty$, то можно найти число $\varkappa_0 > 0$ такое, что при всех $\varkappa > \varkappa_0$

$$C\,(\ln\, b\varkappa)^{\frac14}\, (\ln\, \varkappa)^{-\frac34} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}\,,$$

где $C = C(\Lambda)$ — константа из леммы 7. Тогда для всех $\varkappa \in \mathbb{J}_1(\varepsilon_1) \doteq \mathbb{J}' \backslash (0, \varkappa_0] \in \mathcal{A}$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ из (3.9) и леммы 7 вытекают доказываемые оценки:

$$\|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi\| \leqslant \|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(1)}\| + \|(\widehat{d}_{\pm} g_{4\varkappa})\varphi_b^{(2)}\| \leqslant$$

$$\leqslant C\,(\ln\, b\varkappa)^{\frac14}\, (\ln\, \varkappa)^{-\frac34}\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi_b^{(1)}\| + 2c^{(1)} c_2(g)\, b^{-1}\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi_b^{(2)}\| \leqslant \varepsilon_1\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi\|\,.$$

Теорема 7 доказана. □

Теорема 8. *Для любых функции $g \in \mathcal{L}_\Lambda^{(\frac43)}(\mathbb{R}^2)$, для которой при п. в. $x \in \mathbb{R}^2$ выполняется условие $|g(x)| \leqslant c_2(g)$, и числа $\varepsilon_2 > 0$ найдется множество $\mathbb{J}_2(\varepsilon_2) = \mathbb{J}_2(\varepsilon_2; \Lambda, g) \in \mathcal{A}$ такое, что для любого $\varkappa \in \mathbb{J}_2(\varepsilon_2)$ существует вектор $e \in S^1$ такой, что для всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K)$*

$$|(\psi, (\Delta g_{4\varkappa})\varphi)| \leqslant \varepsilon_2\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \psi\| \cdot \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi\|\,. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы тождества

$$(\psi, (\Delta g_{4\varkappa})\varphi) = i\big(\widehat{p}_+ \psi, (\widehat{d}_+ g_{4\varkappa})\varphi\big) - i\big((\widehat{d}_- \overline{g}_{4\varkappa})\psi, \widehat{p}_- \varphi\big) =$$

$$= i\big((\widehat{\mathcal{P}}_+ \mp i\varkappa)\psi, (\widehat{\mathcal{D}}_+ g_{4\varkappa})\varphi\big) - i\big((\widehat{\mathcal{D}}_- \overline{g}_{4\varkappa})\psi, (\widehat{\mathcal{P}}_- \pm i\varkappa)\varphi\big), \quad \psi, \varphi \in \widetilde{H}^1(K).$$

Для любого числа $b \in (0, \frac12]$ (и любых $\varkappa > 0$, $e \in S^1$ и $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$) определим функции

$$\varphi_{[b]}^{\pm} = \sum_{N \in \Lambda^*:\ |k+2\pi N \pm \varkappa \widetilde{e}\,| \leqslant b\varkappa} \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,\,x)} \tag{3.11}$$

(такие же обозначения используются для функции ψ). При этом, если рассматриваемая сумма не содержит слагаемых, считаем, что $\varphi_{[b]}^{\pm} \equiv 0$). Обозначим также $\varphi' = \varphi - \varphi_{[\frac12]}^{+} - \varphi_{[\frac12]}^{-}$, $\psi' = \psi - \psi_{[\frac12]}^{+} - \psi_{[\frac12]}^{-}$. Пусть $\varkappa \in \mathbb{J}_1(\varepsilon_1) \in \mathcal{A}$, где $\mathbb{J}_1(\varepsilon_1)$ — множество из теоремы 7, определяемое для числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{42}$. Если $|k+2\pi N + \varkappa\widetilde{e}\,| > \frac{\varkappa}{2}$ и $|k+2\pi N - \varkappa\widetilde{e}\,| > \frac{\varkappa}{2}$ (где $N \in \Lambda^*$), то $G_N^{\pm} > \frac13\, |k+2\pi N|$, $G_N^+ G_N^- > \frac13\, |k+2\pi N|^2$, $\frac15 < G_N^+ (G_N^-)^{-1} < 5$. Поэтому

$$\|\widehat{p}_+ \varphi'\| \leqslant \sqrt{3}\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi'\|\,, \quad \|(\widehat{\mathcal{P}}_+ \pm i\varkappa)\varphi'\| \leqslant \sqrt{5}\, \|\widehat{G}_+^{\frac12} \widehat{G}_-^{\frac12} \varphi'\|$$

и, следовательно (см. теорему 7),

$$|(\psi', (\Delta g_{4\varkappa})\varphi)| \leqslant |(\psi', (\Delta g_{4\varkappa})\varphi')| + \sum_{\pm} |(\psi', (\Delta g_{4\varkappa})\varphi_{[\frac12]}^{\pm})| \leqslant \tag{3.12}$$

$$\leqslant \|\widehat{p}_+ \psi'\| \cdot \|(\widehat{d}_+ g_{4\varkappa})\varphi'\| + \|(\widehat{d}_- \overline{g}_{4\varkappa})\psi'\| \cdot \|\widehat{p}_+ \varphi'\| +$$

$$+\,\|(\widehat{\mathcal P}_+ + i\varkappa)\psi'\|\cdot\|(\widehat d_+ g_{4\varkappa})\varphi^+_{[\frac12]}\| + \|(\widehat d_-\overline g_{4\varkappa})\psi'\|\cdot\|(\widehat{\mathcal P}_- - i\varkappa)\varphi^+_{[\frac12]}\| +$$

$$+\,\|(\widehat{\mathcal P}_+ - i\varkappa)\psi'\|\cdot\|(\widehat d_+ g_{4\varkappa})\varphi^-_{[\frac12]}\| + \|(\widehat d_-\overline g_{4\varkappa})\psi'\|\cdot\|(\widehat{\mathcal P}_- + i\varkappa)\varphi^-_{[\frac12]}\| \leqslant$$

$$\leqslant 2(\sqrt3+\sqrt5+1)\varepsilon_1\,\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\psi'\|\cdot\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\varphi\| \leqslant 10\,\varepsilon_1\,\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\varphi\|\,.$$

Аналогично получается оценка

$$|(\psi^+_{[\frac12]}+\psi^-_{[\frac12]},(\Delta g_{4\varkappa})\varphi')| \leqslant 7\varepsilon_1\,\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\varphi\|\,. \tag{3.13}$$

Далее (для верхней и нижней комбинаций знаков),

$$|(\psi^\pm_{[\frac12]},(\Delta g_{4\varkappa})\varphi^\pm_{[\frac12]})| \leqslant |((\widehat{\mathcal P}_+\pm i\varkappa)\psi^\pm_{[\frac12]},(\widehat{\mathcal D}_+ g_{4\varkappa})\varphi^\pm_{[\frac12]})| + |((\widehat{\mathcal D}_-\overline g_{4\varkappa})\psi^\pm_{[\frac12]},(\widehat{\mathcal P}_-\mp i\varkappa)\varphi^\pm_{[\frac12]})| \leqslant \tag{3.14}$$

$$\leqslant \|\widehat G_\pm\psi^\pm_{[\frac12]}\|\cdot\|(\widehat d_+ g_{4\varkappa})\varphi^\pm_{[\frac12]}\| + \|(\widehat d_-\overline g_{4\varkappa})\psi^\pm_{[\frac12]}\|\cdot\|\widehat G_\pm\varphi^\pm_{[\frac12]}\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon_1\,\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\psi^\pm_{[\frac12]}\|\cdot\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\varphi^\pm_{[\frac12]}\| \leqslant 2\varepsilon_1\,\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat G_+^{\frac12}\widehat G_-^{\frac12}\varphi\|\,.$$

Теперь для определенным образом выбираемых числа $\varkappa$ и вектора $e\in S^1$ получим оставшиеся оценки. Так как

$$\sum_{\nu=2}^{+\infty}\frac1\nu\Biggl(\sum_{n\in\Lambda^*:\,\nu\leqslant 2\pi|n|\leqslant 3\nu}\bigl((2\pi|n|)^{\frac12}\,|g_n|\,\bigr)^{\frac43}\Biggr) =$$

$$= \sum_{n\in\Lambda^*}\Biggl(\sum_{\nu\in\mathbb N\setminus\{1\}:\,\frac{2\pi}{3}|n|\leqslant\nu\leqslant 2\pi|n|}\frac1\nu\Biggr)\bigl((2\pi|n|)^{\frac12}\,|g_n|\,\bigr)^{\frac43} \leqslant C_1'(\Lambda)\,\|(-\Delta)^{\frac14}\,g\,\|_{\frac43}^{\frac43} < +\infty\,,$$

то (см. лемму 1) найдется множество $\mathbb J_2'=\mathbb J_2'(\Lambda,g)\in\mathcal A$ такое, что для всех $\varkappa=\nu\in\mathbb J_2'$

$$\sum_{n\in\Lambda^*:\,\nu\leqslant 2\pi|n|\leqslant 3\nu}\bigl((2\pi|n|)^{\frac12}\,|g_n|\,\bigr)^{\frac43} \leqslant (\ln\,\varkappa)^{-1}.$$

Пусть далее $\varkappa\in\mathbb J_2'$. Для $b\in(0,\frac12]$ и $e\in S^1$ будем обозначать

$$g^{[b]}(\varkappa e;x) = \sum_\pm\ \sum_{n\in\Lambda^*:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde e\,|\leqslant b\varkappa} g_n\,e^{2\pi i\,(n,x)},\quad x\in\mathbb R^2.$$

Положим

$$\mathcal J(\varkappa e) = \sum_{j=1}^J 2^{\frac56 j}\sum_\pm\ \sum_{n\in\Lambda^*:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde e\,|\leqslant 2^{-j}\varkappa}\bigl((2\pi|n|)^{\frac12}\,|g_n|\,\bigr)^{\frac43},$$

где J — наименьшее натуральное число, для которого $J\geqslant 2$ и $2^{-J}\varkappa<\frac{\pi}{2|\mathfrak a|}$ (так как $2^{-J+1}\varkappa\geqslant$ $\geqslant\frac{\pi}{2|\mathfrak a|}$, то $J\leqslant C_2(\Lambda)\,\ln\varkappa$). Получим оценку для среднего значения функции $e\mapsto\mathcal J(\varkappa e)$ по всем единичным векторам $e=E_1\cos\theta+E_2\sin\theta$, $\theta\in[0,2\pi)$:

$$\frac1{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal J(\varkappa e)\,d\theta = \tag{3.15}$$

$$= \frac1{2\pi}\sum_{j=1}^J 2^{\frac56 j}\sum_\pm\ \sum_{n\in\Lambda^*:\,\varkappa\leqslant 2\pi|n|\leqslant 3\varkappa}\Bigl(\int_0^{2\pi}\chi_{\{\theta:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde e\,|\leqslant 2^{-j}\varkappa\}}\,d\theta\Bigr)\cdot\bigl((2\pi|n|)^{\frac12}\,|g_n|\,\bigr)^{\frac43} \leqslant$$

$$\leqslant \frac2\pi\sum_{j=1}^J 2^{\frac56 j}\sum_{n\in\Lambda^*:\,(1-2^{-j})\varkappa\leqslant\pi|n|\leqslant(1+2^{-j})\varkappa}\bigl(\arcsin\,2^{-j}\,\bigr)\bigl((2\pi|n|)^{\frac12}\,|g_n|\,\bigr)^{\frac43} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\left(\sum_{j=1}^{J} 2^{-\frac{1}{6}j}\right) \sum_{n\in\Lambda^*:\,\varkappa\leqslant 2\pi|n|\leqslant 3\varkappa} \bigl((2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\,|g_n|\bigr)^{\frac{4}{3}} \leqslant \frac{2}{3}\bigl(2^{\frac{1}{6}}-1\bigr)^{-1}(\ln\varkappa)^{-1} < 7\,(\ln\varkappa)^{-1}$$

(где $\chi_{\{\theta:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-j}\varkappa\}}$ — характеристическая функция множества $\{\theta\in[0,2\pi):|\pi n\pm\varkappa\widetilde{e}|\leqslant\leqslant 2^{-j}\varkappa\}$). Из (3.15) следует существование вектора $e\in S^1$ такого, что при всех $j=1,\dots,J$

$$\sum_{\pm}\ \sum_{n\in\Lambda^*:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-j}\varkappa} \bigl((2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\,|g_n|\bigr)^{\frac{4}{3}} \leqslant 7\cdot 2^{-\frac{5}{6}j}(\ln\varkappa)^{-1}$$

(в дальнейшем выбирается именно такой вектор $e\in S^1$). Если $n=M-N$, где $M,N\in\Lambda^*$, $|k+2\pi M\pm\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-j}\varkappa$ и $|k+2\pi N\mp\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-l}\varkappa$, где $j,l\in\mathbb{N}$, то

$$|\pi n\pm\varkappa\widetilde{e}| = \frac{1}{2}\bigl|(k+2\pi M\pm\varkappa\widetilde{e})-(k+2\pi N\mp\varkappa\widetilde{e})\bigr| \leqslant 2^{-\min\{j,l\}}\varkappa. \tag{3.16}$$

Откуда, в частности, для выбранного (при $\varkappa\in\mathbb{J}_2'$) вектора $e\in S^1$ (и при $\varkappa\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$)

$$\bigl(\psi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]},(\Delta g_{4\varkappa})\varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\bigr) = \bigl(\psi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]},(\Delta g^{[\frac{1}{2}]}(\varkappa e;.))\varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\bigr). \tag{3.17}$$

Обозначим $\widetilde{\psi}^{\pm}_j=\psi^{\pm}_{[2^{-j}]}-\psi^{\pm}_{[2^{-j-1}]}$, если $j=1,\dots,J-1$, и $\widetilde{\psi}^{\pm}_J=\psi^{\pm}_{[2^{-J}]}$ (аналогичные обозначения используются для функции φ). Тогда (в силу выбора числа J и вектора $\varkappa\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$)

$$\psi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]} = \sum_{j=1}^{J}\widetilde{\psi}^{\pm}_j, \quad \varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]} = \sum_{j=1}^{J}\widetilde{\varphi}^{\mp}_j.$$

Из (3.15) и (3.16) следует

$$\bigl|\bigl(\psi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]},(\Delta g_{4\varkappa})\varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\bigr)\bigr| \leqslant \tag{3.18}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{J}\bigl|\bigl(\widetilde{\psi}^{\pm}_j,(\Delta g^{[\frac{1}{2}]}(\varkappa e;.))\varphi^{\mp}_{[2^{-j}]}\bigr)\bigr| + \sum_{j=1}^{J-1}\bigl|\bigl(\psi^{\pm}_{[2^{-j-1}]},(\Delta g^{[\frac{1}{2}]}(\varkappa e;.))\widetilde{\varphi}^{\mp}_j\bigr)\bigr| =$$

$$= \sum_{j=1}^{J}\bigl|\bigl(\widetilde{\psi}^{\pm}_j,(\Delta g^{[2^{-j}]}(\varkappa e;.))\varphi^{\mp}_{[2^{-j}]}\bigr)\bigr| + \sum_{j=1}^{J-1}\bigl|\bigl(\psi^{\pm}_{[2^{-j-1}]},(\Delta g^{[2^{-j}]}(\varkappa e;.))\widetilde{\varphi}^{\mp}_j\bigr)\bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{J}\|\Delta g^{[2^{-j}]}(\varkappa e;.)\|_{L^4(K)}\,\|\widetilde{\psi}^{\pm}_j\|_{L^2(K)}\,\|\varphi^{\mp}_{[2^{-j}]}\|_{L^4(K)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{J-1}\|\Delta g^{[2^{-j}]}(\varkappa e;.)\|_{L^4(K)}\,\|\psi^{\pm}_{[2^{-j-1}]}\|_{L^4(K)}\,\|\widetilde{\varphi}^{\mp}_j\|_{L^2(K)}.$$

Для всех $j=1,\dots,J$ справедливы оценки

$$\|\Delta g^{[2^{-j}]}(\varkappa e;.)\|_{L^4(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{\pm}\ \sum_{n\in\Lambda^*:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-j}\varkappa}\bigl(4\pi^2|n|^2\,|g_n|\bigr)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \tag{3.19}$$

$$\leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}}(3\varkappa)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{\pm}\ \sum_{n\in\Lambda^*:\,|\pi n\pm\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-j}\varkappa}\bigl((2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}\,|g_n|\bigr)^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant 23\,(v(K))^{\frac{1}{4}}\,2^{-\frac{5}{8}j}\,\varkappa^{\frac{3}{2}}(\ln\varkappa)^{-\frac{3}{4}},$$

$$\|\widetilde{\psi}^{\pm}_j\|_{L^2(K)} \leqslant \bigl(\varkappa\,2^{-j-1}\bigr)^{-\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{\pm}\widetilde{\psi}^{\pm}_j\|_{L^2(K)} \leqslant 2^{\frac{1}{2}(j+1)}\,\varkappa^{-1}\,\|\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{+}\widehat{G}^{\frac{1}{2}}_{-}\psi\|_{L^2(K)}, \tag{3.20}$$

$$\|\varphi^{\mp}_{[2^{-j}]}\|_{L^4(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{N\in\Lambda^*:\,|k+2\pi N\mp\varkappa\widetilde{e}|\leqslant 2^{-j}\varkappa}|\varphi_N|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \tag{3.21}$$

$$\leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}} \Bigl(\sum_{N\,\in\,\Lambda^*\,:\,|k+2\pi N\mp\varkappa\widetilde e\,|\,\leqslant\,2^{-j}\varkappa} |k+2\pi N \mp \varkappa\widetilde e\,|^{-2}\Bigr)^{\frac{1}{4}} \|\widehat G_{\mp}^{\frac12}\varphi^{\mp}_{[2^{-j}]}\| \leqslant$$

$$\leqslant C_3(\Lambda)\,(\ln\varkappa)^{\frac14}\,\|\widehat G_{\mp}^{\frac12}\varphi^{\mp}_{[2^{-j}]}\| \leqslant C_3(\Lambda)\,\varkappa^{-\frac12}\,(\ln\varkappa)^{\frac14}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\varphi\|\,.$$

Аналогичным образом (при $j=1,\ldots,J$) выводятся оценки

$$\|\widetilde\varphi_j^{\mp}\|_{L^2(K)} \leqslant 2^{\frac12(j+1)}\,\varkappa^{-1}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\varphi\|_{L^2(K)}\,, \tag{3.22}$$

$$\|\psi^{\pm}_{[2^{-j-1}]}\|_{L^4(K)} \leqslant C_3(\Lambda)\,\varkappa^{-\frac12}\,(\ln\varkappa)^{\frac14}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\psi\|\,. \tag{3.23}$$

Тогда (см. оценки (3.18) и (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23))

$$\bigl|\bigl(\psi^{\pm}_{[\frac12]}\,,\,(\Delta g_{4\varkappa})\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\bigr)\bigr| \leqslant \tag{3.24}$$

$$\leqslant 46\sqrt2\,C_3(\Lambda)\,(v(K))^{\frac14}\,\Bigl(\sum_{j=1}^{J}2^{-\frac18 j}\Bigr)(\ln\varkappa)^{-\frac12}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant C_4(\Lambda)\,(\ln\varkappa)^{-\frac12}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\varphi\|\,.$$

Пусть для числа $\widetilde\varkappa_0=\widetilde\varkappa_0(\varepsilon_2,\Lambda)>1$ выполняется неравенство $\bigl(4C_4(\Lambda)\varepsilon_2^{-1}\bigr)^2\leqslant\ln\widetilde\varkappa_0$. Тогда при всех $\varkappa\in\mathbb J_2'\setminus(0,\widetilde\varkappa_0)\in\mathcal A$ для выбранного выше вектора $e\in S^1$ (и при всех $k\in\mathcal K(\mathfrak a;\varkappa e)$) из (3.24) получаем

$$\bigl|\bigl(\psi^{\pm}_{[\frac12]}\,,\,(\Delta g_{4\varkappa})\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\bigr)\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon_2}{4}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\psi\|\cdot\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\varphi\|\,. \tag{3.25}$$

Положим $\mathbb J_2(\varepsilon_2)=\mathbb J_2(\varepsilon_2;\Lambda,g)\doteq\bigl(\mathbb J_1(\varepsilon_1)\cap\mathbb J_2'\,\bigr)\setminus(0,\widetilde\varkappa_0)\in\mathcal A$. Тогда при всех $\varkappa\in\mathbb J_2(\varepsilon_2)$ оценка (3.10) (для выбираемых выше векторов $e\in S^1$ и для всех $k\in\mathcal K(\mathfrak a;\varkappa e)$ и всех $\psi,\varphi\in\widetilde H^1(K)$) следует из (3.12), (3.13), (3.14) и (3.25). Теорема 8 доказана. □

Доказательство теоремы 5. Для доказательства достаточно воспользоваться теоремами 7 и 8 и тождеством (2.9). Действительно, пусть $\varepsilon_2=\varepsilon$ и $\varepsilon_1=\sqrt{2c_1(g)\varepsilon}$. Определим множество $\mathbb J(\varepsilon)=\mathbb J(\varepsilon;\Lambda,g)=\mathbb J_1(\varepsilon_1)\cap\mathbb J_2(\varepsilon_2)\in\mathcal A$, где множество $\mathbb J_1(\varepsilon_1)\in\mathcal A$ определяется в теореме 7, а множество $\mathbb J_2(\varepsilon_2)\in\mathcal A$ — в теореме 8. Для числа $\varkappa\in\mathbb J(\varepsilon)\subseteq\mathbb J_2(\varepsilon_2)$ вектор $e\in S^1$ выбирается в соответствии с теоремой 8. Тогда доказываемое в теореме 5 неравенство (для всех $k\in\mathcal K(\mathfrak a;\varkappa e)$ и $\psi,\varphi\in\widetilde H^1(K)$) непосредственно вытекает из (2.9) и теорем 7 и 8.

§ 4. Доказательство теоремы 6

В этом параграфе предполагается, что функция $g:\mathbb R^2\to\mathbb R$ удовлетворяет условию (0.2), и для рассматриваемых чисел $\varkappa>0$ выбираются любые векторы $e\in S^1$ и $k\in\mathcal K(\mathfrak a;\varkappa e)$. Для функций $\varphi\in L^2(K)$ определяются функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ (см. (2.2)), а также функции $\varphi^{\pm}_{[b]}$ (см. (3.11)), $b\in(0,\frac12]$, и $\varphi'=\varphi-\varphi^{+}_{[\frac12]}-\varphi^{+}_{[\frac12]}$ (которые зависят от $\varkappa$ и e, а функции $\varphi^{\pm}_{[b]}$ и φ' — также от вектора k), при этом функции $\varphi^{\pm}_{[b]}$ и $\varphi^{(1)}$ считаются нулевыми, если в суммах, которые их определяют, нет слагаемых. Пусть $\widehat P^{\pm}_{[b]}$ и $\widehat P\,'$ — ортогональные проекторы в $L^2(K)$, ставящие в соответствие функциям φ функции $\varphi^{\pm}_{[b]}=\widehat P^{\pm}_{[b]}\varphi$ и $\varphi'=\widehat P\,'\varphi$. Если для вектора $N\in\Lambda^*$ выполняются неравенства $|k+2\pi N+\varkappa\widetilde e\,|>\frac{\varkappa}{2}$ и $|k+2\pi N-\varkappa\widetilde e\,|>\frac{\varkappa}{2}$, то $\frac15<G_N^{+}(G_N^{-})^{-1}<5$ и $G_N^{+}G_N^{-}>\frac34\,\varkappa^2$. Поэтому для всех функций $\widetilde\varphi\in L^2(K)$

$$\|\widehat G_{\pm}^{\frac12}\widehat P\,'\widetilde\varphi\| \leqslant \sqrt5\,\|\widehat G_{\mp}^{\frac12}\widehat P\,'\widetilde\varphi\| \tag{4.1}$$

и для всех функций $\widetilde\varphi\in\widetilde H^1(K)$

$$\varkappa\,\|\widehat P\,'\widetilde\varphi\| \leqslant \frac{2}{\sqrt3}\,\|\widehat G_{+}^{\frac12}\widehat G_{-}^{\frac12}\widehat P\,'\widetilde\varphi\|\,, \tag{4.2}$$

$$\varkappa\,\|\widetilde{\varphi}^{(2)}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\widetilde{\varphi}^{(2)}\|\,. \tag{4.3}$$

Для функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (для каждого из знаков «$+$» и «$-$») справедливы равенства

$$\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\varphi = \tag{4.4}$$

$$= \widehat{P}'\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\varphi + \big(\widehat{P}^+_{[\frac12]}+\widehat{P}^-_{[\frac12]}\big)\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}'\varphi +$$

$$+\widehat{P}^+_{[\frac12]}\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^+_{[\frac12]}\varphi + \widehat{P}^-_{[\frac12]}\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^-_{[\frac12]}\varphi +$$

$$+\widehat{P}^+_{[\frac12]}\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^-_{[\frac12]}\varphi + \widehat{P}^-_{[\frac12]}\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^+_{[\frac12]}\varphi\,.$$

Поэтому для доказательства теоремы 6 (при определенным образом выбираемых числах $\varkappa > 0$) достаточно получить соответствующие оценки для каждого слагаемого в правой части равенства (4.4). Получению таких оценок посвящена оставшаяся (основная) часть этого параграфа.

Пусть $\mathbb{J}' = \mathbb{J}'(\Lambda, g) \in \mathcal{A}$ — множество из леммы 7 (и леммы 6). Тогда для всех $\varkappa \in \mathbb{J}'$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ справедливы оценки

$$\|\widehat{P}'\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\varphi\| = \|\widehat{P}'\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}(\widehat{P}^+\varphi+\widehat{P}^-\varphi)\| \leqslant \tag{4.5}$$

$$\leqslant \sqrt5\,\|\widehat{P}'\widehat{G}_+(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^+\varphi\| + \sqrt5\,\|\widehat{P}'\widehat{G}_-(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^-\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt5\,\|(\widehat{\mathcal{P}}_+ + i\varkappa)(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^+\varphi\| + \sqrt5\,\|(\widehat{\mathcal{P}}_+ - i\varkappa)(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}^-\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt5\,\|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}(\widehat{\mathcal{P}}_+ + i\varkappa)\widehat{P}^+\varphi\| + \sqrt5\,\|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}(\widehat{\mathcal{P}}_+ - i\varkappa)\widehat{P}^-\varphi\| +$$

$$+\frac{\sqrt5}{2}\,\|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12-1}\|_{L^\infty}\big(\|(\widehat{d}_+g_{4\varkappa})\widehat{P}^+\varphi\| + \|(\widehat{d}_+g_{4\varkappa})\widehat{P}^-\varphi\|\big)$$

(использовалось неравенство (4.1)). При этом

$$\|(\widehat{\mathcal{P}}_+ \pm i\varkappa)\widehat{P}^\pm\varphi\| = \|\widehat{G}_\pm\widehat{P}^\pm\varphi\| \leqslant \|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}^\pm\varphi\| \tag{4.6}$$

и (см. оценки (1.18), (4.3) и лемму 7 (при $b = 2$))

$$\|(\widehat{d}_+g_{4\varkappa})\widehat{P}^\pm\varphi\| \leqslant \|(\widehat{d}_+g_{4\varkappa})\widehat{P}^\pm\varphi^{(1)}\| + \|(\widehat{d}_+g_{4\varkappa})\widehat{P}^\pm\varphi^{(2)}\| \leqslant \tag{4.7}$$

$$\leqslant C(\Lambda)\,(\ln\varkappa)^{-\frac12}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}^\pm\varphi^{(1)}\| + \|\widehat{d}_+g_{4\varkappa}\|_{L^\infty}\|\widehat{P}^\pm\varphi^{(2)}\| \leqslant$$

$$\leqslant \big(C(\Lambda)\,(\ln\varkappa)^{-\frac12} + \frac{1}{\sqrt3}\,c^{(1)}c_2(g)\big)\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|\,.$$

Так как

$$\|(g_{4\varkappa})^{\frac12}\|_{L^\infty} \leqslant (c_2(g))^{\frac12}, \quad \|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12-1}\|_{L^\infty} \leqslant (c_1(g))^{\pm\frac12-1},$$

то из (4.5), (4.6) и (4.7) получаем

$$\|\widehat{P}'\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\varphi\| \leqslant C_1^\pm\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|\,, \tag{4.8}$$

где $C_1^\pm = C_1^\pm(\Lambda, g) > 0$.

Далее (см. (4.2)),

$$\|\big(\widehat{P}^+_{[\frac12]}+\widehat{P}^-_{[\frac12]}\big)\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}'\varphi\| \leqslant \frac{\sqrt5}{2}\,\varkappa\,\|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\widehat{P}'\varphi\| \leqslant \tag{4.9}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt5}{2}\,\varkappa\,\|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\|_{L^\infty}\,\|\widehat{P}'\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac53}\,\|(g_{4\varkappa})^{\pm\frac12}\|_{L^\infty}\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\widehat{P}'\varphi\| \leqslant C_2^\pm(g)\,\|\widehat{G}_+^{\frac12}\widehat{G}_-^{\frac12}\varphi\|\,.$$

Лемма 8. *Пусть $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция, для которой $\sqrt{g} \in \mathcal{L}_\Lambda^{(q)}(\mathbb{R}^2)$, где $q \in [1, \frac43)$. Тогда существует константа $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_1(q, \Lambda; g) > 0$ такая, что для всех $\varkappa \in \mathbb{N}$*

$$\|\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^\infty} \leqslant \widetilde{C}_1\,\varkappa^{-\frac12\,\delta(q)}. \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\|\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^\infty} \leqslant \sum_{N\in\Lambda^*:\,2\pi|N|\geqslant 4\varkappa}|g_N| = \sum_{N\in\Lambda^*:\,2\pi|N|\geqslant 4\varkappa}\Bigl|\sum_{n\in\Lambda^*}(\sqrt{g}\,)_n(\sqrt{g}\,)_{N-n}\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N\in\Lambda^*}\biggl(\sum_{n\in\Lambda^*:\,2\pi|n|\geqslant 2\varkappa}|(\sqrt{g}\,)_n|\cdot|(\sqrt{g}\,)_{N-n}| + \sum_{n\in\Lambda^*:\,2\pi|N-n|>2\varkappa}|(\sqrt{g}\,)_n|\cdot|(\sqrt{g}\,)_{N-n}|\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant 2\biggl(\sum_{n\in\Lambda^*}|(\sqrt{g}\,)_n|\biggr)\biggl(\sum_{n\in\Lambda^*:\,2\pi|n|\geqslant 2\varkappa}|(\sqrt{g}\,)_n|\biggr)$$

и оценка (4.10) следует из (1.4), (1.5) (при $\varepsilon=0$) и (1.6). □

Замечание 2. Лемма 8 также является следствием леммы 3 и оценок (1.4) и (1.5) (при $\varepsilon=0$).

Лемма 9. *Пусть функция $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (0.2) и $g^{\frac12}$, $g^{-\frac12}\in\mathcal{L}^{(q)}_\Lambda(\mathbb{R}^2)$, $q\in[1,\frac43)$. Тогда существуют число $\varkappa_0=\varkappa_0(q,\Lambda;g)\geqslant 1$ и константы $C_{(\alpha)}=C_{(\alpha)}(q,\Lambda;g)>0$, $\alpha=\pm1$, такие, что для всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0$, всех $e\in S^1$, всех векторов $k\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ и всех функций $\varphi\in L^2(K)$*

$$\|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac12]}\widehat{G}^{\frac12}_{+}\widehat{G}^{\frac12}_{-}(g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^{\pm}_{[\frac12]}\| \leqslant C_{(\alpha)}\,\|\widehat{G}^{\frac12}_{+}\widehat{G}^{\frac12}_{-}\varphi^{\pm}_{[\frac12]}\|\,, \quad \alpha=\pm1\,. \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 5 следует, что (для всех $\varkappa>0$, $e\in S^1$, $k\in\mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ и $\varphi\in L^2(K)$)

$$\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}g^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\| \leqslant C_{\{\alpha\}}\,\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}\varphi\|\,, \quad \alpha=\pm1\,,$$

где $C_{\{\alpha\}}=C_{\{\alpha\}}(q,\Lambda;g)>0$. Тогда для всех $m\in\mathbb{N}$ также

$$\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}g^{\frac{\alpha m}{2}}\varphi\| \leqslant C^m_{\{\alpha\}}\,\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}\varphi\|\,, \quad \alpha=\pm1\,, \tag{4.12}$$

и, кроме того,

$$\|G^{\frac12}_{\pm}g_{4\varkappa}\varphi\| = \tag{4.13}$$

$$= \|G^{\frac12}_{\pm}\biggl(\int_{\mathbb{R}^2}\Omega_{4\varkappa}(\xi)\,g(\cdot-\xi)\,d\xi\biggr)\varphi(\cdot)\| \leqslant \biggl(\int_{\mathbb{R}^2}|\Omega(\xi)|\,d\xi\biggr)\sup_{\xi\in\mathbb{R}^2}\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}g(\cdot-\xi)\varphi(\cdot)\| =$$

$$= c^{(0)}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^2}\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}g(\cdot)\varphi(\cdot+\xi)\| \leqslant c^{(0)}C^2_{\{1\}}\,\|\widehat{G}^{\frac12}_{\pm}\varphi\|\,.$$

Из леммы 8 вытекает оценка

$$\|g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^\infty} \leqslant (c_1(g))^{-1}\,\widetilde{C}_1(q,\Lambda;g)\,\varkappa^{-\frac{\delta}{2}},$$

где $\delta=\delta(q)\in(0,1]$. Выберем число $\varkappa_0=\varkappa_0(q,\Lambda;g)\geqslant 1$ так, чтобы при всех $\varkappa\geqslant\varkappa_0$ выполнялось условие

$$\|g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^\infty} \leqslant (c_1(g))^{-1}\,\widetilde{C}_1(q,\Lambda;g)\,\varkappa^{-\frac{\delta}{2}} \leqslant \frac12\,.$$

Положим $n_0=-[-\delta^{-1}]$ (здесь $[t]$ — целая часть числа $t\in\mathbb{R}$). Тогда $\delta n_0\geqslant 1$. При $\alpha=\pm1$ справедливы равенства

$$(g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}} = g^{\frac{\alpha}{2}}\,(1-g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}} = g^{\frac{\alpha}{2}}\biggl(\gamma^{\{\alpha\}}_0 + \sum_{n=1}^{n_0}\gamma^{\{\alpha\}}_n(g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa})^n\biggr) + \mathcal{O}^{\{\alpha\}}_{n_0}\,, \tag{4.14}$$

где $\gamma_0^{\{\alpha\}} = 1$ (при $\alpha = \pm 1$), $\gamma_n^{\{1\}} = \frac{1}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-3}{2}$, $\gamma_n^{\{-1\}} = \frac{1}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2}$ при $n = 1,\ldots,n_0$ и (для некоторой универсальной константы $C' > 0$)

$$\|\mathcal{O}_{n_0}^{\{\alpha\}}\|_{L^\infty} \leqslant C'\,\|g^{\frac{\alpha}{2}}\|_{L^\infty}\,\|g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^\infty}^{n_0+1} \leqslant C'_{\{\alpha\}}\,\varkappa^{-\frac{\delta}{2}(n_0+1)} \leqslant C'_{\{\alpha\}}\,\varkappa^{-\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}, \tag{4.15}$$

где $C'_{\{\alpha\}} = C'_{\{\alpha\}}(q,\Lambda;g) > 0$, $\alpha = \pm 1$. Выражение (4.14) можно переписать в виде

$$(g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}} = g^{\frac{\alpha}{2}}\left(\gamma_0^{\{\alpha\}} + \sum_{n=1}^{n_0}\gamma_n^{\{\alpha\}}\left(\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m\,(g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa})^m\right)\right) + \mathcal{O}_{n_0}^{\{\alpha\}} = \tag{4.16}$$

$$= g^{\frac{\alpha}{2}}\sum_{m=0}^{n_0}(-1)^m\left(\sum_{n=m}^{n_0}\gamma_n^{\{\alpha\}}C_n^m\right)(g^{-1}\widetilde{g}_{4\varkappa})^m + \mathcal{O}_{n_0}^{\{\alpha\}}$$

($C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты), при этом при $m = 0,1,\ldots,n_0$ (для всех $\varkappa > \varkappa_0$, всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a};\varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in L^2(K)$) из (4.12) и (4.13) получаем

$$\|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}g^{\frac{\alpha}{2}-m}(g_{4\varkappa})^m\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \sqrt{\frac{5}{2}}\,\varkappa^{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}}g^{\frac{\alpha}{2}-m}(g_{4\varkappa})^m\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \tag{4.17}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{5}{2}}\,C_{\alpha,m}\,\varkappa^{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}}\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \sqrt{\frac{5}{3}}\,C_{\alpha,m}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\|, \quad \alpha = \pm 1.$$

Здесь $C_{\alpha,0} = C_{\{\alpha\}}$ и $C_{\alpha,m} = C_{\{-1\}}^{2m-\alpha}(c^{(0)}C_{\{1\}}^2)^m$, если $m = 1,\ldots,n_0$. С другой стороны, из (4.15) (при $\alpha = \pm 1$) вытекают оценки

$$\|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\mathcal{O}_{n_0}^{\{\alpha\}}\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}\,\varkappa\,\|\mathcal{O}_{n_0}^{\{\alpha\}}\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}\,\varkappa\,\|\mathcal{O}_{n_0}^{\{\alpha\}}\|_{L^\infty}\,\|\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}\,C'_{\{\alpha\}}\,\varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}\,\|\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2|\mathfrak{a}|}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}C'_{\{\alpha\}}\,\varkappa^{\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}\,\|\widehat{G}_{\pm}^{\frac{1}{2}}\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{5}{3}}\left(\frac{|\mathfrak{a}|}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}C'_{\{\alpha\}}\,\varkappa^{-\frac{\delta}{2}}\,\|\widehat{G}_+^{\frac{1}{2}}\widehat{G}_-^{\frac{1}{2}}\varphi^{\pm}_{[\frac{1}{2}]}\|,$$

что вместе с (4.16) и неравенствами (4.17) приводит (при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$) к оценкам (4.11). □

Лемма 10. *Предположим, что функция $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{L}_\Lambda^{(\frac{4}{3})}(\mathbb{R}^2)$. Тогда существует множество $\mathbb{J}'' = \mathbb{J}''(g) \in \mathcal{A}$ такое, что для всех $\varkappa \in \mathbb{J}''$*

$$\|\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^4(K)} \leqslant \varkappa^{-\frac{1}{2}}(\ln\varkappa)^{-\frac{3}{4}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $\nu \in \mathbb{N}$ обозначим

$$A_\nu = \sum_{n\in\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\geqslant 4\varkappa}|g_n|^{\frac{4}{3}}.$$

Так как

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu^{-\frac{1}{3}}A_\nu = \sum_{n\in\Lambda^*\,:\,2\pi|n|\geqslant 4}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}\,:\,\nu\leqslant\frac{1}{2}\pi|n|}\nu^{-\frac{1}{3}}\right)|g_n|^{\frac{4}{3}} \leqslant$$

$$\leqslant C''\sum_{n\in\Lambda^*}(2\pi|n|)^{\frac{2}{3}}|g_n|^{\frac{4}{3}} = C''\,\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}g\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} < +\infty,$$

где $C'' > 0$ — универсальная константа, то (в силу леммы 1) существует множество $\mathbb{J}'' = \mathbb{J}''(g) \in \mathcal{A}$ такое, что для всех $\varkappa = \nu \in \mathbb{J}''$

$$\|\widetilde{g}_{4\varkappa}\|_{L^4(K)} \leqslant (v(K))^{\frac{1}{4}} \Biggl(\sum_{n \in \Lambda^* : 2\pi|n| \geqslant 4\varkappa} |g_n|^{\frac{4}{3}} \Biggr)^{\frac{3}{4}} = (v(K))^{\frac{1}{4}} A_\nu^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \bigl(\nu^{-\frac{2}{3}} (\ln \varkappa)^{-1}\bigr)^{\frac{3}{4}} = \varkappa^{-\frac{1}{2}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}}.$$

Лемма 10 доказана. □

Лемма 11. *Пусть функция* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* (0.2) *и* $g^{\pm\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_\Lambda^{(\frac{4}{3})}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда существуют множества* $\mathbb{J}'''_{\{\alpha\}} = \mathbb{J}'''_{\{\alpha\}}(g) \in \mathcal{A}$, $\alpha = \pm 1$, *такие, что для всех* $\varkappa \in \mathbb{J}'''_{\{\alpha\}}$

$$(v(K))^{\frac{1}{4}} \Biggl(\sum_{n \in \Lambda^* : \varkappa \leqslant 2\pi|n| \leqslant 3\varkappa} |(g^{\frac{\alpha}{2}})_n|^{\frac{4}{3}} \Biggr)^{\frac{3}{4}} \leqslant \varkappa^{-\frac{1}{2}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}}.$$

Доказательство. Лемма 11 доказывается аналогично лемме 10. Действительно, обозначим

$$A_\nu^{\pm} = \sum_{n \in \Lambda^* : \nu \leqslant 2\pi|n| \leqslant 3\nu} |(g^{\pm\frac{1}{2}})_n|^{\frac{4}{3}}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Справедливы неравенства

$$\sum_{\nu = 1}^{+\infty} \nu^{-\frac{1}{3}} A_\nu^{\pm} = \sum_{n \in \Lambda^* : 2\pi|n| \geqslant 1} \Biggl(\sum_{\nu \in \mathbb{N} : \frac{2}{3}\pi|n| \leqslant \nu \leqslant 2\pi|n|} \nu^{-\frac{1}{3}} \Biggr) |(g^{\pm\frac{1}{2}})_n|^{\frac{4}{3}} \leqslant$$

$$\leqslant C''' \sum_{n \in \Lambda^*} (2\pi|n|)^{\frac{2}{3}} |(g^{\pm\frac{1}{2}})_n|^{\frac{4}{3}} = C''' \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} g^{\pm\frac{1}{2}}\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} < +\infty,$$

где $C''' > 0$ — универсальная константа. Поэтому (в силу леммы 1) существуют множества $\mathbb{J}'''_\pm = \mathbb{J}'''_\pm(g) \in \mathcal{A}$ такие, что для всех $\varkappa = \nu \in \mathbb{J}'''_\pm$

$$(v(K))^{\frac{1}{4}} \Biggl(\sum_{n \in \Lambda^* : \varkappa \leqslant 2\pi|n| \leqslant 3\varkappa} |(g^{\pm\frac{1}{2}})_n|^{\frac{4}{3}} \Biggr)^{\frac{3}{4}} = (v(K))^{\frac{1}{4}} (A_\nu^{\pm})^{\frac{3}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant \bigl(\nu^{-\frac{2}{3}} (\ln \varkappa)^{-1}\bigr)^{\frac{3}{4}} = \varkappa^{-\frac{1}{2}} (\ln \varkappa)^{-\frac{3}{4}}.$$

Лемма 11 доказана. □

Пусть теперь $\varkappa \in \mathbb{J}_0(g) \doteq \mathbb{J}''(g) \cap \mathbb{J}'''_+(g) \cap \mathbb{J}'''_-(g) \in \mathcal{A}$, где $\mathbb{J}''(g)$ и $\mathbb{J}'''_\pm(g)$ — множества из лемм 10 и 11 соответственно. Тогда для всех $e \in S^1$, всех векторов $k \in \mathcal{K}(\mathfrak{a}; \varkappa e)$ и всех функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K)$ (при $\alpha = \pm 1$)

$$\|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac{1}{2}]} \widehat{G}_+^{\frac{1}{2}} \widehat{G}_-^{\frac{1}{2}} (g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}} \varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \tag{4.18}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \varkappa \|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac{1}{2}]} (g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}} \varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \varkappa \|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac{1}{2}]} g^{\frac{\alpha}{2}} \varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\| + \frac{\sqrt{5}}{2} \varkappa \|\widehat{P}^{\pm}_{[\frac{1}{2}]} \bigl(g^{\frac{\alpha}{2}} - (g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}}\bigr) \varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} \varkappa (v(K))^{\frac{1}{4}} \Biggl(\sum_{n \in \Lambda^* : \varkappa \leqslant 2\pi|n| \leqslant 3\varkappa} \bigl|(g^{\frac{\alpha}{2}})_n\bigr|^{\frac{4}{3}} \Biggr)^{\frac{3}{4}} \|\varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\|_{L^4(K)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{5}}{2} \varkappa \|g^{\frac{\alpha}{2}} - (g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}}\|_{L^4(K)} \|\varphi^{\mp}_{[\frac{1}{2}]}\|_{L^4(K)}.$$

При этом

$$|(g(x))^{\frac12}-(g_{4\varkappa}(x))^{\frac12}|\leqslant\frac12\,(c_1(g))^{-\frac12}\,|\widetilde g_{4\varkappa}(x)|\,,$$

$$|(g(x))^{-\frac12}-(g_{4\varkappa}(x))^{-\frac12}|\leqslant\frac12\,(c_1(g))^{-\frac32}\,|\widetilde g_{4\varkappa}(x)|\,,\quad x\in\mathbb{R}^2,$$

и, следовательно, из леммы 10 получаем

$$\|g^{\frac{\alpha}{2}}-(g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}}\|_{L^4(K)}\leqslant C''_{\{\alpha\}}\,\varkappa^{-\frac12}\,(\ln\varkappa)^{-\frac34},\quad \alpha=\pm1\,,\tag{4.19}$$

где $C''_{\{1\}}=C''_{\{1\}}(g)=\frac12\,(c_1(g))^{-\frac12}$ и $C''_{\{-1\}}=C''_{\{-1\}}(g)=\frac12\,(c_1(g))^{-\frac32}$. Далее (см. (3.22) при $j=1$),

$$\|\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\|_{L^4(K)}\leqslant C_3(\Lambda)\,(\ln\varkappa)^{\frac14}\,\|\widehat G^{\frac12}_{\mp}\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\|\,.$$

Поэтому из (4.18), (4.19) и леммы 11 (при $\varkappa\in\mathbb{J}_0(g)\subseteq\mathbb{J}'''_+(g)\cap\mathbb{J}'''_-(g)$) вытекают оценки

$$\|\widehat P^{\pm}_{[\frac12]}\widehat G^{\frac12}_{+}\widehat G^{\frac12}_{-}(g_{4\varkappa})^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\|\leqslant\frac{\sqrt5}{2}\,(1+C''_{\{\alpha\}})\,C_3(\Lambda)\,\varkappa^{\frac12}\,(\ln\varkappa)^{-\frac12}\,\|\widehat G^{\frac12}_{\mp}\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\|\leqslant\tag{4.20}$$

$$\leqslant C'''_{\{\alpha\}}(\Lambda,g)\,(\ln\varkappa)^{-\frac12}\,\|\widehat G^{\frac12}_{+}\widehat G^{\frac12}_{-}\varphi^{\mp}_{[\frac12]}\|\leqslant C'''_{\{\alpha\}}(\Lambda,g)\,(\ln\varkappa)^{-\frac12}\,\|\widehat G^{\frac12}_{+}\widehat G^{\frac12}_{-}\varphi\|\,,\quad\alpha=\pm1\,.$$

Доказываемые в теореме 6 оценки (2.11) при $\varkappa\in\widetilde{\mathbb{J}}\doteq(\mathbb{J}'\cap\mathbb{J}_0(g))\setminus(0,\varkappa_0)\in\mathcal{A}$ (где $\varkappa_0\geqslant1$ — число из леммы 9) теперь непосредственно следуют из равенства (4.4) и оценок (4.8), (4.9), (4.11) и (4.20). Теорема 6 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 400 с.
2. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 7593–7601.
3. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
4. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
5. Kuchment P., Levendorskiĭ S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354. № 2. P. 537–569.
6. Бирман М.Ш., Суслина Т.А., Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 140–177.
7. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного магнитного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом // Труды С.-Петерб. матем. об-ва. 2001. Т. 9. С. 199–233.
8. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с положительным электрическим потенциалом // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 4. С. 196–228.
9. Штеренберг Р.Г. Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2003. Т. 303. С. 279–320.
10. Данилов Л.И. О спектре двумерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2002. Вып. 3 (26). С. 3–98.
11. Данилов Л.И. О спектре двумерного периодического оператора Шрёдингера // Теор. и матем. физика. 2003. Т. 134. № 3. С. 447–459.
12. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре двумерных периодических операторов Дирака и Шрёдингера // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 49–84.

13. Данилов Л.И. Об отсутствии собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17. № 3. С. 47–80.
14. Данилов Л.И. О спектре двумерного обобщенного периодического оператора Шрёдингера // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2013. Вып. 1 (41). С. 79–96.
15. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Commun. Math. Phys. 1973. Vol. 33. P. 335–343.
16. Sobolev A.V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator // Invent. Math. 1999. Vol. 137. P. 85–112.
17. Shen Z. Absolute continuity of generalized periodic Schrödinger operators // Contemp. Math. 2001. Vol. 277. P. 113–126.
18. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class // J. Funct. Anal. 2002. Vol. 193. P. 314–345.
19. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators // Commun. Math. Phys. 2002. Vol. 229. P. 49–55.
20. Тихомиров М., Филонов Н. Абсолютная непрерывность «четного» периодического оператора Шрёдингера с негладкими потенциалами // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. № 3. С. 201–210.
21. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 360. № 4. P. 1741–1758.
22. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. 275204.
23. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 43. 215201.
24. Zhao P., Liu W. On absolute continuity of periodic elliptic operators with singularity // Acta Mathematica Scientia. 2010. Vol. 30A. № 1. P. 18–30 (in Chinese).
25. Данилов Л.И. О спектре периодического оператора Шрёдингера с потенциалом из пространства Морри // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 25–47.
26. Krupczyk K., Uhlmann G. Absolute continuity of the periodic Schrödinger operator in transversal geometry. URL: `http://arxiv.org/abs/1312.2989`
27. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
28. Данилов Л.И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI / ФТИ УрО РАН. Ижевск, 1996. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.1996, № 3855-В96.
29. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 298–307.

Поступила в редакцию 28.02.2014

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: lidanilov@mail.ru

L. I. Danilov

On the spectrum of a two-dimensional generalized periodic Schrödinger operator. II

Keywords: generalized Schrödinger operator, absolute continuity of the spectrum, periodic potential.

MSC: 35P05

The paper is concerned with the problem of absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional generalized periodic Schrödinger operator $H_g + V = -\nabla g \nabla + V$ where the continuous positive function g and the scalar potential V have a common period lattice Λ. The solutions of the equation $(H_g + V)\varphi = 0$ determine, in particular, the electric field and the magnetic field of electromagnetic waves propagating in two-dimensional photonic crystals. The function g and the scalar potential V are expressed in terms of the electric permittivity ε and the magnetic permeability μ (V also depends on the frequency of the electromagnetic wave). The electric permittivity ε may be a discontinuous function (and usually it is chosen to be piecewise constant)

so the problem to relax the known smoothness conditions on the function g that provide absolute continuity of the spectrum of the operator $H_g + V$ arises. In the present paper we assume that the Fourier coefficients of the functions $g^{\pm\frac{1}{2}}$ for some $q \in [1, \frac{4}{3})$ satisfy the condition $\sum\bigl(|N|^{\frac{1}{2}}|(g^{\pm\frac{1}{2}})_N|\bigr)^q < +\infty$, and the scalar potential V has relative bound zero with respect to the operator $-\Delta$ in the sense of quadratic forms. Let K be the fundamental domain of the lattice Λ, and assume that K^* is the fundamental domain of the reciprocal lattice Λ^*. The operator $H_g + V$ is unitarily equivalent to the direct integral of operators $H_g(k) + V$, with quasimomenta $k \in 2\pi K^*$, acting on the space $L^2(K)$. The last operators can be also considered for complex vectors $k + ik' \in \mathbb{C}^2$. We use the Thomas method. The proof of absolute continuity of the spectrum of the operator $H_g + V$ amounts to showing that the operators $H_g(k + ik') + V - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, are invertible for some appropriately chosen complex vectors $k + ik' \in \mathbb{C}^2$ (depending on g, V, and the number λ) with sufficiently large imaginary parts k'.

REFERENCES

1. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics, Vol. II: Fourier analysis. Self-adjointness*, New York: Academic, 1975. Translated under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. II. Garmonicheskii analiz. Samosopryazhennost'*, Moscow: Mir, 1978, 400 p.
2. Morame A. Absence of singular spectrum for a perturbation of a two-dimensional Laplace–Beltrami operator with periodic electro-magnetic potential, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1998, vol. 31, pp. 7593–7601.
3. Birman M.Sh., Suslina T.A. Absolute continuity of the two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian with discontinuous vector valued potential, *St. Petersburg Math. J.*, 1999, vol. 10, no. 4, pp. 579–601.
4. Birman M.Sh., Suslina T.A. Periodic magnetic Hamiltonian with variable metric. The problem of absolute continuity, *St. Petersburg Math. J.*, 2000, vol. 11, no. 2, pp. 203–232.
5. Kuchment P., Levendorskiǐ S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 354, no. 2, pp. 537–569.
6. Birman M.Sh., Suslina T.A., Shterenberg R.G. Absolute continuity of the two-dimensional Schrödinger operator with delta potential concentrated on a periodic system of curves, *St. Petersburg Math. J.*, 2001, vol. 12, no. 6, pp. 983–1012.
7. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional magnetic periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *Trudy S.-Peterburg. Mat. Obshch.*, 2001, vol. 9, pp. 199–233 (in Russian).
8. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator with positive electric potential, *St. Petersburg Math. J.*, 2002, vol. 13, no. 4, pp. 659–683.
9. Shterenberg R.G. Absolute continuity of the spectrum of the two-dimensional periodic Schrödinger operator with strongly subordinate magnetic potential, *J. Math. Sci.*, 2005, vol. 129, pp. 4087–4109.
10. Danilov L.I. On the spectrum of two-dimensional periodic Schrödinger and Dirac operators, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2002, no. 3 (26), pp. 3–98 (in Russian).
11. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional periodic Schrödinger operator, *Theor. Math. Phys.*, 2003, vol. 134, no. 3, pp. 392–403.
12. Danilov L.I. On the absence of eigenvalues in the spectrum of two-dimensional periodic Dirac and Schrödinger operators, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, no. 1 (29), pp. 49–84 (in Russian).
13. Danilov L.I. Absence of eigenvalues for the generalized two-dimensional periodic Dirac operator, *St. Petersburg Math. J.*, 2006, vol. 17, no. 3, pp. 409–433.
14. Danilov L.I. On the spectrum of a two-dimensional generalized periodic Schrödinger operator, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2013, no. 1 (41), pp. 79–96 (in Russian).
15. Thomas L.E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal, *Commun. Math. Phys.*, 1973, vol. 33, pp. 335–343.
16. Sobolev A.V. Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator, *Invent. Math.*, 1999, vol. 137, pp. 85–112.
17. Shen Z. Absolute continuity of generalized periodic Schrödinger operators, *Contemp. Math.*, 2001, vol. 277, pp. 113–126.
18. Shen Z. The periodic Schrödinger operators with potentials in the Morrey class, *J. Funct. Anal.*, 2002, vol. 193, pp. 314–345.
19. Friedlander L. On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators, *Commun. Math. Phys.*, 2002, vol. 229, pp. 49–55.
20. Tikhomirov M., Filonov N. Absolute continuity of the “even” periodic Schrödinger operator with nonsmooth coefficients, *St. Petersburg Math. J.*, 2005, vol. 16, no. 4, pp. 583–589.

21. Shen Z., Zhao P. Uniform Sobolev inequalities and absolute continuity of periodic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 360, no. 4, pp. 1741–1758.

22. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, 275204.

23. Danilov L.I. On absolute continuity of the spectrum of three- and four-dimensional periodic Schrödinger operators, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2010, vol. 43, 215201.

24. Zhao P., Liu W. On absolute continuity of periodic elliptic operators with singularity, *Acta Mathematica Scientia.*, 2010, vol. 30A, no. 1, pp. 18–30 (in Chinese).

25. Danilov L.I. On the spectrum of a periodic Schrödinger operator with potential in the Morrey space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 25–47 (in Russian).

26. Krupczyk K., Uhlmann G. Absolute continuity of the periodic Schrödinger operator in transversal geometry, 2013, arXiv: 1312.2989v1 [math.SP].

27. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*, Berlin: Springer, 1966. Translated under the title *Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov*, Moscow: Mir, 1972.

28. Danilov L.I. The spectrum of the Dirac operator with periodic potential. VI, Physical Technical Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, 1996, 45 p. Deposited in VINITI 31.12.1996, no. 3855-B96 (in Russian).

29. Filonov N., Sobolev A.V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals, *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 136, pp. 3826–3831.

Received 28.02.2014

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical Technical Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426000, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru