

УДК 531.011:531.8

© *В. Н. Иванов, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, Н. А. Шевелев, В. А. Шимановский*

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ТВЁРДЫХ ТЕЛ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ¹

Представлена классификация форм уравнений динамики систем связанных твёрдых тел со структурой дерева. В основе классификации – компактные матричные формы записи уравнений кинематики и динамики систем тел, полученные с использованием понятия матрицы кинематической структуры и геометрического подхода при описании относительного движения. Единая форма записи уравнений движения удобна для представления и сравнения различных подходов к моделированию динамики систем твёрдых тел. Приведён сравнительный анализ вычислительной эффективности различных методов составления и разрешения уравнений движения систем твёрдых тел.

Ключевые слова: динамика систем твёрдых тел, численные методы, матричные вычисления.

Введение

Компьютерное моделирование динамики механических систем широко используется в современной инженерной практике. Оно позволяет существенно уменьшить объем натурных испытаний и, в конечном счёте, сократить время и стоимость новых разработок. В связи с этим существует большое количество работ, посвященных данной тематике [2–10, 13, 14].

Кроме того, в настоящее время разработаны и уже широко используются для проведения полного комплекса моделирования, исследований и расчётов различные программные продукты, такие как «Универсальный механизм–UM» [11], «ФРУНД» [12], «EULER» [15], «MSC.ADAMS» [1] и другие.

При исследовании динамики поведения технических механических систем в качестве математической модели часто используют систему связанных абсолютно твёрдых тел. Требование точности компьютерного моделирования заставляет увеличивать число тел, на которые разбивается механическая система. В то же время с ростом размерности математической модели увеличивается и трудоёмкость моделирования. Особенно заметное время затрачивается на стадии проектирования технических устройств, когда приходится проводить многократные вычислительные эксперименты для расчёта динамического поведения различных вариантов конструкции в различных условиях эксплуатации.

В статье рассматриваются различные матричные методы формирования уравнений движения механических систем большой размерности, расчётная схема которых может быть представлена в виде связки абсолютно твёрдых тел со структурой дерева. Эти методы сравниваются по эффективности с точки зрения числа операций на одном шаге интегрирования.

§ 1. Описание структуры механической системы

Описание структуры взаимосвязей механической системы дает полную информацию о том, какие тела системы соединены шарнирами. Физические свойства шарниров в описание не включаются. Поэтому для решения этой задачи можно воспользоваться основными понятиями и некоторыми результатами теории графов [5, 8].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11–01–96024-р_Урал_а).

Рассмотрим систему из N абсолютно твёрдых тел со структурой дерева. Если эта система связана с внешним телом, движение которого задано как функция времени, то без ограничения общности можно предположить, что она связана с ним только одним шарниром. Если, с другой стороны, рассматриваемая система тел не связана с внешним телом, совершающим заданное движение, то всегда можно предполагать наличие фиктивного тела и фиктивного шарнира между ним и одним из тел системы. Таким образом, в любом случае всегда существует основание, движение которого относительно инерциального пространства задается функциями времени, и это основание связано шарниром с одним из тел системы. В дальнейшем это тело будем отмечать номером нуль.

Следуя [5], рассматриваемой системе твёрдых тел сопоставим граф, вершины которого символизируют тела системы, а ребра – шарниры. Очевидно, что граф системы также будет иметь структуру дерева. Следует отметить, что между системой твёрдых тел и изображающим её графом существует полный дуализм, то есть все понятия введённые для характеристики графа в равной степени относятся также и к системе тел. Вершину, представляющую тело «0» обозначим символом s_0 . Остальные вершины и дуги обозначим через s_1, \dots, s_N и u_1, \dots, u_N соответственно.

Важную роль при моделировании систем многих тел играют пути, связывающие вершину s_0 с остальными вершинами. Эти пути будут использованы в дальнейшем для определения матриц преобразования координат из системы координат (СК), связанной с данным телом к СК нулевого тела, что необходимо для вычисления различных кинематических и динамических величин, характеризующих данную систему.

Нумерация вершин и дуг графа может быть произвольной, но с точки зрения удобства при вычислениях примем так называемую правильную нумерацию.

Вершины (за исключением отвечающей нулевому телу, которая всегда обозначается нулем) и дуги графа пронумеруем следующим образом: для всех вершин s_i номер дуги, предшествующей s_i ($i \neq 0$), равен i , а номер вершины, предшествующей s_i , меньше i . Вообще говоря, существует множество способов задания нумерации вершин и дуг в графе, удовлетворяющих этим условиям. Например, для произвольного графа с данной вершиной s_0 правильную нумерацию можно получить следующим образом.

Граф содержит по меньшей мере одну граничную вершину, то есть вершину, которая инцидентна только одной дуге (не считая вершину s_0). Присвоим наибольшие номера граничным вершинам графа. Такие же номера присвоим соответствующим предшествующим дугам. Затем отсечем от графа все вершины и дуги, которые уже помечены. В результате получим подграф с новыми граничными вершинами, которым в свою очередь присвоим наибольшие из имеющихся ещё в наличии номеров. Эта рекурсивная процедура продолжается до тех пор, пока не окажутся помеченными все вершины и дуги.

При правильной нумерации индексы дуг монотонно возрастают на каждой простой цепи, выходящей из вершины s_0 , и, кроме того, дуга с номером a может принадлежать только пути между вершиной s_0 и такой вершиной s_i , для которой $i > a$.

Предлагаемый выбор направлений дуг имеет то преимущество, что обобщённые координаты, которые определяются ниже, описывают положение и движение вышестоящих тел, что является более естественным.

Правильная нумерация и специальный выбор направлений дуг позволяют записать простые рекуррентные формулы для вычисления кинематических и динамических характеристик исследуемой механической системы. Это обстоятельство можно использовать для написания эффективных алгоритмов и сокращения времени работы вычислительной машины.

При выбранных правильной нумерации и направлений дуг для полного описания структуры взаимосвязей системы со структурой дерева достаточно одного целочисленного массива $\{k_i\}$ длины N (числа тел в системе), на i -м месте которого расположен индекс тела, предшествующего i -му.

Кроме того, с каждым телом системы свяжем следующие множества: P_i – упорядоченное множество индексов шарниров, составляющих путь между телами s_0 и s_i ; S_i – множество

индексов шарниров, для которых i -е тело является предшествующим.

§ 2. Кинематика систем многих тел

2.1. Кинематика относительного движения смежных тел

Рассмотрим относительное движение в шарнире с номером i . С каждым из двух смежных тел i и k_i свяжем прямоугольные декартовы системы координат с началами в произвольных выбранных точках этих тел.

Положение тела s_i относительно связанной с базовым (несущим) для него телом s_{k_i} системой координат однозначно определяется радиус-вектором $\rho_i = \overrightarrow{O_{k_i}O_i}$ и ортонормированными векторами $e_1^{(i)}$, $e_2^{(i)}$, $e_3^{(i)}$, неизменно связанными с телом. В качестве скалярных величин, определяющих положение тела s_i , выберем координаты $\rho_j^{(i)}$ вектора ρ_i в системе координат, связанной с телом s_{k_i} , и элементы матрицы $G_{k_i}^i \equiv G_i$ направляющих косинусов между базисными векторами, связанными с телами (преобразования координат из предыдущей k_i СК в СК i -го тела). Таким образом, если тело свободно, множество \mathfrak{M}_i его положений является шести-мерным многообразием [3], которое будем называть многообразием относительного положения тела.

Предположим, что физическая связь в шарнире с достаточной степенью адекватности моделируется системой $m_i \leq 6$ идеальных голономных связей

$$\xi_i(\mathbf{x}_i, t) = 0, \quad (2.1)$$

где ξ_i — m_i -мерная дифференцируемая вектор-функция, \mathbf{x}_i — шестимерный вектор квази-координат, параметризующий пространство \mathfrak{M}_i .

Связи (2.1) определяют в пространстве \mathfrak{M}_i некоторое многообразие \mathfrak{S}_i . Будем предполагать, что ранг матрицы $Z_i = \frac{\partial \xi_i^T}{\partial \mathbf{x}_i}$ равен m_i . Тогда \mathfrak{S}_i является многообразием размерности $n_i = 6 - m_i$.

Уравнения, определяющие положение тела s_i в пространстве \mathfrak{M}_i , перемещающегося вдоль n_i -мерного многообразия \mathfrak{S}_i можно также задать, введя n_i -мерный вектор $\mathbf{q}_i = (q_1^{(i)}, \dots, q_{n_i}^{(i)})^T$ криволинейных (обобщённых) координат, в параметрической форме:

$$\rho_i = \rho_i(\mathbf{q}_i, t), \quad G_i = G_i(\mathbf{q}_i, t). \quad (2.2)$$

Исходя из (2.2), при заданном законе движения $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i(t)$ для векторов поступательной \mathbf{v}_i^r и угловой $\boldsymbol{\omega}_i^r$ относительных скоростей тела s_i по отношению к телу s_{k_i} можем записать следующие выражения:

$$\mathbf{v}_i^r = G_i \overset{\circ}{\rho}_i = G_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \mathbf{q}_i^T} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right), \quad (2.3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^r = G_i \overset{\circ}{G}_i^T = G_i \left(\frac{\partial G_i^T}{\partial \mathbf{q}_i^T} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial G_i^T}{\partial t} \right). \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{v}_i^r и $\boldsymbol{\omega}_i^r$ заданы в системе координат, связанной с телом s_i . Символом « $\overset{\circ}{}$ » сверху обозначены локальные производные в подвижной системе координат, связанной с телом s_{k_i} . Кроме того, символ « \sim » используется для обозначения кососимметричной матрицы (матричная запись векторного произведения [5]):

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основании формул (2.3) и (2.4) проекции векторов \mathbf{v}_i^r и $\boldsymbol{\omega}_i^r$ относительной поступательной и угловой скоростей можно представить в виде линейной формы от обобщённых скоростей

$$\mathbf{v}_i^r = A_i \dot{\mathbf{q}}_i + \varphi_i^r, \quad (2.5)$$

где

$$\mathbf{v}_i^r = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^r \\ \boldsymbol{\omega}_i^r \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial \mathbf{q}_i^T} \\ U_i \end{pmatrix}, \quad U_i = (\mathbf{u}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{u}_{n_i}^{(i)}), \quad \tilde{u}_j^{(i)} = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial q_j^{(i)}}, \quad \varphi_i^r = \begin{pmatrix} G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \\ \mathbf{b}_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_i = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial t}.$$

Для проекций векторов $\dot{\mathbf{v}}_i^r$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^r$ относительных поступательного и углового ускорений тела s_i по отношению к телу s_{k_i} на оси связанной с телом s_i системы координат можно записать следующие соотношения, связывающие их с обобщёнными ускорениями

$$\mathbf{w}_i^r = A_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\psi}_i^r, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{w}_i^r = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_i^r \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_i^r = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_i^r}{\partial \mathbf{q}_i^T} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial \mathbf{v}_i^r}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_i^r \times \mathbf{v}_i^r \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^r}{\partial \mathbf{q}_i^T} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^r}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы A_i можно рассматривать как координаты некоторых векторов многообразия \mathfrak{S}_i в системе координат, связанной с телом s_i . Каждый этот вектор касается многообразия \mathfrak{S}_i . Кроме того, если в качестве параметров параметризации многообразия \mathfrak{S}_i выбраны обобщённые координаты (то есть минимальное число параметров, с помощью которых можно охватить все положения несвободного тела), то эти вектора являются линейно независимыми и могут рассматриваться как базис n_i -мерного линейного подпространства \mathfrak{T}_i , касательного к многообразию \mathfrak{S}_i [3]. В этом случае матрицу A_i будем называть матрицей касательного локального базиса относительного движения в шарнире с номером i .

Отметим, что столбцы матрицы Z_i можно рассматривать как вектора, образующие базис натянутого на них m_i -мерного линейного подпространства \mathfrak{N}_i , которое является ортогональным к подпространству \mathfrak{S}_i [3]. Матрицу Z_i будем называть матрицей ортогонального локального базиса относительного движения в шарнире с номером i . Матрицы A_i касательного и Z_i ортогонального базисов связаны соотношениями

$$Z_i^T A_i = 0, \quad A_i^T Z_i = 0,$$

которые выражают условие ортогональности касательного и ортогонального базисов [3].

Ортогональный базис Z_i элементарным образом строится по уравнениям связей (2.1). Обычно уравнения многообразия \mathfrak{S}_i в форме (2.1) не задают, а описывают только уравнения связей в параметрической форме (2.2), то есть определяют касательный базис матрицей A_i . В обоих случаях, располагая только одним из базисов, второй базис можно построить чисто алгебраическим путём.

Например, матрицу Z_i можно построить, выделив линейно независимые столбцы симметричной матрицы

$$Z_i^* = E - A_i (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T,$$

которая также ортогональна к матрице A_i .

Другой способ состоит в представлении матриц A_i и Z_i в блочном виде

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^H \\ A_i^3 \end{pmatrix}, \quad Z_i = \begin{pmatrix} Z_i^3 \\ Z_i^H \end{pmatrix},$$

где блоки A_i^H и Z_i^H являются независимыми, а блоки A_i^3 и Z_i^3 — зависимыми блоками матриц A_i и Z_i , $\dim A_i^H = (n_i \times n_i)$, $\dim A_i^3 = (m_i \times n_i)$, $\dim Z_i^H = (m_i \times m_i)$, $\dim Z_i^3 = (n_i \times m_i)$, $|A_i^H| \neq 0$, $|Z_i^H| \neq 0$.

В этом случае искомым ортогональным базисом Z_i по заданному касательному базису A_i будет определяться выражением [3]

$$Z_i = \begin{pmatrix} Z_i^3 \\ Z_i^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(A_i^{HT})^{-1} A_i^{3T} \\ E_{m_i} \end{pmatrix}.$$

2.2. Кинематика всей системы. Матрица кинематической структуры

Для описания движения системы тел введем инерциальную систему координат, определяемую центром O и ортонормированными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Положение и ориентацию каждого тела системы относительно инерциальной системы координат будем определять с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OO_i}$ фиксированной нём точки O_i и системы ортонормированных векторов $\mathbf{e}_1^{(i)}, \mathbf{e}_2^{(i)}, \mathbf{e}_3^{(i)}$, которые вместе с точкой O_i определяют координатную систему, неизменно связанную с телом. В качестве скалярных величин, определяющих положение тела, можно выбрать координаты вектора \mathbf{r}_i в инерциальной системе координат (матрица-столбец \mathbf{r}_i) и элементы матрицы направляющих косинусов G_0^i между этими системами.

Используем метод относительного описания положения тел системы. При таком подходе положение системы твёрдых тел в инерциальном пространстве определено однозначно, если положение тел относительно друг друга известно для всех соединений и, кроме того, известно положение инерциальной системы координат. Примем, что нулевое тело закреплено в инерциальной системе координат, то есть положим $\mathbf{r}_0(t) = 0, G_0(t) = 0$. В качестве параметров, определяющих конфигурацию механической системы, примем совокупность обобщённых параметров, задающих положение смежных тел в сочленениях, $\mathbf{q} = \left(q_1^{(1)}, \dots, q_{n_1}^{(1)}, \dots, q_1^{(N)}, \dots, q_{n_N}^{(N)} \right)^T$. Задание вектора $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ как функции времени позволяет однозначно определить в любой момент взаимное положение тел и их движение относительно абсолютной системы координат.

Будем считать, что граф системы имеет правильную нумерацию.

Запишем рекуррентные равенства, связывающие радиус-векторы фиксированных точек O_i и O_{k_i} двух смежных тел

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{k_i} + G_0^i{}^T \boldsymbol{\rho}_i, \quad (2.7)$$

где векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_{k_i} заданы в инерциальной системе координат, а матрица перехода G_0^i из инерциальной системы координат в систему координат, связанную с i -м телом может быть вычислена с помощью рекуррентной формулы

$$G_0^i = G_{k_i}^i G_0^{k_i}. \quad (2.8)$$

Тогда, дифференцируя соотношения (2.7) и (2.8), для абсолютных скоростей и ускорений i -го твёрдого тела, совершающего относительное движение, можно записать векторные соотношения через скорости и ускорения базового для него тела:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{k_i} + \boldsymbol{\omega}_{k_i} \times \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{v}_i^r, \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{k_i} + \boldsymbol{\omega}_i^r \quad (2.10)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{v}}_{k_i} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{k_i} \times \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\omega}_{k_i} \times (\boldsymbol{\omega}_{k_i} \times \boldsymbol{\rho}_i) + 2 \boldsymbol{\omega}_{k_i} \times \mathbf{v}_i^r + \dot{\mathbf{v}}_i^r, \quad (2.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{k_i} + \boldsymbol{\omega}_{k_i} \times \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \quad (2.12)$$

где \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_{k_i} — векторы абсолютной поступательной скорости тел с номерами i и k_i соответственно, $\boldsymbol{\omega}_i$ и $\boldsymbol{\omega}_{k_i}$ — векторы абсолютной угловой скорости тел с номерами i и k_i соответственно, $\dot{\mathbf{v}}_i$ и $\dot{\mathbf{v}}_{k_i}$ — векторы абсолютного поступательного ускорения тел с номерами i и k_i соответственно, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{k_i}$ — векторы абсолютного углового ускорения тел с номерами i и k_i соответственно.

Соотношения (2.9)–(2.12) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{v}_i = C_i \mathbf{v}_{k_i} + \mathbf{v}_i^r, \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = C_i \dot{\mathbf{v}}_{k_i} + \mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^c, \quad (2.14)$$

где

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{k_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k_i} \\ \boldsymbol{\omega}_{k_i} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_i = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{k_i} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{k_i} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{k_i} \end{pmatrix},$$

$$C_i = \begin{pmatrix} G_i & -G_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \\ 0_{3 \times 3} & G_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_i^c = \begin{pmatrix} G_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k_i}^2 \boldsymbol{\rho}_i + 2G_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k_i} G_i^T \mathbf{v}_i^r \\ G_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k_i} G_i^T \boldsymbol{\omega}_i^r \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \dots$ — (3×1) -матрицы, элементами которых являются проекции соответствующих векторов на оси связанной с телом системы координат.

Введём блочную $6N \times 6N$ матрицу S с квадратными подматрицами S_{ij} порядка 6 по следующей формуле:

$$S_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i, \\ -C_i, & j = k_i, \\ 0_{6 \times 6}, & j \neq i \vee k_i, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (2.15)$$

где E — единичная матрица указанного порядка, 0 — нулевая матрица указанного размера.

Поскольку матрица S содержит информацию как о топологической структуре системы, так и об относительном положении тел в системе, будем называть ее матрицей кинематической структуры.

Заметим, что матрица S для любой кинематической структуры содержит в каждой строке только два ненулевых блока E_6 и $-C_i$.

С использованием матрицы S уравнения кинематики системы тел (2.13) и (2.14) можно записать в краткой матричной форме

$$\begin{aligned} S \mathbf{v} &= \mathbf{v}^r, \\ S \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c \end{aligned}$$

со следующими матрицами:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{v}}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^r \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^r \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^c = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1^c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_N^c \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица S позволяет проектировать вектора из пространства абсолютных скоростей системы в пространство векторов относительных скоростей.

Рекуррентные формулы (2.13), (2.14) можно записать также в виде явных выражений

$$\mathbf{v} = T \mathbf{v}^r, \quad (2.16)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = T \mathbf{w}^r + T \mathbf{w}^c, \quad (2.17)$$

где матрица T является нижней унитреугольной блочной $6N \times 6N$ матрицей, подматрицы T_{ij} которой могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$T_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i, \\ C_i T_{k_i j}, & j \in P_i, \\ 0_{6 \times 6}, & j \notin P_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, i}. \quad (2.18)$$

Легко увидеть, что матрица T является обратной для матрицы S , то есть

$$T S = S T = E.$$

Кроме того, матрица T позволяет проектировать вектора из пространства относительных скоростей в пространство абсолютных скоростей.

Рассмотрим подробнее структуру матрицы T . Предположим, что система имеет структуру простой цепочки. Тогда

$$\begin{aligned} T_{11} &= E_6, \quad T_{21} = C_2 = \begin{pmatrix} G_2 & -G_2 \tilde{\rho}_2 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \quad T_{22} = E_6, \\ T_{31} &= C_3 C_2 = \begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \tilde{\rho}_3 \\ 0 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_2 & -G_2 \tilde{\rho}_2 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_3 G_2 & -G_3 G_2 (\tilde{\rho}_2 + G_2^T \tilde{\rho}_3 G_2) \\ 0 & G_3 G_2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} G_1^3 & -G_1^3 \tilde{r}_{13} \\ 0 & G_1^3 \end{pmatrix}, \quad T_{32} = C_3, \quad T_{33} = E_6, \quad \dots$$

Таким образом, если дуга u_j принадлежит пути $[s_0, s_i]$ ($j < i$), то

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} G_j^i & -G_j^i \tilde{r}_{ji} \\ 0 & G_j^i \end{pmatrix},$$

где G_j^i — матрица перехода из системы координат j -го тела в систему координат i тела, \tilde{r}_{ji} — матрица-столбец координат вектора $\overrightarrow{O_j O_i}$ в системе координат j -го тела.

Согласно формулам (2.5) и (2.6) относительные скорости и ускорения тел системы можно выразить через вектор обобщённых координат в виде

$$\mathbf{v}^r = A \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\varphi}^r, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{w}^r = A \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\psi}^r, \quad (2.20)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$ — блочно-диагональная матрица размерности $6N \times n$, на диагонали которой стоят матрицы касательного локального базиса многообразия относительного движения [3], $n = \sum_{i=1}^N n_i$; $\boldsymbol{\varphi}^r$ — матрица-столбец составляющих относительных скоростей тел системы, не зависящих от обобщённых скоростей; $\boldsymbol{\psi}^r$ — матрица-столбец составляющих относительных ускорений тел системы, не зависящих от обобщённых ускорений.

Подставляя выражения (2.19) и (2.20) в формулы (2.16) и (2.17) получим

$$\mathbf{v} = B \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\varphi}, \quad (2.21)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = B \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\psi}, \quad (2.22)$$

где $B = T A$, $\boldsymbol{\varphi} = T \boldsymbol{\varphi}^r$, $\boldsymbol{\psi} = T(\boldsymbol{\psi}^r + \boldsymbol{\psi}^c)$.

В этих соотношениях матрица B называется матрицей касательного базиса системы [3]. Она является блочной нижней треугольной матрицей, блоки которой могут быть вычислены по следующей рекуррентной формуле:

$$B_{ij} = \begin{cases} A_i, & j = i, \\ C_i B_{k_i j}, & j \in P_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, i}. \\ 0_{6 \times n_j}, & j \notin P_i, \end{cases}$$

Компоненты векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ в формулах (2.21), (2.22) также могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \varphi_i &= C_i \varphi_{k_i} + \varphi_i^r, \\ \psi_i &= C_i \psi_{k_i} + \mathbf{w}_i^c + \psi_i^r. \end{aligned}$$

Соотношения (2.7), (2.8), (2.21), (2.22) представляют собой кинематическую модель системы абсолютно твёрдых тел, которая позволяет определять положение, распределение скоростей и ускорений любого тела системы через вектор обобщённых параметров системы, его первую и вторую производные.

§ 3. Динамика систем многих тел

3.1. Расширенная система уравнений движения систем многих тел

Для составления уравнений движения систем связанных твёрдых тел со структурой дерева будем использовать принцип освобождения от связей. В этом случае мысленно уничтожаем связи между телами, а движение системы, осуществляемое при наличии связей, обеспечим введением дополнительных сил, которые называются реакциями связей. Введение реакций связей

позволяет записать дифференциальные уравнения движения любого тела в форме второго закона Ньютона — общих уравнений динамики свободного твёрдого тела (уравнений Ньютона–Эйлера):

$$m_i [\dot{\mathbf{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i^c + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i^c)] = \mathbf{f}_i + \boldsymbol{\tau}_i - \sum_{j \in S_i} \boldsymbol{\tau}_j, \quad (3.1)$$

$$m_i \mathbf{r}_i^c \times \dot{\mathbf{v}}_i + J_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times J_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{m}_i^{O_i} + \boldsymbol{\mu}_i^{O_i} - \sum_{j \in S_i} \boldsymbol{\mu}_j^{O_i}, \quad (3.2)$$

где m_i — масса i -го тела; J_i — тензор инерции i -го тела; \mathbf{r}_i^c — проекции радиус-вектора центра масс i -го тела на оси связанной с ним системы координат; \mathbf{f}_i — главный вектор активных сил, действующих на i -е тело; $\mathbf{m}_i^{O_i}$ — главный момент активных сил, действующих на i -е тело; $\boldsymbol{\tau}_j$ — главный вектор реакций связей в j -м шарнире; $\boldsymbol{\mu}_j^{O_i}$ — главный момент реакций связей в j -м шарнире относительно точки O_i .

Для последующего использования перепишем векторные уравнения (3.1), (3.2) в матричной форме

$$M_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \sum_{j \in S_i} C_j \mathbf{R}_j, \quad i = \overline{1, N} \quad (3.3)$$

со следующими матрицами:

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i E & -m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^c \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^c & J_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i - m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^2 \mathbf{r}_i^c \\ \mathbf{m}_i^{O_i} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i J_i \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_j \\ \boldsymbol{\mu}_j^{O_i} \end{pmatrix}.$$

С помощью формул (2.14) и (2.6) запишем выражение, связывающее декартовые и обобщённые ускорения:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = C_i \dot{\mathbf{v}}_{k_i} + A_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{w}_i^*, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{w}_i^* = \boldsymbol{\psi}_i^r + \boldsymbol{\psi}_i^c$.

Система уравнений (3.4) и (3.3) замыкается соотношениями

$$A_i^T \mathbf{R}_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.5)$$

Равенства (3.5) вытекают из условия идеальности связей и отражают то обстоятельство, что в шарнирах реакции являются ортогональными к конфигурационному многообразию [3] относительных положений, определяемому параметрами \mathbf{q}_i .

Запишем расширенную систему уравнений (3.3)–(3.5) в компактном матричном виде

$$\begin{cases} M \dot{\mathbf{v}} - S^T \mathbf{R} = \mathbf{F}, \\ -S \dot{\mathbf{v}} + A \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{w}^*, \\ A^T \mathbf{R} = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_N)$ — блочно-диагональная матрица всех масс механической системы размером $6N \times 6N$, $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N)^T$ — матрица-столбец проекций реакций в шарнирах системы, $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)^T$, $\mathbf{w}^* = (\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \dots, \mathbf{w}_N^*)^T$.

Система содержит $12N + n$ скалярных дифференциальных и алгебраических уравнений относительно такого же количества неизвестных величин $\dot{\mathbf{v}}$, \mathbf{R} , $\ddot{\mathbf{q}}$. Матрица системы симметричная, блочная трёхдиагональная, достаточно разреженная.

Расширенную систему (3.6) можно непосредственно разрешать относительно ускорений и использовать при моделировании систем многих тел. С другой стороны, она служит основой для получения других известных форм записи уравнений динамики систем тел со структурой дерева. Методы преобразования расширенной системы (3.6) связаны, в основном, с уменьшением ее размерности (редукции).

К основным методам редукции относятся:

а) группа методов, основанных на исключении из системы реакций связей с использованием касательного пространства. В результате такой редукции получают уравнения динамики относительно обобщённых координат (уравнения Лагранжа второго рода). Такие подходы (в зависимости от реализации) носят названия — прямой метод, метод составных тел [10];

б) вторая группа основана на идее использования ортогонального пространства многообразия относительных движений и выражения сил реакций через множители Лагранжа $\mathbf{R} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda}$. В результате уравнения динамики сводятся к уравнениям Лагранжа первого рода;

в) третье направление связано с одновременным использованием и касательного, и ортогонального пространств. В результате получаем уравнения типа Маджи в избыточных квазискоростях для системы твёрдых тел. Аналогичным образом можно получить из расширенной системы (3.6) другие известные формы уравнений динамики систем твёрдых тел: уравнения Маджи в квазискоростях и обобщённых координатах, уравнения кинестатики, уравнения в импульсах Пуассона.

В случае, если система имеет замкнутые циклы (матрица S прямоугольная), основные методы приведения матрицы S к квадратному виду связаны с понятием остовного дерева графа (метод разрезания шарниров) и вторичного графа (метод раздвоения тел). В этих случаях матрица кинематической структуры снова квадратная, но появляются дополнительные связи. При этом методика составления расширенной системы и её структура (а, следовательно, и методы редукции) сохраняются. Основная проблема при реализации таких подходов — построение базисов касательного и ортогонального пространств многообразия относительных движений для дополнительных связей.

Приведем только две явные формы записи уравнений движения уменьшенной размерности, часто используемые в численном исследовании систем твёрдых тел: уравнения Лагранжа первого и второго рода.

3.2. Уравнения Лагранжа первого рода в абсолютных координатах

Для получения уравнений движения в форме уравнений Лагранжа первого рода выразим силы и моменты реакции связей в шарнирах через независимые параметры следующими соотношениями:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{Z} = \text{diag}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ — блочно-диагональная матрица размерности $6N \times (6N - n)$, на диагонали которой стоят матрицы ортогонального локального базиса относительного движения; $\boldsymbol{\lambda}$ — $(6N - n)$ -мерный вектор независимых реакций связей (множителей Лагранжа).

Подставив соотношения (3.7) в первое уравнение системы (3.6) и спроектировав второе уравнение на ортогональное подпространство (умножением слева на \mathbf{Z}^T), получим систему

$$\begin{cases} M \dot{\mathbf{v}} - S^T \mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}, \\ -\mathbf{Z}^T S \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^T \mathbf{w}^*, \end{cases} \quad (3.8)$$

$12N - n$ скалярных уравнений относительно неизвестных $\dot{\mathbf{v}}$, и $\boldsymbol{\lambda}$ с симметричной матрицей системы.

Система уравнений (3.8) так же, как и расширенная система (3.6), может быть приведена к квазитрёхдиагональному виду с помощью проектирования на подпространство, ортогональное к конфигурационному многообразию системы.

Выразим из первого уравнения системы (3.8) декартовы ускорения $\dot{\mathbf{v}}$

$$\dot{\mathbf{v}} = M^{-1}(S^T \mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{F}) \quad (3.9)$$

и подставим их во второе уравнение. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно множителей Лагранжа

$$(\mathbf{Z}^T S M^{-1} S^T \mathbf{Z}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Z}^T (\mathbf{w}^* - S M^{-1} \mathbf{F}). \quad (3.10)$$

Полученная система уравнений (3.10) обладает следующей особенностью: чем больше степеней свободы в шарнире, тем меньше размер столбца множителей Лагранжа и, значит, тем меньше размер разрешающей системы уравнений. Матрица системы является симметричной, положительно определённой. Кроме того, она имеет квазитрёхдиагональную или ленточную структуру.

После того, как найдены все значения множителей Лагранжа, декартовы ускорения всех тел системы вычисляются по формулам (3.9). Для определения обобщённых ускорений умножим второе уравнение системы (3.6) слева на матрицу A^T и выразим из полученного уравнения вектор $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\ddot{\mathbf{q}} = (A^T A)^{-1} A^T (S M^{-1} S^T Z \boldsymbol{\lambda} + S M^{-1} \mathbf{F} - \mathbf{w}^*).$$

Учитывая структуру матрицы S (см. формулы (2.15)), матрицу $L = Z^T S M^{-1} S^T Z$ можно представить в виде симметричной блочной матрицы с подматрицами L_{ij} , вычисляемыми по следующей формуле:

$$L_{ij} = \begin{cases} Z_i^T C_i M_{k_i}^{-1} C_i^T Z_i + Z_i^T M_i^{-1} Z_i, & j = i, \\ -Z_i^T C_i M_j^{-1} Z_j, & j = k_i, \\ -Z_i^T M_i^{-1} C_j^T Z_j, & j \in S_i, \\ Z_i^T C_i M_{k_i}^{-1} C_j^T Z_j, & j \in S_{k_i} \setminus \{i\}, \\ 0_{6 \times 6}, & j \notin S_i \cup S_{k_i} \cup \{k_i\}. \end{cases}$$

3.3. Уравнения движения в обобщённых координатах

Для получения уравнений Лагранжа второго рода спроектируем уравнения (3.6) на касательное подпространство. Умножим уравнение динамики слева на $B^T = A^T T^T$ и исключим из него реакции связей

$$A^T T^T M \dot{\mathbf{v}} = A^T T^T \mathbf{F}. \quad (3.11)$$

Умножим уравнение кинематики слева на матрицу T и выразим из него декартовы ускорения

$$\dot{\mathbf{v}} = T A \ddot{\mathbf{q}} + T \mathbf{w}^* = T A \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\psi}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение (3.11), получим уравнение динамики в обобщённых координатах в виде

$$(A^T T^T M T A) \ddot{\mathbf{q}} = A^T T^T (\mathbf{F} - M \boldsymbol{\psi}). \quad (3.12)$$

Матрица перед обобщёнными ускорениями $M^r = A^T T^T M T A$ и вектор правых частей уравнения $\mathbf{Q} = A^T T^T (\mathbf{F} - M \boldsymbol{\psi})$ могут быть вычислены двумя способами в зависимости от порядка перемножения матриц их составляющих.

В первом случае, когда

$$\begin{aligned} M^r &= (A^T T^T) M (T A) = (T A)^T M (T A) = B^T M B, \\ \mathbf{Q} &= (A^T T^T) (\mathbf{F} - M \boldsymbol{\psi}) = B^T (\mathbf{F} - M \boldsymbol{\psi}), \end{aligned}$$

получаем прямой метод составления уравнений динамики [9, 10].

Если вычисления матрицы перед обобщёнными ускорениями и вектора правых частей уравнения (3.12) организовать следующим образом

$$\begin{aligned} M^r &= A^T (T^T M T) A = A^T M^* A, \\ \mathbf{Q} &= A^T (T^T (\mathbf{F} - M \boldsymbol{\psi})) = A^T \mathbf{Q}^*, \end{aligned}$$

то получим метод составных тел [9, 10].

С учётом формул (2.18), (6×6) -подматрицы M_{ij}^* блочной симметричной $6N \times 6N$ -матрицы M^* могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

$$M_{ij}^* = \begin{cases} M_i + \sum_{l \in S_i} C_l^T M_l C_l, & j = i, \\ M_{il}^* C_l \quad (l = P_i \cap S_j), & j \in P_i, \\ C_l^T M_{lj}^* \quad (l = P_j \cap S_i), & i \in P_j, \\ 0_{6 \times 6}, & j \notin P_i \wedge i \notin P_j. \end{cases}$$

Для вектора $\mathbf{Q}^* = (Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_N^*)^T$ справедливы аналогичные формулы

$$Q_i^* = \mathbf{F}_i - M_i \boldsymbol{\psi}_i + \sum_{l \in S_i} C_l^T Q_l^*.$$

§ 4. Методы численного решения уравнений движения систем многих тел

Уравнения (3.6), (3.12), (3.8) или (3.10) являются системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно групп переменных $\dot{\mathbf{v}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$, \mathbf{R} , $\boldsymbol{\lambda}$.

Матрицы систем уравнений в общем случае зависят от обобщённых координат и являются переменными во времени. При численном интегрировании на каждом шаге необходимо приводить эти системы уравнений к явному виду, то есть разрешать относительно векторов $\dot{\mathbf{v}}$ или $\ddot{\mathbf{q}}$. Это требует определённых вычислительных затрат, объём которых зависит от выбранного метода решения СЛАУ и плотности заполнения матрицы системы. Известно, что число арифметических операций в алгоритмах, основанных на точных методах решения СЛАУ (например, методах Гаусса или Холецкого) возрастает с ростом размерности задачи (т.е. числа степеней свободы и тел в механической системе) для плотно заполненных матриц системы по кубическому закону, для трапециевидных — по квадратичной зависимости, а для ленточных матриц — линейно.

Поэтому в зависимости от структуры механической системы и типов шарнирных соединений оказывается выгодным с точки зрения скорости численного моделирования применять одну из трёх выписанных выше форм уравнений. Структура системы уравнений (3.6) блочно трёхдиагональна, не изменяется для различных механических систем и слабо зависит от типов шарниров (число элементов в матрице системы порядка N). Система уравнений (3.10) для древовидных механических систем имеет ленточную структуру, ширина полосы которой увеличивается с ростом дочерних узлов и уменьшается с ростом числа степеней свободы в шарнирных соединениях. Число элементов в матрице системы остается пропорциональным числу тел N . Уравнения (3.12) имеют, с одной стороны, меньший порядок, а с другой, — большую плотность заполнения матрицы системы для большинства механических систем по сравнению с первыми двумя формами уравнений движения (число элементов в матрице порядка n^2). При этом плотность заполнения уменьшается с ростом дочерних узлов.

Для общих уравнений динамики (3.6) и уравнений Лагранжа первого рода (3.8) или (3.10) существуют алгоритмы их разрешения относительно реакций, множителей Лагранжа и ускорений, в которых число арифметических операций (вычислительная трудоемкость) растёт линейно в зависимости от количества тел N в механической системе [14]. Для разрешения относительно обобщённых ускорений уравнений Лагранжа второго рода (3.12) в случае древовидных механических систем требуется обычно порядка n^2 , в случае цепочки тел — n^3 арифметических операций [13]. С этой точки зрения уравнения (3.6) или (3.8), содержащие избыточное число переменных, оказываются более эффективными по сравнению с алгоритмами формирования уравнений движения в обобщённых координатах вида (3.12). С другой стороны, точные алгоритмы разрешения уравнений движения (3.6) или (3.8) включают в себя дополнительные матричные операции исключения избыточных зависимых переменных $\dot{\mathbf{v}}$, \mathbf{R} или $\boldsymbol{\lambda}$. В результате оказывается, что хотя общая трудоемкость алгоритмов растёт линейно, но коэффициент пропорциональности получается достаточно большим, и эффективность этих методов начинает проявляться только тогда, когда число тел в механической системе достаточно велико.

Таким образом, необходимость разрешения уравнения движения относительно ускорений приводит к тому, что численное моделирование динамики механических систем, состоящих из большого числа тел, на основе уравнений динамики (3.6), (3.8) или (3.12) и при использовании точных методов решения СЛАУ, требует значительных затрат времени работы ЭВМ.

Так как обычно при малой величине шага интегрирования изменения элементов матриц систем уравнений (3.6), (3.8) или (3.12) малы, то снижения трудозатрат можно добиться, если для разрешения использовать методы, основанные на итерационном уточнении малых возмущений в матрице системы или обратной к ней матрице. К таким методам относятся методы переменной метрики, развитые в работах [6, 7].

Приведем кратко основные методы решения матричных уравнений движения (3.6), (3.8) или (3.12).

4.1. Решение расширенной системы уравнений методом отдельных тел

Метод отдельных тел («прогонки») по существу является модификацией метода Гаусса ре-

шения СЛАУ с ленточной структурой [4]. В данном методе при прямом ходе, который выполняется начиная с последнего тела системы, из группы уравнений (3.3) исключаются реакции связей носимых тел

$$M_i^* \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{F}_i^* + \mathbf{R}_i, \quad i = \overline{N-1, 1},$$

где матрицы M_i^* и \mathbf{F}_i^* вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T (E - M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} A_j^T) M_j^* C_j, \\ \mathbf{F}_i^* &= \mathbf{F}_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T (E - M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} A_j^T) (\mathbf{F}_j^* - M_j^* \mathbf{w}_j^*). \end{aligned}$$

При обратном ходе последовательно для каждого тела системы, начиная от корневого, вычисляются обобщённые ускорения $\ddot{\mathbf{q}}_i$:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = (A_i^T M_i^* A_i)^{-1} A_i^T (\mathbf{F}_i^* - M_i^* (C_i \dot{\mathbf{v}}_{k_i} + \mathbf{w}_i^*)), \quad i = \overline{1, N},$$

и декартовы ускорения $\dot{\mathbf{v}}_i$ по формулам (3.4). При этом учитывается, что ускорение нулевого тела известно. В дальнейшем, следуя [9, 10], этот метод будем называть методом отдельных тел.

Метод отдельных тел является одним из самых эффективных методов численного моделирования систем с длинными кинематическими цепями. В этом методе требуется обращение лишь матриц $A_i^T M_i^* A_i$, порядок которых равен числу степеней свободы в i -м шарнире. Они симметричны и положительно определены. И поскольку их порядок всегда мал (не превышает шести), то этим и обусловлена эффективность описываемого метода.

Аналогичную процедуру можно выписать для системы уравнений (3.8).

4.2. Решение уравнений движения итерационными методами

Примем в дальнейшем стандартные для систем линейных алгебраических уравнений обозначения: правую часть системы уравнений обозначим через n -мерный вектор-столбец \mathbf{b} , вектор-столбец неизвестных ускорений, реакций и множителей Лагранжа переобозначим через n -мерный вектор-столбец неизвестных \mathbf{x} , матрицу системы обозначим через A . Тогда задачу разрешения уравнений движения относительно ускорений, реакций и множителей Лагранжа в текущий момент времени $t = t_0 + h$, где h — малый шаг численного интегрирования, с использованием накопленной информации о системе в предыдущий момент времени t_0 можно в терминах СЛАУ переформулировать следующим образом.

Пусть задана система n линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4.1)$$

где $A = A_0 + \varepsilon F_0$, A_0 , F_0 — известные симметричные и положительно определенные матрицы, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \varepsilon \mathbf{f}_0 \in E^n$ — известный вектор-столбец правых частей уравнения, $\mathbf{x} \in E^n$ — вектор-столбец неизвестных, ε — малый параметр.

Требуется найти приближенное решение $\mathbf{x}^* \approx A^{-1}\mathbf{b}$ системы уравнений (4.1), если известна обратная матрица $H_0 = A_0^{-1}$. Приближение к решению рассматриваем в среднеквадратическом смысле, то есть считаем, что в точке \mathbf{x}^* выполняется неравенство

$$(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*) < \varepsilon_{\text{абс}}^2,$$

где $\varepsilon_{\text{абс}}$ — допустимое абсолютное отклонение.

Особенность поставленной задачи заключается в том, что в алгоритме нахождения вектора \mathbf{x}^* мы можем использовать матрицы A_0 или H_0 в качестве начального приближения к матрицам A или $H = A^{-1}$.

Представим обратный итерационный алгоритм, в котором уточняется матрица $H = A^{-1}$. Теоретическое обоснование предлагаемого численного метода дано в работах [6, 7].

Введем следующие обозначения: $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ — вектор невязки системы уравнений в точке \mathbf{x} ; \mathbf{s} — вектор, указывающий направление, в котором происходит улучшение решения при перемещении из точки \mathbf{x} ; k — номер итерации.

Обратный итерационный алгоритм задаёт следующая последовательность команд:

$$\begin{aligned}
 &k = 0; H_0 = A^{-1} \\
 &\mathbf{x}_0 = H_0\mathbf{b}; \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0; \mathbf{s}_0 = H_0\mathbf{r}_0 \\
 &\text{while } \mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k > \varepsilon_{\text{абс}} \\
 &\quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k; \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{k+1} \\
 &\quad \mathbf{s}_{k+1} = \left(1 + \frac{(H_k \mathbf{r}_{k+1})^T \mathbf{r}_{k+1}}{(H_k \mathbf{r}_{k+1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1})} \right) H_k \mathbf{r}_{k+1} \\
 &\quad H_{k+1} = H_k + \frac{(H_k \mathbf{r}_{k+1})(H_k \mathbf{r}_{k+1})^T}{(H_k \mathbf{r}_{k+1})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k+1})} \\
 &\quad k = k + 1 \\
 &\text{end} \\
 &\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_k; A^{-1} = H_k.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для обратного итерационного метода (4.2) в [6] доказаны следующие свойства.

1. Метод является конечно сходящимся. За $n + 1$ итерацию приводит в точку \mathbf{x}^* , являющуюся решением системы уравнений (4.1): $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{n+1} + H_n \mathbf{r}_n = \mathbf{x}_n + A^{-1} \mathbf{r}_n$.

2. Если $\|\varepsilon F_0\| < \frac{1}{\kappa(A_0)} \|A_0\| = \frac{1}{\|H_0\|}$, то алгоритм (4.2) обеспечивает выполнение следующих свойств (здесь $\kappa(A_0) = \|A_0\| \cdot \|A_0^{-1}\| = \|A_0\| \cdot \|H_0\|$ — число обусловленности матрицы A_0): $\{H_k\}$ — последовательность положительно определённых матриц, последовательности $\{\|\varepsilon F_k\|\}$, $\{\|H - H_k\|\}$ и $\{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|\}$ монотонно убывают.

Таким образом, если на шаге численного интегрирования поправки к матрице системы достаточно малы, то метод может быть использован как итерационный. В этом случае он позволяет находить приближённое в среднеквадратическом смысле решение меньше, чем за $n + 1$ итерацию.

3. Для сходимости метода достаточно, чтобы шаг интегрирования удовлетворял неравенству $h \leq \frac{1}{\max(1, \|\dot{\mathbf{q}}_0\|)} O\left(\frac{1}{\kappa(A_0)}\right)$.

В результате работы обратного итерационного алгоритма (4.2) происходит не только определение решения — точки \mathbf{x}^* , но и восстановление обратной матрицы A^{-1} . В применении к поставленной задаче алгоритм (4.2) сходится существенно быстрее других итерационных алгоритмов, в которых не вычисляется обратная матрица к матрице системы. Вычислительные эксперименты на реальных динамических задачах показывают, что метод (4.2) позволяет сохранить квадратичный закон роста трудоёмкости моделирования в зависимости от роста размерности задачи для всех типов структур механических систем. Таким образом, обратный итерационный алгоритм (4.2) можно применять для тех механических систем, для которых более эффективными оказываются спроектированные на подпространства $\{\dot{\mathbf{q}}\}$ или $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ уравнения Лагранжа второго или первого рода (уравнения (3.10) или (3.12)) с достаточно плотно заполненной матрицей системы. В работе [7] приведён аналогичный прямой итерационный алгоритм решения динамических уравнений.

§ 5. Сравнение вычислительной эффективности методов

Говоря о вычислительной эффективности различных алгоритмов формирования уравнений динамики систем твёрдых тел, необходимо учитывать затраты на разрешение этих уравнений относительно переменных состояния [2, 13, 14]. Как уже говорилось выше, для систем (3.6) и (3.8) или (3.10) с сильно разреженной, трёхдиагональной матрицей существуют алгоритмы с

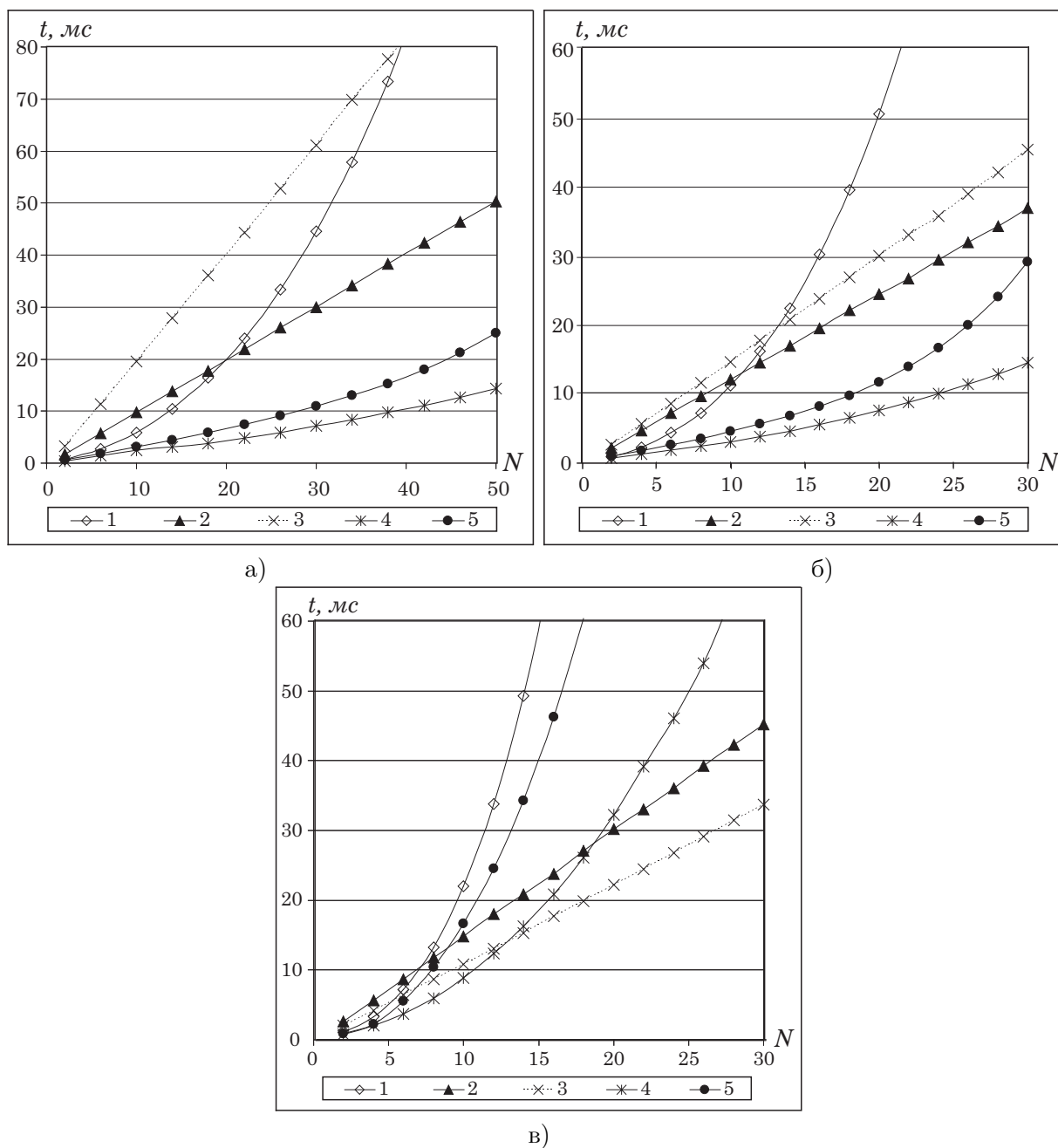


Рис. 1. Зависимость времени расчета t от числа тел N в механической системе «цепь» для различных методов составления и разрешения уравнений движения: а — система с одностепенными шарнирами; б — система с двухстепенными шарнирами; в — система с трёхстепенными шарнирами; 1 — метод составных тел; 2 — метод отдельных тел; 3 — уравнения Лагранжа первого рода; 4 — обратный итерационный метод; 5 — прямой итерационный метод

линейной зависимостью числа требуемых операций от числа тел в системе (методы прогонки) [14]. При этом скорость работы алгоритма мало зависит от структуры системы. Для системы (3.12), отличающейся малой размерностью, но имеющей в большинстве случаев достаточно плотно заполненную матрицу системы, алгоритмы разрешения имеют квадратичную (итерационные методы) и кубическую (методы Гаусса, Холецкого) зависимость числа необходимых операций от количества тел в системе [13]. Но для некоторых конкретных кинематических структур (например, бинарное дерево) такой показатель может стремиться к линейной зависимости.

Сказанное выше можно проиллюстрировать следующим примером. На рисунке 1 представлены результаты исследования вычислительной эффективности (время, затраченное на шаг интегрирования в мс, в зависимости от числа тел) рассмотренных методов для механической системы со структурой типа «цепь» (все тела соединены последовательно друг с другом).

На рисунке принята следующая нумерация методов:

1 — метод составных тел для уравнений Лагранжа второго рода и метод Холецкого разрешения уравнений движения относительно обобщённых ускорений;

2 — метод отдельных тел;

3 — метод Холецкого разрешения уравнений Лагранжа первого рода относительно множителей Лагранжа;

4 — обратный итерационный метод разрешения уравнений Лагранжа II рода относительно обобщённых ускорений;

5 — метод составных тел для уравнений Лагранжа второго рода и прямой итерационный метод их разрешения относительно обобщённых ускорений.

На рисунке 1 проведено сравнение методов для случаев, когда тела связаны шарнирами с одной, двумя и тремя угловыми степенями свободы соответственно.

Представленные результаты показывают, что сравнительная эффективность рассмотренных методов существенно зависит как от числа тел в механической системе, так и от числа степеней свободы в шарнирных соединениях. Приведённые графические зависимости позволяют в практических задачах по моделированию динамики машиностроительных конструкций выбрать наиболее эффективные методы формирования уравнений движения и их решения в каждом конкретном случае в зависимости от структуры и состава математической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams [Электронный ресурс]: система виртуального моделирования машин и механизмов // ООО «Эм-Эс-Си Софтвэр РУС», 2001–2012. URL: <http://www.mscsoftware.ru/products/adams>
2. Бячков А.Б., Иванов В.Н., Шимановский В.А. Классификация форм уравнений динамики систем твёрдых тел со структурой дерева // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 7 (33). С. 21–25.
3. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988. 384 с.
4. Верещагин А.Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 6. С. 89–94.
5. Виттенбург Й. Динамика систем твёрдых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
6. Иванов В.Н., Шимановский В.А. Использование итерационных алгоритмов разрешения уравнений движения механических систем при их численном интегрировании // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2006. Вып. 4 (4). С. 28–38.
7. Иванов В.Н., Шимановский В.А. Применение итерационных методов для разрешения уравнений движения систем связанных твёрдых тел // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 4 (20). С. 109–116.
8. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных тел. М.: Наука, 1993. 272 с.
9. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел. Брянск: БГТУ, 1997. 156 с.
10. Погорелов Д.Ю. Алгоритмы синтеза и численного интегрирования уравнений движения систем тел с большим числом степеней свободы // Восьмой Всеросс. съезд по теоретической и прикладной механике: аннотат. докл. Пермь, 2001. С. 490–491. URL: <http://www.iki.rssi.ru/seminar/20011025/abstract.htm>

11. Универсальный механизм [Электронный ресурс]: динамика машин и механизмов, динамика автомобилей и железнодорожных экипажей, прикладная механика, кинематика, обратная кинематика // Лаборатория вычислительной механики / Брянский государственный технический университет. Брянск, 2012. URL: http://www.umlab.ru/index_rus.htm
12. ФРУНД [Электронный ресурс]: моделирование динамики систем твёрдых и упругих тел // Волгоградский государственный технический университет. Волгоград, 2005. URL: <http://frund.vstu.ru/frund.htm>
13. Шимановский В.А., Иванов В.Н. Формирование уравнений движения механических систем в обобщённых координатах // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2005. Вып. 37. С. 188–201.
14. Шимановский В.А., Иванов В.Н. Методы составления уравнений движения систем связанных твёрдых тел в декартовых координатах // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 248–262.
15. EULER [Электронный ресурс]: программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем // ЗАО «АвтоМеханика». М. 1993–2011. URL: <http://www.euler.ru/index.php/euler>

Поступила в редакцию 28.02.2012

Иванов Владимир Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.

E-mail: precol@psu.ru

Домбровский Игорь Викторович, к. т. н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.

E-mail: dombrovski_iv@mz.perm.ru

Набоков Феликс Вячеславович, к. т. н., доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.

E-mail: nabokov-fv@yandex.ru

Шевелев Николай Алексеевич, д. т. н., профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.

E-mail: n.shevelev@pstu.ru

Шимановский Владимир Александрович, старший преподаватель, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.

E-mail: vlshim@psu.ru

V. N. Ivanov, I. V. Dombrovskii, F. V. Nabokov, N. A. Shevelev, V. A. Shimanovskii
Classification of the models of rigid multibody systems applied for the numerical analysis of mechanical structures' dynamic behavior

Keywords: dynamics of multibody systems, time-domain method, matrix computations.

Mathematical Subject Classifications: 70E55

The classification of the dynamic equations forms for the rigid multibody systems with tree structure has been presented. The classification is based on the compact matrix forms of multibody systems' kinematic and dynamic equations derived through the matrix of kinematic structure and geometrical approach for relative motion description. The unified form of motion's equations is suitable for representing and comparing of various approaches to the modeling of rigid multibody systems' dynamics. The comparative analysis of computational efficiency has been carried out in relation to various methods of formulation and solution for motion equations of rigid multibody systems.

REFERENCES

1. Adams: Multibody Dynamics Simulation, MSC Software, 2012. <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/Adams.aspx>

2. Byachkov A.B., Ivanov V.N., Shimanovskii V.A. Classification of various forms of dynamic multibody equations with tree structure, *Vestn. Perm Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2009, no. 7 (33), pp. 21–25.
3. Velichenko V.V. *Matrichno-geometricheskie metody v mekhanike s prilozheniyami k zadacham robototekhniki* (Matrix-geometrical methods in the mechanics with appendices to problems of a robotics), Moscow: Nauka, 1988, 384 p.
4. Vereshchagin A.F. Method of modelling on the digital computer of dynamics of complex mechanisms of robots-manipulators *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekhn. Kibernet.*, 1974, no. 6, pp. 89–94.
5. Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart: B. G. Teubner, 1977, 224 p. Translated under the title *Dinamika sistem tverdykh tel*, Moscow: Mir, 1980, 292 p.
6. Ivanov V.N., Shimanovskii V.A. Use of iteration algorithms for solution of the motion's equations of mechanical systems at their numerical integration, *Vestn. Perm Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2006, no. 4 (4), pp. 28–38.
7. Ivanov V.N., Shimanovskii V.A. Use of iteration algorithms for solution of the motion's equations of multibody systems, *Vestn. Perm Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2008, no. 4 (20), pp. 109–116.
8. Lilov L.K. *Modelirovanie sistem svyazannykh tel* (Modelling of systems of the associated bodies), Moscow: Nauka, 1993, 272 p.
9. Pogorelov D.Y. *Vvedenie v modelirovanie dinamiki sistem tel* (Introduction in modelling dynamics of multibody systems), Bryansk: Bryansk State Technical University, 1997, 156 p.
10. Pogorelov D.Y. Algorithms for generation and numerical integration of motion equations for large multibody systems, *Vos'moi vserossiiskii s"ezd po teoreticheskoi i prikladnoi mekhanike: annot. dokl.* (Eighth All-Russian congress on theoretical and applied mechanics: abstracts), Perm, 2001, pp. 490–491. <http://www.iki.rssi.ru/seminar/20011025/abstract.htm>
11. Universal Mechanism: road and railway vehicle dynamics, applied dynamics, general kinematics, inverse kinematics, *Laboratory of Computational Mechanics*, Bryansk State Technical University, Bryansk, 2012. <http://www.umlub.ru/index.htm>
12. FRUND: Software for simulation the multibody dynamics of the rigid and flexible bodies, Volgograd State Technical University, Volgograd, 2005. <http://frund.vstu.ru/en/frund.htm>
13. Shimanovskii V.A., Ivanov V.N. Generation the motion's equations of mechanical systems in the generalized coordinates, *Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelineinye dinamicheskie sistemy: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* (Problems of mechanics and controls: Nonlinear dynamical systems: Transactions), Perm State University, Perm, 2005, no. 37, pp. 188–201.
14. Shimanovskii V.A., Ivanov V.N. Methods of generation of the motion's equations for systems of the associated rigid bodies in Cartesian coordinates, *Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelineinye dinamicheskie sistemy: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* (Problems of mechanics and controls: Nonlinear dynamical systems: Transactions), Perm State University, Perm, 2007, no. 39, pp. 248–262.
15. EULER: Program complex of the computer-aided dynamic analysis of multicomponent mechanical systems, ZAO AvtoMekhanika, 2011. <http://www.euler.ru/index.php/euler>

Received 28.02.2012

Ivanov Vladimir Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Perm State National Research University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia.

E-mail: precol@psu.ru

Dombrovskii Igor' Viktorovich, Candidate of Engineering, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia.

E-mail: dombrovski_iv@mz.perm.ru

Nabokov Feliks Vyacheslavovich, Candidate of Engineering, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia.

E-mail: nabokov-fv@yandex.ru

Shevelev Nikolai Alekseevich, Doctor of Engineering, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia.

E-mail: n.shevelev@pstu.ru

Shimanovskii Vladimir Aleksandrovich, Lecturer, Perm State National Research University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia.

E-mail: vlshim@psu.ru