УДК 517.956.223

© *А. В. Неклюдов*

О РЕШЕНИЯХ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

В полубесконечном цилиндре рассматривается поведение решений уравнения Лапласа, удовлетворяющих на боковой поверхности Г цилиндра третьему краевому условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u\right)\Big|_{\Gamma} = 0,$$

где $\beta(x) \geqslant 0$. Показано, что любое ограниченное решение на бесконечности стабилизируется к некоторой постоянной, обладая при этом конечным интегралом Дирихле. Получены условия убывания в бесконечности коэффициента $\beta(x)$ при u в граничном условии, при которых поведение решений близко к поведению решений задачи Дирихле (дихотомия решений, стремление ограниченного решения к 0) либо задачи Неймана (трихотомия решений, стремление ограниченных решений к постоянной, вообще говоря отличной от 0). Основное условие, определяющее близость третьей краевой задачи к задаче Дирихле либо Неймана, получено в терминах соответственно бесконечности или конечности интеграла $\int_{\Gamma} x_1\beta(x)\,dS$, где переменная x_1 соответствует направлению оси цилиндра.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, третья краевая задача, дихотомия решений, трихотомия решений, стабилизация.

Введение

Поведение решений эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических или близких к ним областях при заданных на боковой поверхности цилиндра условиях Дирихле, Неймана или периодичности по всем переменным, кроме одной, хорошо изучено [1–3]. Методы [3] применялись также к задаче Неймана для системы уравнений теории упругости [4] и эллиптических уравнений высших порядков [5]. Вопрос о поведении решения, удовлетворяющего на боковой части границы области третьему краевому условию, изучен значительно меньше. В [6, 7] изучалась скорость убывания решений третьей краевой задачи для уравнения Лапласа при условии принадлежности самого решения и его первых производных пространству L^2 в неограниченной области цилиндрообразного вида. В настоящей работе поведение решений третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области изучается методом энергетических оценок [3–5], а также методом барьерных функций. Основное внимание уделено зависимости свойств решений от поведения неотрицательного коэффициента $\beta(x)$ в граничном условии. В настоящей работе показано, что любое ограниченное решение стремится на бесконечности к некоторой постоянной. Получены условия на $\beta(x)$ типа не слишком быстрого вырождения в бесконечности, при которых эта постоянная равна 0 для любого ограниченного решения, что соответствует поведению решений задачи Дирихле. Оценена скорость сходимости ограниченных решений к постоянной в зависимости от поведения $\beta(x)$ в бесконечности. Также рассмотрен вопрос о возможном поведении произвольных решений. Установлено, что при достаточно быстром убывании $\beta(x)$ в бесконечности поведение решений аналогично поведению решений задачи Неймана [1–3], а именно — решения ведут себя одним из трех возможных способов — стремятся к постоянной, либо экспоненциально растут по максимуму модуля на сечении цилиндра, либо линейно растут на бесконечности (трихотомия решений). В других случаях, так же как и для задачи Дирихле, имеет место дихотомия решений — исключается промежуточный случай линейного роста.

§ 1. Основные обозначения и определения

В n-мерном цилиндре $\Omega = (0, +\infty) \times \widehat{\Omega}$ рассматривается уравнение Лапласа:

$$\Delta u \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \widehat{x}) \in \mathbf{R}_x^n$, $\widehat{\Omega}$ — ограниченная область из $\mathbf{R}_{\widehat{x}}^{n-1}$, граница которой принадлежит классу Гельдера $C^{2,\varkappa}$ для некоторого $\varkappa > 0$. На боковой поверхности цилиндра $\Gamma = (0, +\infty) \times \partial\widehat{\Omega}$ задано третье краевое условие (оно же условие Робена, условие Фурье):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x) u \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $\partial u / \partial \nu$ — производная по направлению внешней нормали $\overline{\nu} = (0, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ к Γ, $\beta(x) \geqslant 0$ на Γ.

Введем следующие обозначения: $\Omega(a,b) = \Omega \cap \{x:\ a < x_1 < b\}$, $\Gamma(a,b) = \Gamma \cap \{x:\ a < x_1 < b\}$, $S_t = \{x : x_1 = t,\ \widehat{x} \in \widehat{\Omega}\}$, $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $m_0 = \operatorname{mes}_{n-1}\widehat{\Omega}$, $\overline{u}(t) = m_0^{-1} \int_{S_t} u \, d\widehat{x}$.

Будем предполагать, что $\beta \in C^{1,\varkappa}(\Gamma(0,t))$ для всех $t > 0$. Под решениями задачи (1)–(2) в Ω будем понимать классические решения $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$; соответственно решения (1)–(2) в ограниченном цилиндре вида $\Omega(a,b)$ предполагаются принадлежащими $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega(a,b)})$.

§ 2. Вспомогательные оценки

Лемма 1. *Пусть $u \in C^2(\Omega_t) \cap C^1(\overline{\Omega_t})$ — решение уравнения (1) в Ω_t, $(\partial u/\partial \nu)|_{\Gamma_t} = \psi(x)$, где $\Omega_t = \Omega(t - 1/4, t + 1/4)$, $\Gamma_t = \Gamma(t - 1/4, t + 1/4)$. Тогда для всех $t \geqslant 1/2$ справедлива оценка*

$$\sup_{S_t} u^2 \leqslant C_0 \left(\int_{\Omega_t} u^2 \, dx + \sup_{\Gamma_t} \psi^2 \right),$$

$C_0 = \mathrm{const} > 0$ зависит только от $\widehat{\Omega}$.

Доказательство. Пусть ω_t — область с границей класса C^2, $\Omega_t \subset \omega_t \subset \Omega(t - 1/2, t + 1/2)$, $\partial\omega_t \cap \Gamma = \Gamma_t$. Продолжим функцию ψ на всю границу ω_t так, что $\psi \in C(\partial\omega_t)$, $\int_{\partial\omega_t} \psi \, dS = 0$, $\sup_{\partial\omega_t} |\psi| \leqslant c_0 \sup_{\Gamma_t} |\psi|$. Здесь и далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от t. Пусть $v(x)$ — решение уравнения (1) в ω_t, удовлетворяющее граничному условию Неймана $(\partial v/\partial \nu)|_{\partial\omega_t} = \psi$. Можно считать, что $\int_{\omega_t} v \, dx = 0$. Справедлива [8, с. 92] оценка

$$\sup_{\omega_t} |v| \leqslant c_1 \sup_{\partial\omega_t} |\psi| \leqslant c_2 \sup_{\Gamma_t} |\psi|. \tag{3}$$

Так как $u - v$ — решение (1) в Ω_t, удовлетворяющее на Γ_t однородному условию Неймана, то [3]

$$\sup_{S_t} (u - v)^2 \leqslant c_3 \int_{\Omega_t} (u - v)^2 \, dx \leqslant c_4 \left(\int_{\Omega_t} u^2 \, dx + \sup_{\omega_t} v^2 \right).$$

Учитывая (3), получим требуемую оценку для $|u|$. □

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — решение (1)–(2) в Ω, $\beta \geqslant 0$ на Γ. Тогда для произвольной постоянной C и всех $t \geqslant 1/2$ справедлива оценка*

$$\sup_{S_t} (u - C)^2 \leqslant C_0 \left(\int_{\Omega(t-1/2, t+1/2)} (u - C)^2 \, dx + \sup_{\Gamma(t-1/2, t+1/2)} \beta^2 \int_{\Omega(t-1/2, t+1/2)} u^2 \, dx \right),$$

где постоянная C_0 зависит только от $\widehat{\Omega}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя лемму 1 к функции $u - C$, получим

$$\sup_{S_t}(u-C)^2 \leqslant c_1\Big(\int_{\Omega(t-1/4,t+1/4)}(u-C)^2\,dx + \sup_{\Gamma(t-1/4,t+1/4)}(\beta u)^2\Big). \tag{4}$$

Из граничного условия (2) и неотрицательности $\beta(x)$ следует [9, с. 228–232], что

$$\sup_{\Omega(t-1/4,t+1/4)} u^2 \leqslant c_2\int_{\Omega(t-1/2,t+1/2)} u^2\,dx. \tag{5}$$

Тогда из (4)–(5) получаем утверждение леммы. □

§ 3. Поведение ограниченных решений

Лемма 3. *Пусть* $u(x)$ *— ограниченное в* Ω *решение* (1)–(2), $\beta \geqslant 0$ *на* Γ. *Тогда для всех* $t \geqslant 0$

$$\int_{\Omega(t,\infty)}|\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma(t,\infty)}\beta u^2\,dS = -\int_{S_t} u\frac{\partial u}{\partial x_1}d\widehat{x},$$
$$\int_{S_t} u^2 d\widehat{x} \to K = \mathrm{const}, \quad t\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно первой формуле Грина, для гармонических функций имеем при $0 \leqslant a < b < \infty$

$$\int_{\Omega(a,b)}|\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma(a,b)}\beta u^2\,dS = \int_{S_b} u\frac{\partial u}{\partial x_1}d\widehat{x} - \int_{S_a} u\frac{\partial u}{\partial x_1}d\widehat{x}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что функция

$$F(t) \equiv \int_{S_t} u\frac{\partial u}{\partial x_1}d\widehat{x} \equiv \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{S_t} u^2 d\widehat{x}$$

является неубывающей, причем из ограниченности u следует, что $F(t) \leqslant 0$. Таким образом, $F(t)\to 0$, $t\to\infty$. Полагая в (6) $a = t$ и устремляя b к ∞, получим первое утверждение леммы. Так как $F(t)\leqslant 0$, то $\int_{S_t} u^2 d\widehat{x} \to K \geqslant 0$, $t\to\infty$. □

Теорема 1. *Пусть* $u(x)$ *— ограниченное в* Ω *решение* (1)–(2), $\beta \geqslant 0$ *на* Γ. *Тогда для некоторого* $C = \mathrm{const}$

$$\int_{\Omega(t,t+1)}(u-C)^2\,dx \to 0, \quad t\to\infty.$$

Если также выполнено условие $\beta(x)\to 0$ *при* $x_1\to\infty$ *равномерно по* $\widehat{x}\in\partial\widehat{\Omega}$, *либо если* $C = 0$, *то*

$$\sup_{\Omega(t,t+1)}|u-C| \to 0, \quad t\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из ограниченности u и леммы 3 следует, что $||u-C||_{L^2(\Omega(t_k,t_k+1))}\to 0$ при $k\to\infty$ для некоторой последовательности $t_k\to\infty$ и постоянной C, причем $m_0C^2 = K = \lim\limits_{t\to\infty}\int_{S_t} u^2 d\widehat{x}$. Отсюда легко следует, что $||u-C||_{L^2(\Omega(t,t+1))}\to 0$ при $t\to\infty$. Утверждение леммы относительно равномерного стремления u к C следует из леммы 2 и оценки (5). □

§ 4. Случай, близкий к задаче Дирихле: стремление ограниченных решений к 0 и дихотомия решений

Теорема 2. *Пусть неотрицательная на* Γ *функция* $\beta(x)$ *удовлетворяет одному из двух следующих условий:*

1) $\beta(x) \geqslant \beta_0 = \mathrm{const} > 0$ *на* Γ;

2) $\displaystyle\int_\Gamma x_1\beta(x)\,dS = \infty$ *и* $\beta(x) \to 0$ *при* $x_1 \to \infty$ *равномерно по* $\widehat{x} \in \partial\widehat{\Omega}$.

Тогда для любого ограниченного в Ω *решения* (1)–(2)

$$\sup_{S_t} |u(x)| \to 0, \quad t \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие 1. Тогда в силу оценки (5), стандартной оценки нормы L^2 и леммы 3 получаем

$$\sup_{S_t} u^2 \leqslant c_0 \int_{\Omega(t-1/2,t+1/2)} u^2\,dx \leqslant c_1 \left(\int_{\Omega(t-1/2,t+1/2)} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma(t-1/2,t+1/2)} u^2\,dS \right) \to 0.$$

Пусть выполнено условие 2. Очевидно, что

$$\int_\Omega x_1 |\nabla u|^2\,dx + \int_\Gamma x_1 \beta u^2\,dS = \int_0^\infty dt \left(\int_{\Omega(t,\infty)} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma(t,\infty)} \beta u^2\,dS \right).$$

Тогда из леммы 3 получаем, что

$$\int_\Gamma x_1 \beta u^2\,dS \leqslant -\int_0^\infty dt \int_{S_t} u \frac{\partial u}{\partial x_1} d\widehat{x} \leqslant \frac{1}{2} \int_{S_0} u^2\,d\widehat{x} < \infty. \tag{7}$$

Согласно теореме 1, $u \to C$ при $x_1 \to \infty$ равномерно по $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$. Тогда из (7) следует, что $C = 0$.

Следующие три леммы представляет из себя разные варианты принципа сравнения решений, соответствующих разным коэффициентам в граничном условии (2).

Лемма 4. *Пусть* $u(x), v(x)$ *— решения уравнения* (1) *в* $\Omega(a,b)$, *удовлетворяющие соответственно условиям*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x) u \right)\Big|_{\Gamma(a,b)} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + \beta_1(x) v \right)\Big|_{\Gamma(a,b)} = 0, \tag{8}$$

причем $\beta(x) \geqslant \beta_1(x)$ *на* $\Gamma(a,b)$, $\beta(x) \geqslant 0$ *на* $\Gamma(a,b)$, $u(x) \leqslant M + v(x)$ *на* $S_a \cup S_b$, $M = \mathrm{const} \geqslant 0$, $v(x) \geqslant 0$ *в* $\Omega(a,b)$. *Тогда* $u(x) \leqslant M + v(x)$ *в* $\Omega(a,b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть $\sup\limits_{\Omega(a,b)} (u - M - v) = \delta > 0$. Согласно принципу максимума, $u(x') - M - v(x') = \delta$ для некоторого $x' \in \Gamma(a,b)$, причем, по лемме о нормальной производной [10], $\partial u(x')/\partial\nu - \partial v(x')/\partial\nu > 0$. Но согласно условиям леммы, $\partial u(x')/\partial\nu - \partial v(x')/\partial\nu = -\beta(x')u(x') + \beta_1(x')v(x') = -\beta(x')(u(x') - v(x')) - (\beta(x') - \beta_1(x'))v(x') \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Лемма 5. *Пусть* $u(x), v(x)$ *— решения уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющие граничным условиям* (8) *на* Γ, $\beta(x) \geqslant \beta_1(x)$ *на* Γ, $\beta(x) \geqslant 0$ *на* Γ, $u(x) \to 0$ *при* $x_1 \to \infty$ *равномерно по* $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$; $v(x) > 0$ *в* $\overline{\Omega}$. *Тогда* $|u(x)| \leqslant C_0 v(x)$ *в* Ω, $C_0 = \mathrm{const} > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b_0(\varepsilon)$, что для всех $b \geqslant b_0(\varepsilon)$ на $S_0 \cup S_b$ справедлива оценка $u(x) \leqslant C_0 v(x) + \varepsilon$, $C_0 > 0$ не зависит от ε. По лемме 4, $u(x) \leqslant C_0 v(x) + \varepsilon$ в $\Omega(0,b)$. Устремляя ε к 0, получим, что $u(x) \leqslant C_0 v(x)$ в Ω. Аналогично получаем оценку для $(-u)$. Отметим, что C_0 зависит только от $\inf\limits_{S_0} v$ и $\sup\limits_{S_0} |u|$. □

Лемма 6. *Пусть $u(x), v(x)$ — решения уравнения (1) в Ω, удовлетворяющие граничным условиям (8) на Γ, $\beta(x) \geqslant \beta_1(x)$ на Γ, $\beta(x) \geqslant 0$ на Γ, $v(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$, $u(x) = o(v(x))$ при $x_1 \to \infty$. Тогда $|u(x)| \leqslant M_0$ в Ω, где $M_0 = \sup\limits_{S_0} |u(x)|$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условий леммы следует, что $u(x) \leqslant M_0 + \varepsilon v(x)$ на $S_0 \cup S_b$ для всех $b \geqslant b_0(\varepsilon)$. Согласно лемме 4, $u(x) \leqslant M_0 + \varepsilon v(x)$ в $\Omega(0, b)$. Устремляя ε к 0, получаем, что $u(x) \leqslant M_0$ в Ω. Заменяя u на $(-u)$, получим $-u \leqslant M_0$, что и доказывает лемму. □

При рассмотрении вопроса о дихотомии решений ограничимся случаем, когда поведение коэффициента $\beta(x)$ описывается степенными функциями от x_1. Рассмотрим сначала случай, наиболее близкий задаче с условием Дирихле на Γ [3]. Пусть $2R$ — наименьшее ребро параллелепипеда в $\mathbf{R}^{n-1}_{\widehat{x}}$, в который можно вписать область $\widehat{\Omega}$. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{\Omega} \subset \{\widehat{x} : -R < x_2 < R\}$.

Теорема 3. *Пусть $\beta(x) \geqslant \beta_0 = \mathrm{const} > 0$ на Γ. Тогда существует постоянная $A > 0$, зависящая только от R и β_0, такая, что для любого решения (1)–(2) $u(x)$, удовлетворяющего условию $|u(x)| = o(\exp(Ax_1))$ при $x_1 \to \infty$, в Ω справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant c\exp(-Ax_1), \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Пусть A — корень уравнения $A\,\mathrm{tg}\,(RA) = \beta_0$, $0 < A < \pi/(2R)$. Рассмотрим решение $v(x) = \exp(Ax_1)\cos Ax_2$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $(\partial v/\partial\nu + \beta_1 v)|_\Gamma = 0$, где $\beta_1(x) = A\nu_2\,\mathrm{tg}\,(Ax_2) \leqslant \beta_0 \leqslant \beta(x)$. Применяя к функциям u и v лемму 6, получим, что u ограничена в Ω. Согласно теореме 2, $u(x) \to 0$ при $x_1 \to \infty$ равномерно по $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$. Решение $v_1(x) = \exp(-Ax_1)\cos Ax_2$ уравнения (1) удовлетворяет на Γ тому же граничному условию, что и $v(x)$. Применяя к u и v_1 лемму 5, получим требуемую оценку для $u(x)$. □

Теорема 4. *Пусть $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-\alpha}$ на Γ, $\alpha = \mathrm{const}$, $0 < \alpha < 2$, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$, $\lim\limits_{x_1\to\infty} \beta(x) = 0$ равномерно по $\widehat{x} \in \partial\widehat{\Omega}$. Тогда существует постоянная $A > 0$, зависящая только от R, β_0 и α, такая, что для любого решения $u(x)$ задачи (1)–(2), удовлетворяющего для некоторого $A_1 \in (0, A)$ условию $|u(x)| \leqslant c_0 \exp\{A_1 x_1^{1-\alpha/2}\}$, $c_0 = \mathrm{const} > 0$, справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant c\exp\{-Ax_1^{1-\alpha/2}\}, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Пусть $A = \sqrt{\beta_0}/(\lambda\sqrt{R})$, где $\lambda = 1 - \alpha/2 > 0$, $A_1 < A_2 < A$. Рассмотрим решение $v(x) = \exp\{A_2 r^\lambda \cos\lambda\varphi\}\cos\{A_2 r^\lambda \sin\lambda\varphi\} = \mathrm{Re}(\exp\{A_2 z^\lambda\})$ уравнения (1), где $z = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}$, $|\varphi| < \pi/2$; $v(x) > 0$ для достаточно больших x_1. Функция $v(x)$ удовлетворяет условию $(\partial v/\partial\nu + \beta_1 v)|_\Gamma = 0$, где $\beta_1(x) \sim A_2^2\lambda^2 x_2\nu_2 x_1^{-\alpha}$ при $x_1 \to \infty$. Таким образом, $\beta_1(x) < \beta_0 x_1^{-\alpha} \leqslant \beta(x)$ на $\Gamma(a, \infty)$ для достаточно большого a. Применяя к решениям u и v в области $\Omega(a, \infty)$ лемму 6, получаем, что u ограничена в этой области. Согласно теореме 2, $u(x) \to 0$ при $x_1 \to \infty$ равномерно по $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим решение $v_1(x) = \exp\{-(A-\varepsilon)r^\lambda\cos\lambda\varphi\}\cos\{(A-\varepsilon)r^\lambda\sin\lambda\varphi\}$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $(\partial v_1/\partial\nu + \beta_1' v_1)|_\Gamma = 0$, где $\beta_1'(x) \sim (A-\varepsilon)^2\lambda^2 x_2\nu_2 x_1^{-\alpha} < \beta_0 x_1^{-\alpha} \leqslant \beta(x)$ на $\Gamma(a, \infty)$. Применяя к u и v_1 лемму 5, получим, что $|u(x)| \leqslant cv_1(x)$, причем c зависит только от $\inf\limits_{S_a} v$ и $\sup\limits_{S_a} |u|$. Устремляя ε к 0, получим утверждение теоремы. □

Теорема 5. *Пусть $\beta(x) \geqslant \beta_0 x_1^{-2}$ на Γ, $\beta_0 = \mathrm{const} > 0$, $\lim\limits_{x_1\to\infty} \beta(x) = 0$ равномерно по $\widehat{x} \in \partial\widehat{\Omega}$. Тогда существуют постоянные $\mu_0 > 1$ и $\mu_1 > 0$, зависящие от R и β_0, такие, что для любого решения $u(x)$ (1)–(2), удовлетворяющего в Ω условию $|u(x)| \leqslant c_0(1 + x_1)^{\mu_0-\varepsilon}$, $c_0, \varepsilon = \mathrm{const} > 0$, в Ω справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant c_1(1 + x_1)^{-\mu_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть μ_0 — корень уравнения $\mu(\mu-1)R = \beta_0$, $\mu_0 > 1$. Рассмотрим функцию $v(x) = r^\mu \cos\mu\varphi$, где $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0)$, $\mu > 1$. Для $v(x)$ выполнены условия леммы 6 с функцией $\beta_1(x) \sim \mu(\mu-1)x_2\nu_2 x_1^{-2} < \beta_0 x_1^{-2} \leqslant \beta(x)$ для достаточно больших x_1. Согласно лемме 6, $u(x)$ ограничена. По теореме 2, $u(x) \to 0$ при $x_1 \to \infty$ равномерно по $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$. Пусть μ_1 — корень уравнения $\mu(\mu+1)R = \beta_0$, $\mu > 0$. Тогда для любого $\mu \in (0, \mu_1)$ функция $v_1(x) = r^{-\mu}\cos\mu\varphi$ удовлетворяет условиям леммы 5 с граничным коэффициентом $\beta_1'(x) \sim \mu(\mu+1)x_2\nu_2 x_1^{-2} < \beta_0 x_1^{-2} \leqslant \beta(x)$. Применив лемму 5 и устремив μ к μ_1, получим нужную оценку. $\square$

§ 5. Случай, близкий к задаче Неймана: стремление ограниченных решений к постоянной, трихотомия решений

Рассмотрим поток гармонической функции u через сечение S_t цилиндра Ω:

$$P(t,u) = \int_{S_t} \frac{\partial u}{\partial x_1}\, d\widehat{x}.$$

Лемма 7. *Пусть $\beta \geqslant 0$ на Γ, $\int_\Gamma \beta\, dS < \infty$. Тогда для любого ограниченного в Ω решения (1)–(2) и любого $t \geqslant 0$*

$$P(t,u) = -\int_{\Gamma(t,+\infty)} \beta u\, dS.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы о потоке тепла для гармонических функций получаем для $0 \leqslant t < T$

$$P(T,u) - P(t,u) = \int_{\Gamma(t,T)} \beta u\, dS. \tag{9}$$

Отсюда с учетом ограниченности u получаем, что $P(T,u) \to 0$, $T \to \infty$. Устремив в (9) T к ∞, получим утверждение леммы. $\square$

Теорема 6. *Пусть $0 \leqslant \beta(x) \leqslant \beta_1 x_1^{-\alpha}$ на Γ, $\alpha = \mathrm{const} > 2$, $\beta_1 = \mathrm{const} > 0$. Тогда для любого ограниченного решения u задачи (1)–(2), всех $t > 1$ и некоторого $C = \mathrm{const}$ справедлива оценка*

$$\sup_{S_t} |u - C| \leqslant ct^{-\alpha/2+1}, \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3 и неравенству Пуанкаре,

$$J(t) \equiv \int_{\Omega(t,\infty)} |\nabla u|^2\, dx \leqslant -\int_{S_t} u \frac{\partial u}{\partial x_1} d\widehat{x} =$$
$$= -\int_{S_t} (u - \overline{u}(t)) \frac{\partial u}{\partial x_1} d\widehat{x} - \overline{u}(t)P(t,u) \leqslant -c_1 J'(t) - \overline{u}(t)P(t,u).$$

Используя лемму 7, отсюда получим $J(t) \leqslant -c_1 J'(t) + c_2 t^{-\alpha+1}$, или $\big(J(t)\exp\{c_1^{-1}t\}\big)' \leqslant c_1^{-1}c_2 t^{-\alpha+1}\exp\{c_1^{-1}t\}$. Интегрируя неравенство от 1 до t, получаем

$$J(t) \leqslant J(1)\exp\{-c_1^{-1}(t-1)\} + c_3\exp\{-c_1^{-1}t\}\int_1^t \tau^{-\alpha+1}\exp\{c_1^{-1}\tau\}d\tau \leqslant c_4 t^{-\alpha+1}.$$

Отсюда следует [5], что для некоторой постоянной C и всех $t > 1$

$$\int_{\Omega(t,t+1)} (u - C)^2\, dx \leqslant c_5 t^{-\alpha+2}.$$

Наконец, используя лемму 2, получаем требуемую оценку для $\sup\limits_{S_t} |u - C|$. $\square$

При изучении вопроса о возможном поведении произвольных решений (1)–(2) в случае быстрого убывания коэффициента $\beta(x)$ ключевым является существование решения, ведущего себя при $x_1 \to \infty$ как линейная функция.

Теорема 7. *Пусть* $\beta(x) \geqslant 0$ *на* Γ, $\int_\Gamma x_1\beta\, dS < \infty$, $\beta(x) \to 0$ *при* $x_1 \to \infty$ *равномерно по* $\widehat{x} \in \partial\widehat{\Omega}$. *Тогда в* $\Omega(1,\infty)$ *существует решение* $U(x)$ *задачи* (1)–(2), *удовлетворяющее условиям*

$$U(x) \sim x_1 \quad \text{при} \quad x_1 \to \infty, \quad \lim_{t\to\infty} P(t,U) > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного натурального N в области $\Omega(0,N)$ рассмотрим решение $U_N(x)$ задачи

$$\Delta U_N = 0, \quad U_N|_{S_0} = 0, \quad U_N|_{S_N} = N, \quad \left(\frac{\partial U_N}{\partial \nu} + \beta(x)U_N\right)\bigg|_{\Gamma(0,N)} = 0.$$

Согласно (6), получим

$$\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\, dx + \int_{\Gamma(0,N)} \beta U_N^2\, dS = \int_{S_N} U\frac{\partial U_N}{\partial x_1} d\widehat{x} = NP(N,U_N). \tag{10}$$

Так как $(U_N - x_1)|_{S_0\cup S_N} = 0$, функция $U_N - x_1$ не может иметь положительный максимум на $\Gamma(0,N)$, а функция U_N не может иметь отрицательный минимум на $\Gamma(0,N)$, то в $\Omega(0,N)$ выполнено неравенство

$$0 \leqslant U_N \leqslant x_1. \tag{11}$$

Так как

$$m_0N^2 = \int_{S_N} U_N^2(x)\, d\widehat{x} \leqslant c_1N\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\, dx,$$

то, используя (10), получаем

$$P(N,U_N) \geqslant N^{-1}\int_{\Omega(0,N)} |\nabla U_N|^2\, dx \geqslant c_2 > 0. \tag{12}$$

Так как, согласно (9),

$$P(t,U_N) = P(N,U_N) - \int_{\Gamma(t,N)} \beta U_N\, dS,$$

то из (12) и (11) получаем, что существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \geqslant t_0$ и $N \geqslant t$

$$P(t,U_N) \geqslant c_3 > 0. \tag{13}$$

В дальнейшем будем считать, что $t \geqslant t_0$. Из оценки (11) следует [9, с. 164], что для любого фиксированного $t \geqslant t_0$ последовательность U_N $(N \geqslant t)$ ограничена в $C^{2,\kappa}(\Omega(1,t))$. Выделяя сходящуюся в $C^2(\Omega(1,t))$ к некоторой функции $U(x)$ подпоследовательность и применяя диагональный процесс, получим последовательность U_{N_j}, сходящуюся к U в $C^2(\Omega(1,t))$ для любого $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим свойства полученной функции U. Очевидно, что U удовлетворяет (1)–(2), $0 \leqslant U(x) \leqslant x_1$. Из (13) получаем, что

$$P(t,U) \geqslant c_3 > 0.$$

Тогда, в силу (9), $P(t,U)$ имеет конечный положительный предел при $t \to \infty$. Пронормируем функцию U условием $m_0^{-1}\lim_{t\to\infty} P(t,U) = 1$. Тогда

$$\overline{U}(t) = \overline{U}(1) + m_0^{-1}\int_1^t P(\tau,U)d\tau \sim t, \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Оценим интеграл Дирихле функции U по $\Omega(1,t)$. Из (6) получаем, что

$$I(t) \equiv \int_{\Omega(1,t)} |\nabla U|^2\,dx \leqslant c_4 + \int_{S_t} U\frac{\partial U}{\partial x_1} d\widehat{x} \leqslant c_4 + c_5 t\sqrt{I'(t)},$$

отсюда либо функция $I(t)$ ограничена, либо $I(t) \leqslant c_6 t\sqrt{I'(t)}$. В последнем случае имеем $I'I^{-2} \geqslant c_6^{-2}t^{-2}$; интегрируя от t до T и устремляя T к ∞, получаем

$$\int_{\Omega(1,t)} |\nabla U|^2\,dx \leqslant c_6^2 t. \tag{15}$$

Используя лемму 2, неравенство Пуанкаре и оценки (11), (14), (15), получим при $x \in S_t$

$$|U(x)-t| \leqslant |U(x)-\overline{U}(t)| + |\overline{U}(t)-t| \leqslant c_7\Big(\big(\int_{\Omega(t-1/2,t+1/2)} |\nabla U|^2\,dx\big)^{1/2} +$$
$$+ \big(\int_{\Omega(t-1/2,t+1/2)} U^2\,dx\big)^{1/2} \sup_{\Gamma(t-1/2,t+1/2)} \beta\Big) + o(t) = o(t), \quad t \to \infty,$$

что и доказывает теорему 6. □

Лемма 8. *Пусть $\beta(x) \geqslant 0$ на Γ, $\beta(x) \to 0$ при $x_1 \to \infty$ равномерно по $\widehat{x} \in \partial\widehat{\Omega}$, $u(x)$ — решение (1)–(2), удовлетворяющее для некоторой последовательности $t_k \to \infty$ условию $\sup\limits_{\Omega(t_k,t_k+1)} |u| = o(\exp(At_k))$ при $k \to \infty$, где $A > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от $\widehat{\Omega}$ и $\beta(x)$. Тогда существует последовательность $\widetilde{t}_k \to \infty$, такая, что для всех $x \in S_{\widetilde{t}_k}$, $k \in \mathbf{N}$ и постоянной $c > 0$, зависящей от решения $u(x)$, справедлива оценка*

$$\frac{1}{2}|\overline{u}(\widetilde{t}_k)| - c \leqslant |u(x)| \leqslant \frac{3}{2}|\overline{u}(\widetilde{t}_k)| + c.$$

Доказательство. Пусть $\theta(x_1) \geqslant 0$ — функция класса $C^2(\mathbf{R})$, $\theta(x_1) = 1$ при $x_1 \leqslant t$, $\theta(x_1) = 0$ при $x_1 \geqslant t+1$, $(\theta')^2 \leqslant c_0\theta$, $c_0 = \mathrm{const}$ — не зависит от t. Согласно первой формуле Грина,

$$\int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\theta\,dx + \int_{\Gamma(0,t+1)} \beta u^2\theta\,dS = C_0 - \int_{\Omega(t,t+1)} \theta' u\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx,$$

где $C_0 = -\int_{S_0} u\frac{\partial u}{\partial x_1}\,d\widehat{x}$. Применяя к интегралу по $\Omega(t,t+1)$ неравенство Коши–Буняковского и полагая $t = t_k$, стандартным образом получаем

$$\int_{\Omega(0,t_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_1 + c_2\int_{\Omega(t_k,t_k+1)} u^2\,dx = o(\exp(2At_k)). \tag{16}$$

Зафиксируем $\delta > 0$. Покажем, что если $\exp(2A) \leqslant 1+\delta$, то для некоторой последовательности $t'_k \to \infty$

$$\int_{\Omega(t'_k,t'_k+1)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta\int_{\Omega(0,t'_k)} |\nabla u|^2\,dx. \tag{17}$$

Действительно, в противном случае для произвольного $t \geqslant t_0$

$$\int_{\Omega(t,t+1)} |\nabla u|^2\,dx = \int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\,dx - \int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx > \delta\int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx,$$

откуда получаем, учитывая (16), что

$$\int_{\Omega(0,t)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-1}\int_{\Omega(0,t+1)} |\nabla u|^2\,dx < \ldots < (1+\delta)^{-N_k}\int_{\Omega(0,t+N_k)} |\nabla u|^2\,dx = \\ = (1+\delta)^{-N_k} o(\exp\{2A(t+N_k)\}) \to 0$$

при $k\to\infty$, если брать $t_k - 1 \leqslant t + N_k \leqslant t_k$. Таким образом, $\nabla u \equiv 0$. Итак, справедлива оценка (17). Из (17), (16) и неравенства Пуанкаре получаем

$$\int_{\Omega(t'_k,t'_k+1)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta\Big(c_1 + c_2\int_{\Omega(t'_k,t'_k+1)} u^2\,dx\Big) \leqslant c_3\delta\Big(\int_{\Omega(t'_k,t'_k+1)} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(t'_k+1/2)\Big) + c'_3,$$

где постоянная c_3 не зависит от k и решения $u(x)$, c'_3 зависит от $u(x)$. Если $\delta \leqslant c_3^{-1}/2$, то

$$\int_{\Omega(t'_k,t'_k+1)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant 2c_3\delta(\overline{u}^2(t'_k+1/2)) + 2c'_3. \tag{18}$$

Из леммы 2, неравенства Пуанкаре и (18) получаем при $k \geqslant k_0$

$$\sup_{S_{t'_k+1/2}} (u - \overline{u}(t'_k+1/2))^2 \leqslant c_4\int_{\Omega(t'_k,t'_k+1)} |\nabla u|^2\,dx + \delta\overline{u}^2(t'_k+1/2) \leqslant c_5\delta(\overline{u}^2(t'_k+1/2)) + c'_4,$$

постоянная c_5 не зависит от k и $u(x)$. Таким образом, утверждение леммы справедливо для последовательности $\widetilde{t}_k = t'_k + 1/2$ и $A = \dfrac{1}{2}\ln(1+\delta)$, где $\delta = \min\{c_3^{-1}/2, c_5^{-1}/4\}$. □

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы* 8 *и, кроме того,* $\int_\Gamma x_1\beta\,dS < \infty$. *Тогда для всех* $x_1 \geqslant 1$

$$|u(x)| \leqslant Cx_1, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторой последовательности $t'_k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{S_{t'_k}} \frac{|u|}{t'_k} = \infty. \tag{19}$$

Пусть U — линейно растущее решение (1)–(2) в Ω, существование которого доказано в теореме 6. Применяя к функциям $u \pm c_0U$ при достаточно большом $c_0 > 0$ принцип максимума, легко получим, что из (19) следует, что

$$\sup_{S_t} |u| = \lambda(t)t, \quad \lambda(t) \to +\infty, \quad t\to\infty.$$

Пусть $\widetilde{t}_k$ — последовательность, для которой справедливо утверждение леммы 8. Без ограничения общности можно считать, что $\sup\limits_{S_{\widetilde{t}_k}} u = \lambda(\widetilde{t}_k)\widetilde{t}_k$. Тогда в силу леммы 8 имеем оценку $\inf\limits_{S_{\widetilde{t}_k}} u = \mu_k\widetilde{t}_k$, $\mu_k \to +\infty$, $k\to\infty$. Применяя стандартным образом принцип максимума к функции $U - c_1 - \varepsilon u$ для достаточно большого $c_1 > 0$ и устремляя ε к 0, получим, что $U \leqslant c_1$ в $\Omega(\widetilde{t}_{k_1}, \infty)$, что противоречит линейному росту U. Полученное противоречие показывает, что предположение (19) неверно, что и доказывает лемму. □

Лемма 10. *Пусть выполнены условия леммы* 9 *и, кроме того, выполнено условие* $\lim\limits_{t\to\infty} P(t,u) = 0$. *Тогда* $u(x)$ *ограничена в* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\overline{u}(t) = c_0 + m_0^{-1}\int_0^t P(u,\tau)d\tau = o(t)$ при $t \to \infty$, то в силу леммы 8 для некоторой последовательности $t_k \to \infty$ получим оценку $\sup\limits_{S_{t_k}} |u| = o(t_k)$, то есть $u(x) \leqslant c_0 + \varepsilon U$ на $S_{t_1} \cup S_{t_k}$ при $k > k_0(\varepsilon)$. Применяя принцип максимума и устремляя ε к 0, получим, что $u(x) \leqslant c_0$ для достаточно больших x_1. Аналогично получим оценку снизу. □

Теорема 8 (о трихотомии). *Пусть* $\beta(x) \geqslant 0$ *на* Γ, $\int_\Gamma x_1\beta\, dS < \infty$, $\beta(x) \to 0$ *при* $x_1 \to \infty$ *равномерно по* $\widehat{x} \in \partial\widehat{\Omega}$. *Тогда любое решение* (1)–(2) *ведет себя одним из трех возможных способов:*

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{\Omega(t,t+1)} |u - C| = 0$ *для некоторого* $C = \mathrm{const}$*;*

2) $\sup\limits_{\Omega(t,t+1)} |u| \geqslant C_0 \exp(At)$, *где постоянная* $A > 0$ *зависит от* $\widehat{\Omega}$ *и* $\beta(x)$, $C_0 = \mathrm{const} > 0$*;*

3) $u(x) \sim C_1x_1$ *при* $x_1 \to \infty$, $C_1 = \mathrm{const} \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 9, существует такое $A > 0$, что любое решение задачи (1)–(2), не удовлетворяющее условию 2, удовлетворяет неравенству $|u(x)| \leqslant c_0(x_1 + 1)$. Тогда из (9) следует, что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} P(t,u) = p < \infty$. Тогда для решения (1)–(2) $w \equiv u - pm_0^{-1}U$, где U — линейно растущее решение (1)–(2) из теоремы 6, получим $\lim\limits_{t\to\infty} P(t,w) = 0$, $|w| \leqslant c_2(x_1+1)$ в Ω. Согласно лемме 10, функция w ограничена в Ω. Таким образом, с учетом теоремы 1 получаем, что $u \equiv w + pm_0^{-1}U$ удовлетворяет либо условию 1 при $p = 0$, либо условию 3 при $p \neq 0$. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландис Е.М., Панасенко Г.П. Об одном варианте теоремы типа Фрагмена–Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 1979. Т. 5. С. 105–136.
2. Ландис Е.М., Лахтуров С.С. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений, периодических по всем переменным, кроме одной // ДАН СССР. 1980. Т. 250. № 4. С. 803–806.
3. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Математический сборник. 1980. Т. 112. № 4. С. 588–610.
4. Oleinik O.A., Yosifian G.A. On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1982. Vol. 78. № 1. P. 29–53.
5. Неклюдов А.В. О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру // Труды семинара имени И.Г. Петровского. 1991. Т. 16. С. 192–217.
6. Самайтис К.П. Оценки решений задач Неймана и Робена для уравнения Лапласа в цилиндре // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 7. С. 995–996.
7. Самайтис К.П. Некоторые оценки решений для уравнения Лапласа в цилиндрообразных областях // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1105–1112.
8. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином, 2005. 260 с.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1965, 540 с.
10. Олейник О.А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Математический сборник. 1952. Т. 72. № 3. С. 695–702.

Поступила в редакцию 11.03.2013

Неклюдов Алексей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., 5. E-mail: nekl5@yandex.ru

A. V. Neklyudov

On solutions of third boundary value problem for Laplace equation in a half-infinite cylinder

Keywords: Laplace equation, third boundary value problem, dichotomy of solutions, trichotomy, stablization.

Mathematical Subject Classifications: 35B05, 35J15

We study the asymptotic behavior at the infinity of solutions of the Laplace equation in a half-infinite cylinder providing that third boundary value condition is met

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u\right)\Big|_{\Gamma} = 0,$$

where Γ is the lateral surface of the cylinder; $\beta(x) \geqslant 0$. We prove that any bounded solution is stabilized to some constant and its Dirichlet integral is finite. We describe a condition on boundary coefficient decrease at infinity which provides Dirichlet (dichotomy, stabilization to zero) or Neumann (trichotomy, stabilization to some constant which can be nonzero) problem type behavior of solutions. The main condition on boundary coefficient leading to Dirichlet or Neumann problem type is established in terms of divergence or convergence correspondingly of the integral $\int_{\Gamma} x_1\beta(x)\,dS$, where the variable x_1 corresponds to the direction of an axis of the cylinder.

REFERENCES

1. Landis E.M., Panasenko G.P. On a variant of theorem of Phragmen–Lindelef type for elliptic equations with coefficients that are periodic in all variables but one, *Tr. Semin. Im. I.G. Petrovskogo*, 1979, vol. 5, pp. 105–136.

2. Landis E.M., Lakhturov S.S. Behavior at infinity of solutions to elliptic equations that are periodic in all variables but one, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 250, no. 4, pp. 803–806.

3. Oleinik O.A., Iosif'yan G.A. On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations in domains with noncompact boundary, *Mat. Sb.*, vol. 112, no. 4, pp. 588–610.

4. Oleinik O.A., Yosifian G.A. On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1982, vol. 78, no. 1, pp. 29–53.

5. Neklyudov A.V. On the Neumann problem for higher-order divergent elliptic equations in an unbounded domain, close to a cylinder, *Tr. Semin. Im. I.G. Petrovskogo*, 1991, vol. 16, pp. 192–217.

6. Samaitis K.P. Estimates for solutions of the Neumann and Robin problems for the Laplace equation in a cylinder, *Differ. Uravn.*, 2002, vol. 38, no. 7, pp. 995–996.

7. Samaitis K.P. Some estimates for solutions of the Laplace equation in cylinder-like domains, *Differ. Uravn.*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 1105–1112.

8. Oleinik O.A. *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi* (Lectures on partial differential equations), Moscow: Binom, 2005, 260 p.

9. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of elliptic type), Moscow: Nauka, 1965, 540 p.

10. Oleinik O.A. On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type, *Mat. Sb.*, 1952, vol. 72, no. 3, pp. 695–702.

Received 11.03.2013

Neklyudov Aleksei Vladimirovich, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005, Russia.
E-mail: nekl5@yandex.ru