

УДК 524.45-54

© В. М. Данилов, С. И. Путков

## КОРРЕЛЯЦИИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ В МОДЕЛЯХ РАССЕЯННЫХ ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ<sup>1</sup>

Проводится исследование динамической эволюции шести моделей рассеянных звездных скоплений по данным о фазовых координатах звезд, полученных при численном интегрировании уравнений движения звезд. Для этой цели используются фазовые координаты звезд для 100 равноотстоящих моментов времени от начального  $t = 0$  до  $t_m \simeq 5.1\tau_{vr}$  ( $\tau_{vr}$  — начальное время бурной релаксации скопления). На этом интервале времени ошибки, связанные с округлением и экспоненциальным нарастанием возмущений в исходных координатах звезд, существенно не сказываются на статистических выводах о характере движения звезд скопления. Метод исследования основан на вычислениях взаимных корреляционных функций  $C_{1,2} = C_{1,2}(\tau, r)$  ( $\tau$  — временная задержка,  $r$  — расстояние между точками) для флуктуаций фазовой плотности и применении Фурье-преобразования функций  $C_{1,2}$  для расчета спектра частот и дисперсионных соотношений. Анализ графиков функций  $C_{1,2}$ , спектров частот и дисперсионных кривых подтверждает существование в моделях волн фазовой плотности, позволяет установить полный спектр радиальных колебаний фазовой плотности, отделить устойчивые колебания от неустойчивых, рассчитать периоды колебаний фазовой плотности и инкременты нарастания неустойчивых колебаний фазовой плотности. Подтверждены теоретические оценки периодов известных неустойчивых гомологических колебаний ядер моделей скоплений. Указываются некоторые астрофизические приложения полученных результатов: возникновение иррегулярных структур в рассеянных скоплениях, слабая турбулентность в движениях звезд скоплений.

*Ключевые слова:* звездная динамика, фазовая плотность, корреляции, неустойчивые колебания, рассеянные звездные скопления.

### Введение

Ряд наблюдательных данных — иррегулярная форма ядер, наличие ступенек на радиальных профилях плотности, недостаточно высокая для равновесного состояния дисперсия скоростей звезд в ядрах скоплений (холодные ядра), увеличение дисперсии скоростей звезд с удалением от центра скопления и другие признаки — свидетельствуют о неравновесности рассеянных звездных скоплений (РЗС) [1]. Результаты теоретических и численных исследований динамики РЗС также указывают на нестационарность этих систем. В моделях РЗС [2] самопроизвольно и быстро развиваются колебания плотности и регулярного поля, не затухающие на протяжении 5–10 времен бурной релаксации  $\tau_{vr}$ . Теоретическое описание колебаний фазовой плотности в ядрах эллипсоидальных моделей РЗС выполнено в [3]. В работе [4] показана неустойчивость собственных колебаний фазовой плотности в центрах шести моделей РЗС и нескольких реальных РЗС и получены теоретические оценки периодов и инкрементов нарастания гомологических колебаний фазовой плотности. В работе [5] по данным о корреляциях для величин модулей радиус-векторов, скоростей, удельных энергий звезд, плотностей и фазовых плотностей обнаружены и определены параметры волн плотности, потенциала и фазовой плотности в моделях РЗС, обнаружены признаки формирования поляризационных облаков вблизи ряда расстояний между звездами, обнаружен доминирующий поток корреляций из области сильных корреляций в область слабых, приводящий к появлению потока кинетической энергии к центру скопления.

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России» на 2007–2013 годы (государственный контракт № 14.518.11.7064).

В ряде работ ([6–8] и других) теоретически исследуются флуктуации фазовой плотности и соответствующие им корреляционные функции для пространственно-однородных и неоднородных систем с дальнедействующими взаимодействиями. Для этой цели используются кинетические уравнения, записанные при различных упрощающих предположениях. Однако сложный вид полученных корреляционных функций и использование упрощающих предположений затрудняют их практическое применение для анализа динамических процессов в РЗС. Более эффективным представляется прямое вычисление корреляционных функций по данным численного интегрирования уравнений движения звезд. Особенностью нашей работы является использование для этой цели фазовых координат звезд, полученных в [2] из численных экспериментов для динамических моделей звездных систем. За исключением [5], ранее такой подход не применялся для моделей РЗС, что связано с экспоненциальной неустойчивостью траекторий звезд и низкой точностью вычислений (обычно используются разностные схемы 4-го порядка точности). Для вычисления фазовых координат звезд в [2] применяются разностные схемы 10-го и 11-го порядков [9]. Анализ результатов вычисления фазовых координат звезд при использовании разностных схем 10-го и 11-го порядков точности показывает, что точность вычисленных фазовых координат звезд достаточна для выводов о статистических свойствах движений звезд в рассмотренных моделях [10].

Целями данной работы являются вычисление для шести моделей РЗС взаимных корреляционных функций для флуктуаций фазовой плотности, получение спектров частот и дисперсионных соотношений, построение и анализ корреляционных кривых, спектров мощностей и дисперсионных кривых, вычисление периодов и инкрементов нарастания неустойчивых колебаний фазовой плотности, анализ полученных результатов и обсуждение их астрофизических приложений.

## § 1. Исходные данные и начальные параметры моделей скоплений

Мы вычисляем корреляционные функции по данным численных экспериментов для динамических моделей рассеянных звездных скоплений, полученных в [2]. Расчеты фазовых координат звезд в [2] были выполнены путем интегрирования уравнений движения звезд с использованием разностных схем Рунге–Кутты 10-ого порядка и, после экстраполяции по Ричардсону, 11-ого порядка точности (см. [9]) на интервале времени  $t \in [0, t_m]$ , где  $t_m \simeq 5.1\tau_{vr}$  для 6 моделей РЗС. Каждая модель в исходном состоянии содержит 500 звезд с массами, равными солнечной, и состоит из однородных по плотности сферических подсистем «ядро–гало» с совпадающими центрами масс. Скопления движутся в плоскости Галактики по круговым орбитам на расстоянии 8200 пк от центра Галактики. Для описания силового поля Галактики была выбрана модель потенциала Кутузова–Осипкова [11]. Для контроля точности вычисления фазовых координат звезд использовались постоянство интеграла энергии скопления и статистический критерий, описанный в [10]. Для  $t_m \leq 5.1\tau_{vr}$  относительная точность интеграла энергии скопления составила  $\Delta E/E \leq (1 - 4) \cdot 10^{-13}$ , а эмпирические функции распределения фазовых координат звезд, полученных в 10-ом и 11-ом порядках, с вероятностью  $P \geq 0.9$  по критерию Колмогорова являются выборками из одной и той же генеральной совокупности.

Модели скоплений пронумерованы в порядке уменьшения степени нестационарности. Удобно разделить модели по исходным характеристикам на две группы. Модели 1, 2, 4 имеют одинаковые числа звезд в ядре и гало, но последовательно уменьшающиеся радиусы (возрастающие плотности). Модели 2, 3, 5, 6 имеют одинаковые размеры, но последовательно возрастающие числа звезд в ядрах при увеличении их радиусов. Подробное описание моделей дано в [2].

## § 2. Взаимные корреляционные функции

Назовем флуктуацией фазовой плотности величину  $X(t, \vec{r}) = f(t, \vec{r}) - \overline{f(t, \vec{r})}$ , где  $f(t, \vec{r})$  — фазовая плотность в окрестности точки с радиус-вектором  $\vec{r}$  (для краткости аргумент  $\vec{v}$  не указан), определяемая по  $n_{st}$  звездам, ближайшим к данной точке;  $\overline{f(t, \vec{r})}$  — усредненная по

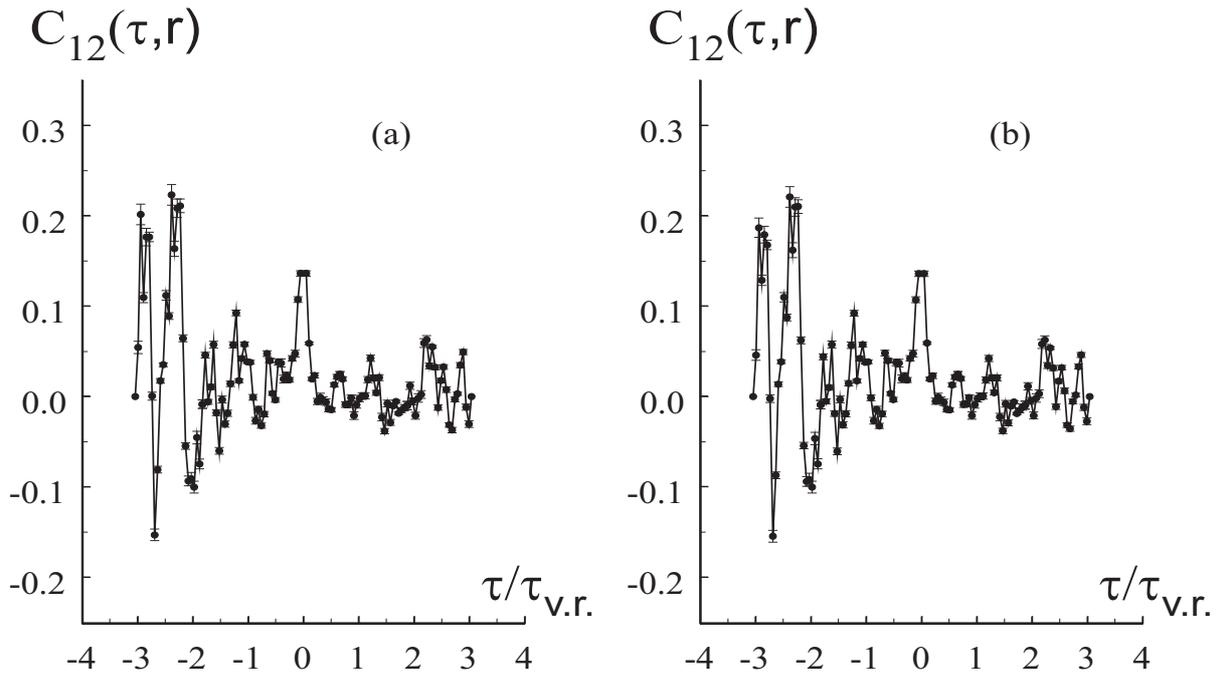


Рис. 1. Взаимные корреляционные функции (модель 2)

времени  $t \in [0, t_m]$  фазовая плотность в окрестности данной точки. Флуктуации фазовой плотности вычисляются для 100 моментов времени с шагом  $0,01t_m$  в окрестностях  $n_p$  точек, первая из которых находится в центре масс скопления, а другие расположены на сфере радиуса  $r$  с постоянным шагом по сферическим угловым координатам  $\Delta\theta = \Delta\phi = \pi/4k$ . Вместе с точкой 1 общее число точек, в окрестности которых рассчитывались флуктуации, равно  $n_p = 27, 115, 483$  при  $k = 1, 2, 4$  соответственно.

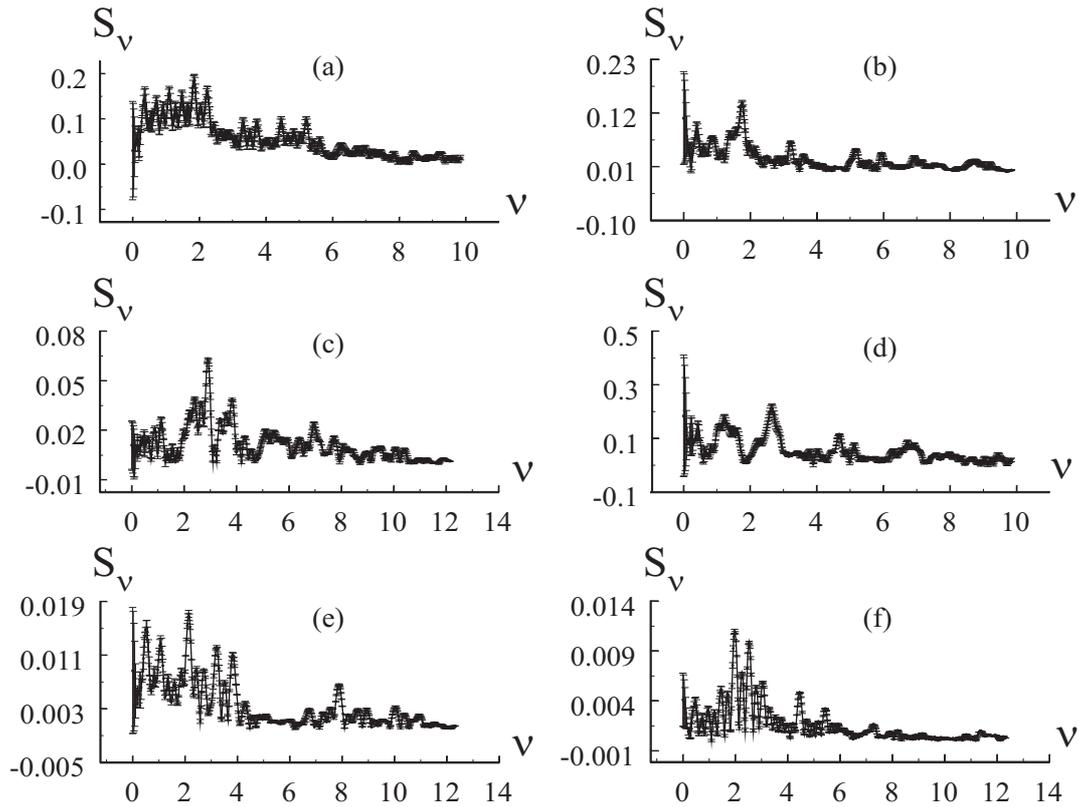
Следуя [12], взаимную корреляционную функцию для флуктуаций фазовой плотности в центре модели скопления и в точках  $\vec{r}_j = (r, \theta_j, \phi_j)$  в сферической системе координат с центром в центре масс скопления запишем в виде

$$C(\tau, \vec{r}_j) = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} X(t, 0)X(t + \tau, \vec{r}_j) dt, \quad (2.1)$$

где  $\tau$  — временная задержка. Взаимные корреляционные функции были вычислены для пар точек  $(1, j)$  при  $j = 2, 3, \dots, n_p$ . Усредняя полученные  $n_p - 1$  значений  $C(\tau, \vec{r}_j)$ , соответствующие разным положениям точки  $j$  на сфере, получаем взаимную корреляционную функцию  $C_{1,2}(\tau, r)$  для флуктуаций фазовой плотности в центре скопления и на расстоянии  $r$  от него.

Графики взаимных корреляционных функций  $C_{1,2}(\tau, r)$  при  $r = 1$  пс,  $n_{st} = 30$  для второй модели представлены на рисунке 1. Значения  $C_{1,2}(\tau, r)$  даны в (млн лет<sup>6</sup>/пк<sup>12</sup>). Вертикальными барами показаны среднеквадратические отклонения от соответствующих средних значений  $C_{1,2}(\tau, r)$ . Для сравнения на одном рисунке показаны результаты вычисления корреляционных функций по данным о фазовых координатах в 10-м (а) и 11-м (б) порядках точности. Сравнение функций  $C_{1,2}(\tau, r)$  и их графиков показывает, что результаты вычислений для 10-го и 11-го порядков точности хорошо согласуются между собой, что говорит о достаточной точности фазовых координат для расчета корреляционных функций (различия функций  $C_{1,2}(\tau, r)$ , полученных в 10-ом и 11-ом порядках точности, как правило, меньше или значительно меньше указанных на рисунке 1 погрешностей величин  $C_{1,2}(\tau, r)$ , и эти различия убывают с уменьшением  $|\tau|$ ).

Локальные экстремумы, выходящие за пределы ошибок, указывают на повышенные взаимные корреляции разного знака для колебаний фазовой плотности с периодами  $P_j = \tau_j$  в центре



**Рис. 2.** Зависимости  $S_\nu$  от частот колебаний фазовой плотности в моделях РЗС

модели скопления и на расстоянии  $r = 1$  пк от него для ряда соответствующих значений  $\tau_j$ . Этот результат можно объяснить существованием в моделях скоплений радиальных волн фазовой плотности с частотами  $\nu_j = 1/P_j$ . Подобные локальные экстремумы на графиках  $C_{1,2}(\tau, r)$  имеют место и для других моделей.

### § 3. Спектры частот

Согласно [12], взаимные корреляционные функции ряда характеристик плазмы в двух точках на расстоянии  $r$  друг от друга могут быть использованы для построения дисперсионных кривых и анализа неустойчивостей колебаний в плазме. Представляет интерес применение аналогичного метода для исследования неустойчивостей колебаний фазовой плотности в моделях РЗС. Будем рассматривать флуктуацию фазовой плотности в виде волнового пакета, распространяющегося в радиальном направлении относительно центра скопления:

$$X(t, r) = \int_0^\infty A(\nu) \exp[i(rk(\nu) - 2\pi\nu t)] d\nu. \quad (3.1)$$

Здесь  $A(\nu)$  — амплитуды, а  $k(\nu)$  — волновые числа волн волнового пакета. В этом случае Фурье-преобразование функции  $C_{1,2}(\tau, r)$ , согласно [13], равно

$$F(\nu) = |F(\nu)| \exp(ir k(\nu)). \quad (3.2)$$

Таким образом, рассматривая Фурье-преобразование функции  $C_{1,2}(\tau, r)$ , можно найти спектр частот  $|F(\nu)|$  и дисперсионное соотношение  $k(\nu) = \text{Arg}(F(\nu))/r$ .

Для вычисления спектра частот и дисперсионных кривых флуктуаций фазовой плотности в моделях РЗС мы использовали программу быстрого преобразования Фурье (БПФ) из [14, с. 483]. На рисунке 2 представлены графики функций  $S(\nu) = |F(\nu)|/\tau_{vr}$ , характеризующих спектры частот колебаний фазовой плотности для моделей 1–6, которым соответствуют графики (а)–(ф). Здесь  $S_\nu$  дано в (млн лет<sup>6</sup>/пк<sup>12</sup>), а под частотой  $\nu$  понимается число колебаний

фазовой плотности за время бурной релаксации. Вертикальными барами показаны погрешности величин  $S_\nu$ . Локальные максимумы на кривых  $S(\nu)$  соответствуют как устойчивым, так и неустойчивым колебаниям фазовой плотности повышенной мощности и связаны с локальными экстремумами  $C_{1,2}(\tau, r)$ . Амплитуда колебаний фазовой плотности пропорциональна величине  $S_\nu$ . Видно, что наибольшую мощность имеют колебания с частотами в интервале  $\nu \in [0.25, 4] = L_1$ , которым соответствуют периоды колебаний  $p = P\tau_{v,r} \in [10, 200]$  млн лет (для сравнения отметим, что большая часть периодов гомологических колебаний 87 рассеянных звездных скоплений и их ядер, исследованных в [1], попадает в интервал  $p \in [10, 60]$  млн лет). Верхняя граница периодов радиальных колебаний большой мощности близка к периоду обращения моделей скоплений вокруг центра Галактики (222.1 млн лет). Частоты гомологических неустойчивых колебаний ядер моделей РЗС, теоретически найденные в работе [4], попадают в интервал  $\nu \in [0.68, 1.36] = L_2 \subset L_1$ . Можно предположить, что низкочастотные радиальные колебания фазовой плотности большой мощности связаны с действием на скопление внешнего поля Галактики и с колебаниями регулярного поля скопления.

Колебания с частотами  $\nu \sim 2.4\text{--}2.45$  могут быть связаны с негомологичными радиальными колебаниями фазовой плотности (в работе [3] показано, что частоты негомологических колебаний фазовой плотности больше частот гомологических колебаний). Мелкомасштабные колебания  $f$  могут быть обусловлены формированием в моделях РЗС поляризационных облаков, турбулентностью в движениях звезд скоплений. Ряд максимумов приходится на соизмеримые частоты, что указывает на возможность в моделях РЗС механизмов резонансной передачи энергии колебаний от низких частот к высоким.

В моделях 1, 2, 4 с увеличением плотности модели скопления наибольшие значения  $S_\nu$  и амплитуды изменений  $S_\nu$  практически не меняются. В моделях 2, 3, 5, 6 с увеличением размеров ядра (в 3 раза) и массы ядра (в 4 раза) эти величины уменьшаются примерно в 15 раз. Таким образом, амплитуды колебаний фазовой плотности слабо зависят от увеличения плотности модели и сильно зависят от размеров и массы ядра.

Кривые  $S_\nu$ , полученные для моделей РЗС при  $t \leq t_m$  по данным о фазовых координатах звезд 10-ого и 11-ого порядков точности, практически не отличаются друг от друга. Частоты соответствующих локальных максимумов совпадают, а взаимные отклонения кривых не превосходят соответствующих погрешностей  $S_\nu$ , показанных вертикальными барами, что говорит о достаточной точности ФКЗ на рассматриваемых временах для построения спектров частот и их анализа.

#### § 4. Дисперсионные кривые

Получение информации по дисперсионным кривым колебаний фазовой плотности  $k_\nu = k(\nu)$  осложняет влияние случайного шума. Варьируя в широких пределах  $n_p$  и  $n_{st}$ , можно ослабить влияние случайного шума на форму кривых  $k_\nu$  в разных интервалах частот. На рисунке 3 представлен график  $k_\nu$  для первой модели, построенный для  $n_{st} = 30$ ,  $n_p = 483$ . На высоких частотах варьированием параметров устранить влияние шума не удастся, поэтому сглаживание дисперсионной кривой производится методом локально взвешенной регрессии [15] (штриховые линии на графиках  $k_\nu$ ). Подобный вид имеют и дисперсионные кривые для моделей 2–6. Многократные изменения знака  $k_\nu$  указывают на формирование в моделях ряда встречных бегущих волн фазовой плотности.

Точки пересечения кривой  $k(\nu)$  и линии  $k_\nu = 0$  соответствуют действительным частотам колебаний  $\nu$  в ядре скопления, которые являются частотами устойчивых колебаний фазовой плотности. «Волнообразные» участки дисперсионных кривых, не пересекающие линию  $k_\nu = 0$ , связаны с неустойчивыми колебаниями фазовой плотности. Чем дальше эти участки от прямой  $k_\nu = 0$ , тем больше инкремент нарастания таких неустойчивостей. Для вычисления периодов  $P_j$  и промежутков времени нарастания  $t_j$  в  $e$  раз амплитуд колебаний фазовой плотности волновые участки аппроксимировались полиномами 3–7 порядков, для которых численно вычислялись

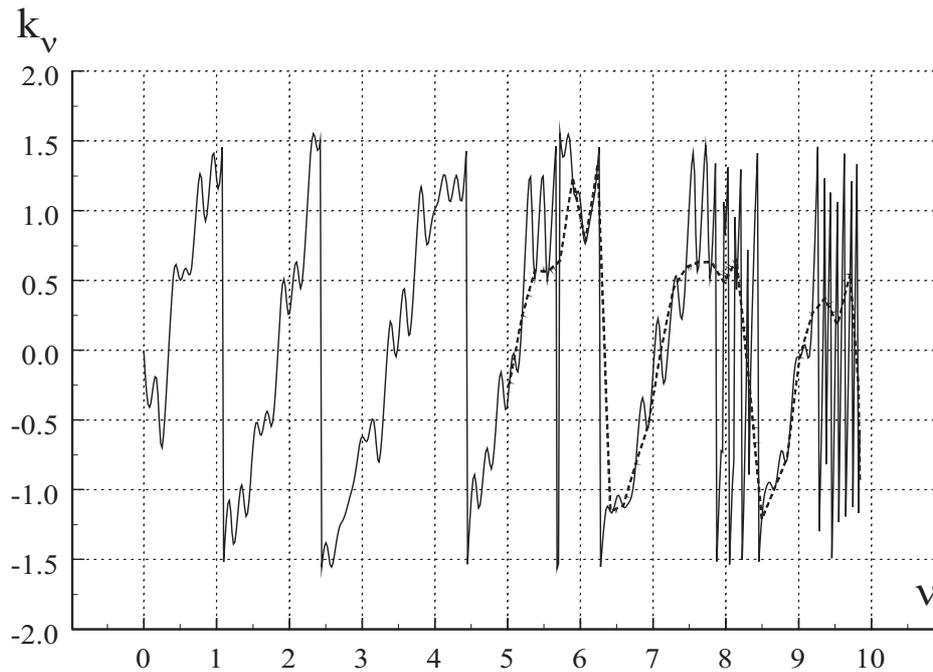


Рис. 3. Дисперсионная кривая колебаний фазовой плотности в модели 1

комплексно-сопряженные корни:  $\nu_{re,j} \pm i\nu_{im,j}$ . Тогда

$$P_j = \frac{1}{\nu_{re,j}}, \quad t_j = \frac{1}{2\pi\nu_{im,j}}. \quad (4.1)$$

Величины  $P_j$  и  $t_j$ , полученные по данным о фазовых координатах звезд 10-ого и 11-ого порядков точности, хорошо согласуются друг с другом. Средние значения относительных погрешностей величин  $P_j$  и  $t_j$  для модели 1 составляют 0.002 и 0.04 соответственно.

### § 5. О некоторых возможных астрофизических приложениях полученных результатов

Исследование корреляций для ряда параметров движения звезд в скоплениях и спектра колебаний фазовой плотности позволяет выявить и изучить коллективные движения звезд в РЗС, обусловленные действием различных механизмов. Эти коллективные движения и их неустойчивости определяют иррегулярность строения таких скоплений: иррегулярную форму ядер, не соответствующую равновесному состоянию, ступенчатые структуры на радиальных профилях плотности. Понимание природы неустойчивостей коллективных движений позволит объяснить причины формирования подобных структур в РЗС. Теоретическому изучению механизмов развития турбулентности движений звезд в РЗС и их моделях должно предшествовать изучение полного спектра устойчивых и неустойчивых колебаний таких систем (для плазмы см. в [12]). По сравнению с работой [5] в данной работе обнаружены дополнительные признаки слабой турбулентности в модели 1 с наибольшей степенью нестационарности (большое количество колебаний  $f$ , широкий спектр частот таких колебаний, неустойчивость большинства этих колебаний). Согласно [12], в плазме основными критериями турбулентности являются уширение спектра колебаний, хаотизация амплитуд и фаз колебаний, наличие потока энергии по спектру.

**§ 6. Заключение**

Совместное использование корреляционных функций  $C_{1,2}(\tau, r)$  и дисперсионных кривых  $k(\nu)$  позволяет найти полный спектр частот колебаний фазовой плотности, выяснить, являются ли эти колебания устойчивыми или неустойчивыми, найти периоды колебаний фазовой плотности и инкременты  $t_j^{-1}$  нарастания амплитуд неустойчивых колебаний. Полученные результаты подтверждают наличие известных неустойчивых колебаний фазовой плотности, полученных теоретически при анализе гомологических колебаний ядер моделей РЗС [3,4]. Выявлен ряд новых неустойчивых колебаний фазовой плотности. Сформулированы общие предположения относительно физических механизмов, ответственных за обнаруженные неустойчивости радиальных колебаний фазовой плотности. Колебания ФП с большими амплитудами и малыми частотами, по-видимому, возбуждаются действием на скопление внешнего поля Галактики и колебаниями регулярного поля скопления. Колебания с частотами  $\nu \sim 2.5$ , вероятно, связаны с негомологичностью колебаний моделей РЗС. Колебания с малыми амплитудами и большими частотами могут быть связаны с формированием поляризационных облаков и турбулентностью в движениях звезд скопления. Полученные результаты могут быть использованы для исследования турбулентности в движениях звезд и объяснения причин формирования иррегулярных структур в РЗС.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов В.М., Путков С.И. Параметры нестационарности рассеянных звездных скоплений // *Астрономический журнал*. 2012. Т. 89. № 8. С. 674–688.
2. Данилов В.М., Дорогавцева Л.В. Временные шкалы механизмов динамической эволюции рассеянных звездных скоплений // *Астрономический журнал*. 2008. Т. 85. № 6. С. 524–536.
3. Данилов В.М. Анализ колебаний плотности в моделях рассеянных звездных скоплений // *Астрономический журнал*. 2008. Т. 85. № 11. С. 986–998.
4. Данилов В.М. О колебаниях фазовой плотности в центрах шести рассеянных звездных скоплений // *Астрономический журнал*. 2010. Т. 87. № 6. С. 566–580.
5. Данилов В.М., Путков С.И. О динамике корреляций в моделях рассеянных звездных скоплений // *Астрономический журнал*. 2012. Т. 89. № 8. С. 689–704.
6. Chavanis P.H. Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: II. Kinetic equations and stability analysis // *Physica A*. 2006. Vol. 361. № 1. P. 81–123.
7. Chavanis P.H. Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: III. The BBGKY hierarchy for spatially inhomogeneous systems // *Physica A*. 2008. Vol. 387. № 4. P. 787–805.
8. Chavanis P.H. Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: IV. General kinetic equations from the quasilinear theory // *Physica A*. 2008. Vol. 387. № 7. P. 1504–1528.
9. Хайпер Е., Нерсетт С.П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
10. Данилов В.М. Статистический анализ динамических моделей рассеянных звездных скоплений с малыми различиями начальных фазовых координат звезд // *Письма в астрономический журнал*. 1997. Т. 23. № 5–6. С. 365–370.
11. Кутузов С.А., Осипков Л.П. Моделирование пространственного гравитационного потенциала звездных систем // *Астрономический журнал*. 1980. Т. 57. № 1. С. 28–37.
12. Волков Я.Ф., Дятлов В.Г., Митина Н.И. Диагностика турбулентной плазмы. Киев: Наукова думка, 1983. 142 с.
13. Бендат Д., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983. 312 с.
14. Грей Д. Наблюдения и анализ звездных фотосфер. М.: Мир, 1980. 496 с.
15. Cleveland W.S., Devlin S.J. Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting // *Journal of American Statistical Association*. 1988. Vol. 83. № 403. P. 596–610.

Данилов Владимир Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, Астрономическая обсерватория Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Vladimir.Danilov@usu.ru

Путков Станислав Игоревич, инженер-исследователь, Астрономическая обсерватория Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Putkov\_S@mail.ru

**V. M. Danilov, S. I. Putkov**

**Correlations and instabilities of phase density fluctuations in models of open star clusters**

*Keywords:* stellar dynamics, phase density, correlations, unstable fluctuations, open star clusters.

Mathematical Subject Classifications: 82C22, 82D10

The investigation of dynamical evolution of 6 open cluster models is carried out on data about phase coordinates of stars received by numerical integration of stellar motion equations. To attain the aim the phase coordinates of stars for 100 equidistant moments of time from the initial  $t = 0$  to  $t_m \simeq 5.1\tau_{vr}$  ( $\tau_{vr}$  is the initial time of cluster violent relaxation), are used. Over the interval of time the rounding-off errors and errors because of exponential growth of initial coordinates perturbations do not affect statistical conclusions about motion behavior of cluster stars. The investigation method is based on calculations of mutual correlation functions  $C_{1,2} = C_{1,2}(\tau, r)$  ( $\tau$  is the time delay,  $r$  is the distance between the points) for phase density fluctuations and application of Fourier transformations of functions  $C_{1,2}$  in order to calculate frequency spectra and dispersion relations. The analysis of graphics  $C_{1,2}$ , frequency spectra and dispersion curves confirms the existence of phase density waves in cluster models, allows to get a complete spectrum of phase density radial oscillations, to separate stable and unstable oscillations, to calculate the periods of phase density oscillations and increments of unstable phase density oscillations. The theoretical estimations of periods of known unstable homological core oscillations of cluster models are confirmed. Pointed out are some astrophysical applications of results received: the origin of irregular structures in open clusters, weak turbulence of cluster star motions.

REFERENCES

1. Danilov V.M., Putkov S.I. Non-stationarity parameters of open clusters, *Astronomy Reports*, 2012, vol. 56, no. 8, pp. 609–622. DOI: 10.1134/S106377291208001X
2. Danilov V.M., Dorogavtseva L.V. Timescales for mechanisms for the dynamical evolution of open star clusters, *Astronomy Reports*, 2008, vol. 52, no. 6, pp. 467–478. DOI: 10.1134/S1063772908060048
3. Danilov V.M. Analysis of density fluctuations in models of open clusters, *Astronomy Reports*, 2008, vol. 52, no. 11, pp. 888–899. DOI: 10.1134/S1063772908110036
4. Danilov V.M. Phase-Density Fluctuations at the Centers of Six Open Clusters, *Astronomy Reports*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 514–527. DOI: 10.1134/S1063772910060053
5. Danilov V.M., Putkov S.I. The dynamics of correlations in open-star cluster models, *Astronomy Reports*, 2012, vol. 56, no. 8, pp. 623–637. DOI: 10.1134/S1063772912080021
6. Chavanis P.H. Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: II. Kinetic equations and stability analysis, *Physica A*, 2006, vol. 361, no. 1, pp. 81–123. DOI: 10.1016/j.physa.2005.06.088
7. Chavanis P.H. Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: III. The BBGKY hierarchy for spatially inhomogeneous systems, *Physica A*, 2008, vol. 387, no. 4, pp. 787–805. DOI: 10.1016/j.physa.2007.10.026
8. Chavanis P.H. Hamiltonian and Brownian systems with long-range interactions: IV. General kinetic equations from the quasilinear theory, *Physica A*, 2008, vol. 387, no. 7, pp. 1504–1528. DOI: 10.1016/j.physa.2007.10.034
9. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations: nonstiff problems, Berlin: Springer-Verlag, 1987, 480 p. Translated under the title *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. Nezhestkie zadachi*, Moscow: Mir, 1990, 512 p.
10. Danilov V.M. Statistical analysis of dynamical open-cluster models with small differences in their initial stellar phase coordinates, *Astronomy Letters*, 1997, vol. 23, no. 3, pp. 322–326.

11. Kutuzov S.A., Osipkov L.P. A generalized model for the three-dimensional gravitational potential of stellar systems, *Soviet Astronomy*, 1980, vol. 24, no. 1, pp. 17–22.
12. Volkov Ya.F., Dyatlov V.G., Mitina N.I. *Diagnostika turbulentnoi plazmy* (Diagnostics of turbulent plasma), Kiev: Naukova dumka, 1983. 142 p.
13. Bendat J.S., Piersol A.G. Engineering application of correlation and spectral analysis, New York: John Wiley, 1980, 302 p. Translated under the title *Primeneniya korrelyatsionnogo i spektral'nogo analiza*, Moscow: Mir, 1983, 312 p.
14. Gray D.F. The observation and analysis of stellar photospheres, New York: John Wiley, 1976, 471 p. Translated under the title *Nablyudeniya i analiz zvezdnykh fotosfer*. Moscow: Mir, 1980, 496 p.
15. Cleveland W.S., Devlin S.J. Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting, *Journal of American Statistical Association*, 1988, vol. 83, no. 403, pp. 596–610.

Received 17.01.2013

Danilov Vladimir Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Astronomical observatory, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: Vladimir.Danilov@usu.ru

Putkov Stanislav Igorevich, Researcher Engineer, Astronomical observatory, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.

E-mail: Putkov\_S@mail.ru