

УДК 521.16, 524.4, 52-423.3

© А. А. Давыденко

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БОКА

Численно исследуются орбиты звезд скопления, обращающегося в плоскости Галактики по круговой орбите (задача Бока). В качестве модели потенциала скопления используется модель Шустера–Пламмера. Рассматривается влияние начальных условий на характер финальных движений, в частности на возможность вылета звезды из скопления. Произведен массовый расчет орбит звезд для различных начальных значений энергии и момента импульса относительно скопления. Оценены вероятности вылета звезды из скопления.

*Ключевые слова:* динамика звездных систем, звездные скопления, задача Бока, численное интегрирование, диаграмма Линдблада.

**1. Введение.** Элементами галактик являются не только звезды (и их спутники), но и звездные группировки: кратные звезды, скопления и ассоциации. Звездными скоплениями называют гравитационно связанные группы звезд, имеющих общее происхождение, близкий химический состав и возраст.

Все силы, действующие на скопление, можно разделить на две группы: внутренние (самогравитация) и внешние (приливные воздействия Галактики, газовых облаков и другие).

Приливная сила со стороны гравитационного поля Галактики делает возможным уход отдельных звезд из скопления, если они оказываются за пределами некоторого критического расстояния от центра скопления. При теоретических исследованиях динамики звездных скоплений в поле приливных сил Галактики обычно предполагается, что центр масс скопления движется по круговой орбите. При исследовании подобных задач, как правило, предполагается, что потенциал Галактики стационарен, а также обладает ротационной и зеркальной симметрией. Б. Бок [1] первым исследовал динамику скоплений, движущихся по круговой орбите: моделируя скопление однородным эллипсоидом, он нашел достаточное условие устойчивости этого скопления. Л. П. Осипков [2] обобщил это условие для неоднородных скоплений.

**2. Постановка задачи Бока.** Рассмотрим звездное скопление, движущееся по круговой орбите в регулярном гравитационном поле Галактики. Будем считать, что Галактика стационарна и обладает ротационной и зеркальной симметрией. Орбиту скопления будем считать круговой. Поскольку размер скопления много меньше, чем радиус его орбиты, для потенциала Галактики  $\Phi_g(R, z)$  примем (как обычно в подобных задачах) приливное приближение

$$\Phi_g(R, z) = \Phi_0 + k_1(R - R_0) + k_2(R - R_0)^2 + k_3z^2.$$

Здесь  $R, z$  — цилиндрические галактоцентрические координаты,  $R_0$  — радиус орбиты скопления. Вместо коэффициентов тейлоровского разложения  $k_1, k_2, k_3$  целесообразно ввести величины  $\Omega_0 = (-k_1/R_0)^{1/2}$ ,  $\varkappa_R^2 = \Omega^2 + 2k_2$ ,  $\varkappa_z^2 = -2k_3$ . Величина  $\Omega_0$  имеет смысл круговой частоты на расстоянии  $R_0$  от центра Галактики, а  $\varkappa_z$  — частота малых вертикальных колебаний пробной звезды. Параметр  $\varkappa_R$  не имеет общепотребительного наименования. Следуя Л. П. Осипкову [3], будем называть его приливым декрементом. Если  $A, B$  — локальные значения коэффициентов Оорта, то  $\Omega_0 = A - B$ ,  $\varkappa_R^2 = 4A(A - B)$ . По современным данным, в окрестности Солнца  $\varkappa_R \approx 42 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{кпк}^{-1}$ ,  $\varkappa_z \approx 85 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{кпк}^{-1}$ .

Будем рассматривать движение пробной звезды в совместном поле тяготения скопления и Галактики. Введем вращающуюся прямоугольную систему координат  $x, y, z$  с началом в центре скопления. Ось  $x$  направим в сторону от центра Галактики, а ось  $y$  — в направлении движения скопления. Запишем в этой системе координаты движения звезды:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega_0\dot{y} - \Omega_0^2(R_0 + x) = \frac{d}{dx}(\Phi + \Phi_g), \\ \ddot{y} + 2\Omega_0\dot{x} - \Omega_0^2y = \frac{d}{dy}(\Phi + \Phi_g), \\ \ddot{z} = \frac{d}{dz}(\Phi + \Phi_g). \end{cases}$$

Здесь  $\Phi = \Phi(x, y, z)$  — потенциал скопления. При сделанных предположениях эти уравнения переписываются следующим образом:

$$\ddot{r} + 2\Omega_0 \times \dot{r} = \nabla(\Phi + \Phi_t), \quad (1)$$

где  $r = (x, y, z)$ ,  $\Omega_0 = (0, 0, \Omega_0)$ ,  $\Phi_t = \frac{1}{2}(\kappa_R^2 x^2 - \kappa_z^2 z^2)$ .

Задачу исследования и решения последних уравнений будем называть *задачей Бока*, поскольку именно Б. Бок, по-видимому, первым рассмотрел ее [1]. Известная задача Хилла может рассматриваться как частный случай задачи Бока, получающийся тогда, когда и Галактика, и скопление — точечные массы.

**3. Преобразование уравнений.** Для более подробного исследования целесообразно привести выражение (1) к безразмерному виду. За единицу длины примем  $r_0 = \sqrt[3]{\frac{GM}{\kappa_R^2}}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса скопления. Физически  $r_0$  примерно соответствует размеру критической поверхности Хилла.

За единицу времени примем  $t_0 = \kappa_R^{-1}$ , что примерно соответствует времени полного оборота скопления вокруг центра Галактики.

Перейдем к безразмерным координатам

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad \eta = \frac{y}{r_0}, \quad \zeta = \frac{z}{r_0}$$

и введем безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_0}.$$

Тогда уравнения движения (1) записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - \gamma\dot{\eta} = \dot{\varphi}_\xi + \xi, \\ \ddot{\eta} + \gamma\dot{\xi} = \dot{\varphi}_\eta, \\ \ddot{\zeta} = \dot{\zeta} - \left(\frac{\kappa_z}{\kappa_R}\right)^2 \zeta. \end{cases} \quad (2)$$

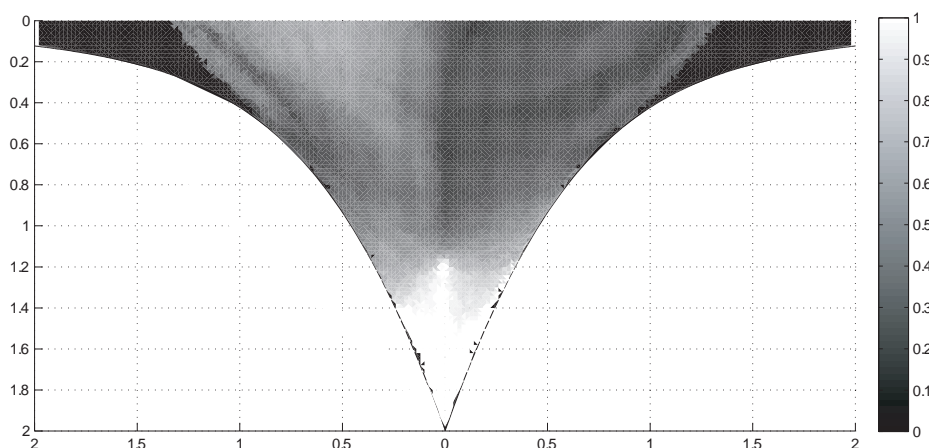
Здесь  $\gamma = 2\Omega_0\kappa_R^{-1}$  — новый безразмерный параметр, характеризующий приливное воздействие Галактики на расстоянии  $R$ . Значение параметра  $\gamma$  определяет относительное влияние Галактики и скопления на звёзды. Так, при увеличении  $\gamma$  Галактика оказывает меньшее влияние, а при его уменьшении, наоборот — Галактика оказывает большее влияние на движение звезд, а скопление — меньше. В окрестности Солнца  $\gamma \approx 1.28$ . Через  $\varphi = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$  обозначен безразмерный потенциал скопления:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\Phi(r)}{(GM\kappa_R)^{2/3}}.$$

В данной работе мы рассматриваем только плоские орбиты ( $\zeta = 0$ ).

**4. Диаграмма Линдблада для изолированного скопления.** Если бы скопление было изолированным, существовали бы интегралы энергии  $E$  и площадей  $h$ :

$$E = \frac{V^2}{2} - \Phi(r), \quad h = r \cdot V_\theta. \quad (3)$$



**Рис. 1.** Диаграмма Линдблада для  $a = 0.5, \gamma = 1.28$ ; интенсивность заливки соответствует доле улетающих звезд (см. шкалу справа: 0.0 — все звёзды покидают скопление, 1.0 — все звёзды остаются в скоплении)

При фиксированном  $r$  справедливы равенства

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}(-r \cdot \Phi'(r)) - \Phi(r), \\ h^2 = -\Phi'(r) \cdot r^3. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим плоскость  $E, h$  (диаграмму Линдблада). Выбирая модель потенциала скопления и подставляя соответствующее выражение для него в систему (4), получаем *огibaющую* (кривую, на которой  $V_r = 0$ ) Линдблада. Для потенциала скопления будем в дальнейшем использовать модель Шустера–Пламмера. В безразмерном виде он имеет следующий вид:

$$\varphi(r) = \left(1 + \frac{r}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

где  $a$  — структурный параметр модели (безразмерный, поскольку уже выбрана единица длины  $r_0$ ). Для потенциала Шустера–Пламмера (5) со значением структурного параметра  $a = 0.5$  график диаграммы Линдблада представлен на рисунке 1. Здесь по оси абсцисс отложен интеграл площадей, а по оси ординат — значения интеграла энергии; при этом если значения интеграла площадей отрицательные, то движения — обратные.

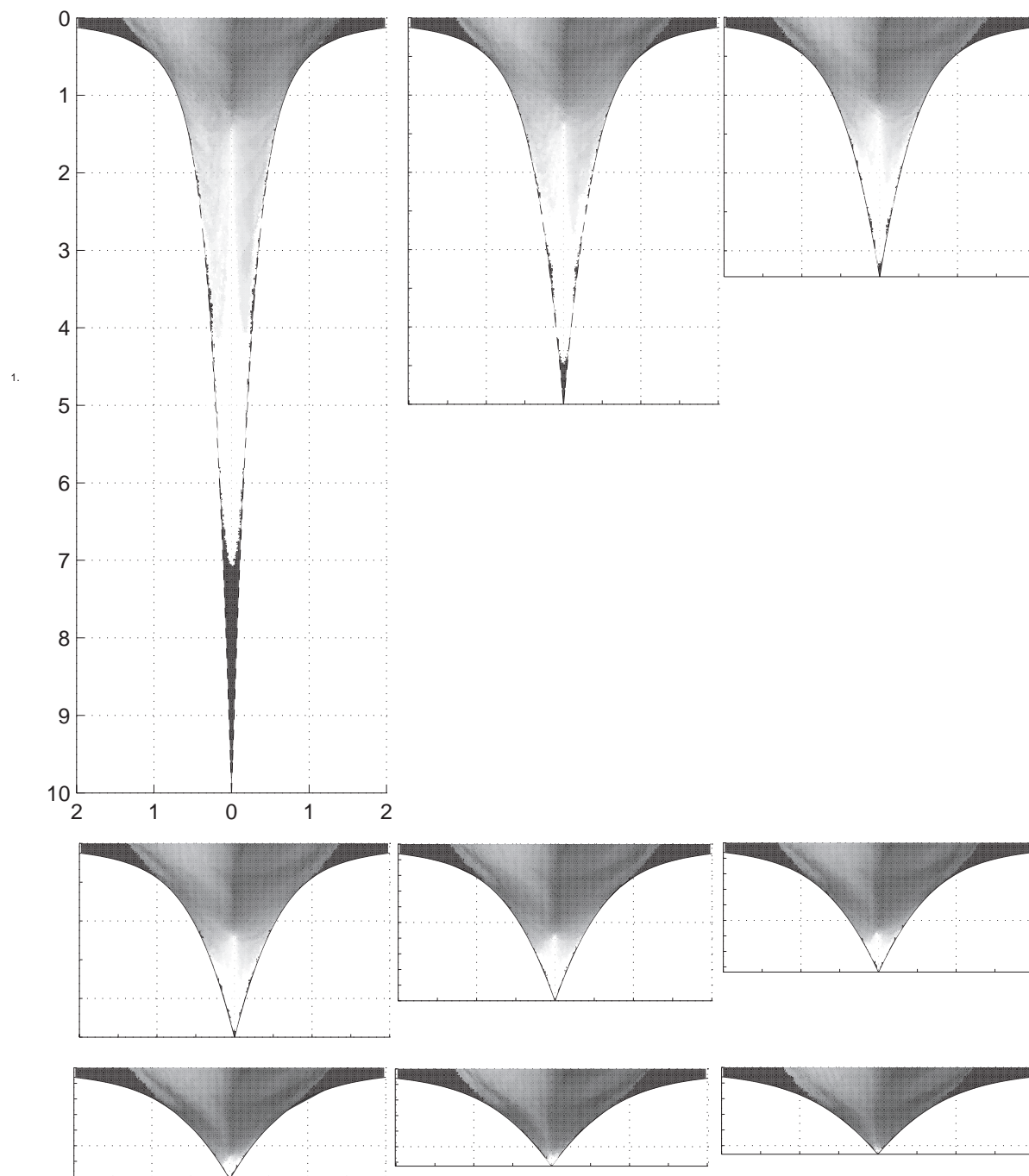
Для исследования орбит, лежащих «внутри» скопления, необходимо выбирать начальные условия для численного интегрирования таким образом, чтобы соответствующие значения интегралов энергии и площадей лежали выше *огibaющей* на диаграмме Линдблада. В этом случае для изолированного скопления орбиты будут представлять розетки.

**5. Выбор начальных условий.** Исследуем влияние приливного поля Галактики на движение орбит, численно интегрируя систему (2). Для выбора начальных условий интегрирования будем сканировать диаграмму Линдблада с шагом 0.02. Далее для каждой пары  $(E, h)$  будем строить радиальную сетку с центром в начале скопления и выбирать  $x, y, V_x, V_y$  с учетом (3). Интегрирование будем проводить на интервале  $\tau = [0, 10]$ , что примерно равняется 2.2 млрд лет.

Таким образом, выбранные начальные условия соответствуют движениям звезд «внутри» изолированного скопления.

**6. Результаты расчетов.** В данной работе будем считать звезду покинувшей скопление, если она удалилась на расстояние  $r > 10$  к моменту окончания интегрирования  $\tau = 10$ . Теоретических признаков того, что звезда покинула скопление, не существует. *Интеграл Якоби* дает лишь необходимое условие вылета звезды из скопления, которое не является достаточным.

На рисунке 1 представлен результат численного интегрирования системы (2) (для плоского случая). Всего рассчитано 755958 орбит, из которых 499497 покинули скопление к моменту



**Рис. 2.** Диаграммы Линдблада и доли улетающих звезд для значений  $a = 0.1, 0.2, 0.3$  (верхний ряд),  $0.4, 0.5, 0.6$  (средний ряд),  $0.7, 0.8, 0.9$  (нижний ряд),  $\gamma = 1.28$

окончания интегрирования. «Тепловая карта» отображает диаграмму Линдблада с областями, интенсивность окраски которых зависит от отношения оставшихся звезд в скоплении к общему количеству рассчитанных орбит (белый означает, что все звёзды остаются связанными со скоплением, черный — все звёзды покидают скопление). Большинство орбит, соответствующих *потенциальной яме* ( $E < -1$ ), и часть орбит с обратными движениями ( $h < 0$ ) остаются связанными со скоплением, в то время как практически все прямые орбиты покидают его.

Рассмотрим, как будет изменяться динамика звезд при изменении структурного параметра  $a$ . Для этого будем варьировать значение структурного параметра потенциала Шустера–Пламмера  $a = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ . Рисунок 2 иллюстрирует результаты расчета покрытия для различных значений параметра модели потенциала  $a$ . Видно, что существенно картина не изменилась. По-прежнему наиболее устойчивыми являются орбиты звезд, соответствующие значениям интеграла энергии  $E < -1$ . Обратные орбиты также являются более устойчивыми по сравнению с их прямыми отражениями.

**7. Выводы.** Рассчитано более 7.5 млн различных вариантов орбит для модели потенциала Шустера–Пламмера (5) на околосолнечном расстоянии. Анализируя результаты расчета, можно сделать следующие выводы и наблюдения:

- Наиболее устойчивыми являются орбиты с обратными движениями.
- Наблюдается устойчивая *потенциальная яма*  $E < -1$  такая, что практически все звёзды остаются связанными со скоплением. Причиной является устойчивость центра скопления как точки либрации системы [2].
- Звёзды, покидающие скопление, преимущественно двигаются по спиральным орбитам вдоль траектории движения скопления вокруг Галактики.

Не следует переоценивать значение задачи Бока для динамики реальных скоплений: задача рассматривается не самосогласованной, потенциал скопления считается неизменным во времени, другие воздействия на орбиты звезд не учитываются. Вместе с тем мы считаем, что обстоятельное исследование задачи Бока необходимо перед последующим анализом более реалистичных моделей.

Важным представляется обобщение теории для случая, когда орбита скопления является некруговой. Т. С. Кожанов [4] аналитически исследовал динамику скопления, движущегося по кеплеровскому эллипсу. Тем самым предполагается, что Галактика притягивает как точечная масса. Численно подобную модель исследовал Анжелетти с соавторами [5]. Подобную задачу также рассматривал Рупрехт [6]. Мы рассматривали более общие модели, предварительные результаты представлены в статье [7].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bok V.J. The stability of moving clusters // Harvard Obs. Circulars. 1934. Vol. 8. № 384. P. 1–41.
2. Осипков Л.П. Точки либрации в задаче Бока // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. № 3. С. 62–70.
3. Осипков Л.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах звездной динамики // Математические методы исследования космических систем. Санкт-Петербург: Изд. КМУ физического факультета СПбГУ, 2003. С. 73–131.
4. Кожанов Т.С. Устойчивость звездных скоплений, вращающихся по эллиптическим орбитам в поле приливных сил Галактики // Вопросы небесной механики и звездной динамики. Алма-Ата: Наука, 1990. С. 97–107.
5. Angeletti L., Giannone P. Stability of star clusters as galactic satellites // Astron. Astrophys. 1983. Vol. 121. № 2. P. 183–189.
6. Ruprecht J. The stability of galactic clusters, moving along an elliptical orbit // Bulletin of the Astronomical Institute of Czechoslovakia. 1955. Vol. 6. P. 134.
7. Davydenko A.A., Ossipkov L.P. On the cluster dynamics in the Galactic field // Astronomical Society of the Pacific. Conference Series. 2004. Vol. 316. P. 186–188.

Поступила в редакцию 22.01.2013

Давыденко Александр Александрович, старший преподаватель, кафедры космических технологий и прикладной астродинамики, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., 35.  
E-mail: alexandravydenko@yandex.ru

**A. A. Davydenko****Numerical solving Bok's problem**

*Keywords:* stellar dynamics, star clusters, Bok's problem, numerical simulations, Lindblad's diagram.

Mathematical Subject Classifications: 85A05, 70F15

We numerically investigate the orbits of star cluster moving in the plane of the Galaxy in a circular orbit (Bok's problem). Shuster–Plummer model is used as a model of the potential of the cluster. We examine the impact of initial conditions on the star movements, in particular on the star opportunity to fly out of the cluster. The mass calculation of star orbits for various initial values of energy and momentum with respect to the cluster is carried out. The probabilities for a star to leave a cluster are estimated.

## REFERENCES

1. Bok B.J. The stability of moving clusters, *Harvard Obs. Circulars*, 1934, vol. 8, no. 384, pp. 1–41.
2. Ossipkov L.P. Libration points for Bok's problem, *Vestn. St-Peterbg. Univ., Ser. 10, Prikl. Mat. Inf. Prots. Upr.*, 2007, no. 3, pp. 62–70.
3. Ossipkov L.P. Ordinary differential equations in the problems of stellar dynamics, *Matematicheskie metody issledovaniya kosmicheskikh sistem*, St-Petersburg: St-Peterbg. Univ., 2003, pp. 73–131.
4. Kozhanov T.S. Stability of star clusters moving over the elliptical orbits in the Galactic tidal field, *Voprosy nebesnoi mekhaniki i zvezdnoi dinamiki*, Alma-Ata: Nauka, 1990, pp. 97–107.
5. Angeletti L., Giannone P. Stability of star clusters as galactic satellites, *Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 121, no. 2, pp. 183–189.
6. Ruprecht J. The stability of galactic clusters, moving along an elliptical orbit, *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 1955, vol. 6, p. 134.
7. Davydenko A.A., Ossipkov L.P. On the cluster dynamics in the Galactic field, *Astronomical Society of the Pacific. Conference Series*, 2004, vol. 316, pp. 186–188.

Received 22.01.2013

Davydenko Aleksandr Aleksandrovich, Senior Lecturer, Department of Space Technologies and Applied Astrodynamics, St. Petersburg State University, Universitetskii prosp., 35, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia.

E-mail: alexandravydenko@yandex.ru