УДК 517.988.63

© ***А. В. Чернов***

О ВОЛЬТЕРРОВОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА МОНОТОНИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ – заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое по Лебегу множество, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ – банаховы идеальные пространства измеримых на Π функций. Рассматривается нелинейное операторное уравнение:

$$x = \theta + AF[x], \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{1}$$

где $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ – линейный ограниченный оператор, $F : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ – некоторый оператор. Уравнение (1) является естественной формой описания широкого класса сосредоточенных и распределенных систем. Ранее В. П. Политюковым был предложен метод монотонизации для обоснования разрешимости уравнения вида (1) и получения поточечных оценок решения. Суть его состояла в том, что разрешимость уравнения (1) доказывалась (помимо прочих условий) для случая, когда I) оператор F допускал поправку вида $G = \lambda I$ до монотонного оператора $\mathcal{F}[x] = F[\theta + x] + G[x]$ такую, что II) $(I + AG)^{-1}A \geqslant 0$ ($\lambda > 0$, I — тождественный оператор). Как видно из примеров, приведенных в данной статье, условия I) и II) могут противоречить друг другу, что сужает сферу применения метода. Основной результат статьи в том, что в случае оператора A, обладающего свойством вольтерровости, естественным для эволюционных уравнений, требование монотонизируемости I) можно заменить требованием оценки оператора F на некотором конусном отрезке сверху и снизу через линейный оператор G плюс фиксированный элемент. Доказывается, что для глобальной разрешимости начально-краевой задачи, связанной с полулинейным эволюционным уравнением, достаточно, чтобы аналогичная начально-краевая задача, связанная с линейным уравнением, полученным путем оценки правой части исходного полулинейного уравнения на некотором конусном отрезке, имела положительное решение. В качестве иллюстрации рассматривается применение указанных результатов к системе Гурса–Дарбу, задаче Коши для волнового уравнения и первой краевой задаче для уравнения диффузии.

Ключевые слова: нелинейное операторное уравнение, разрешимость, метод монотонизации, вольтерровость.

Введение

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ – фиксированные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое[2] множество, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ – *банаховы идеальные пространства*[3] (БИП) измеримых на Π функций. Норму в пространстве $\mathcal{Z}^m$ понимаем как $\|.\|_{\mathcal{Z}^m} = \big\| |.| \big\|_{\mathcal{Z}}$. Здесь и далее модуль вектора понимаем как сумму модулей компонент. Аналогичным образом понимается норма в пространстве $\mathcal{X}^\ell$.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение вида:

$$x = \theta + AF[x], \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{0.1}$$

где $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — *линейный ограниченный оператор* (ЛОО), $F : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ — некоторый оператор, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$ — фиксированный элемент. Уравнение (0.1) интересно тем, что к нему естественным образом сводятся многие *начально-краевые задачи* (НКЗ) математической физики (см., в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П(9)).

[2]Измеримость здесь и далее понимаем в смысле Лебега.

[3]Напомним, что банахово пространство E измеримых функций называется банаховым идеальным пространством, если $\{y \in E, x$ – измеримая функция, $|x| \leqslant |y|\} \Longrightarrow \{x \in E, \|x\|_E \leqslant \|y\|_E\}$.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 2

частности, [1–6], а также примеры в § 6). В данной статье (для случая БИП) развивается *метод монотонизации*, предложенный в [1,2] для получения достаточных условий разрешимости уравнений вида (0.1) (в банаховом пространстве). Сформулируем соответствующий результат из [2].

Пусть E — банахово пространство, $K \subset E$ — правильный конус, определяющий на E отношение порядка «$\geqslant$» по правилу: $x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \in K$. Аналогично, $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K$. Для $x, y \in E$, $x \leqslant y$, конусный отрезок $\Big\{z \in E : x \leqslant z \leqslant y\Big\}$ обозначаем $[x; y]$. Оператор $A : E \to E$ называем положительным и пишем $A \geqslant 0$, если $AK \subset K$. Оператор $F : E \to E$ называем монотонным, если $F[x] \geqslant F[y]$ для всех $x, y \in E$, $x \geqslant y$. Кроме того, на протяжении всей статьи символ I обозначает тождественный оператор; $\rho(A)$ — спектральный радиус ЛОО A.

Лемма 1 (см. [2, теорема 2]). *Пусть $x^-, x^+ \in E$, $x^- \leqslant x^+$, и выполнены условия:*

(*a*) *$F : E \to E$ — непрерывный оператор и при некотором $\lambda > 0$ оператор $F + \lambda I$ является монотонным на отрезке $[x^-; x^+]$;* (*b*) *линейные операторы A, $(I + \lambda A)^{-1}$: $E \to E$ непрерывны, $(I + \lambda A)^{-1} A \geqslant 0$;* (*c*) *выполняются неравенства:*

$$(I + \lambda A)^{-1} A\big\{F[x^+] + \lambda x^+\big\} \leqslant x^+, \quad (I + \lambda A)^{-1} A\big\{F[x^-] + \lambda x^-\big\} \geqslant x^-.$$

Тогда последовательности $\{x_n^-\}$ и $\{x_n^+\}$, определяемые соотношениями:

$$x_{n+1}^- = (I + \lambda A)^{-1} A\big\{F[x_n^-] + \lambda x_n^-\big\}, \quad x_0^- = x^-; \quad x_{n+1}^+ = (I + \lambda A)^{-1} A\big\{F[x_n^+] + \lambda x_n^+\big\}, \quad x_0^+ = x^+,$$

сходятся соответственно к минимальному и максимальному решению уравнения

$$x = AF[x], \quad x \in E.$$

Далее в качестве конусов, полуупорядочивающих используемые нами БИП, мы везде предполагаем конусы неотрицательных функций (вектор-функций, неотрицательных по каждой компоненте). В частности, для пространства $\mathcal{X}^\ell$ соответствующий конус обозначаем $\mathcal{X}_+^\ell$; оператор $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ называем положительным и пишем $A \geqslant 0$, если $A\mathcal{Z}_+^m \subset \mathcal{X}_+^\ell$. В данной статье (для случая БИП) мы фактически ослабляем требование монотонизируемости оператора F за счет предположения о вольтерровости операторов A и F, естественного для уравнений вида (0.1), полученных редукцией НКЗ, связанных с эволюционными уравнениями математической физики. Для пояснения сказанного сформулируем следующее утверждение, по смыслу родственное лемме 1. Доказательство этого утверждения, которое мы здесь опускаем, нетрудно получить, используя теорему А. Тарского [7, теорема V.3.11] и [8, теорема I.6.17].

Теорема 1. *Пусть существуют ЛОО $G : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$, а также x^-, $x^+ \in \mathcal{X}^\ell$, $x^- \leqslant x^+$ такие, что выполняются следующие условия:*

A1) *оператор $\mathcal{F} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$, определяемый формулой $\mathcal{F}[x] = F[\theta + x] + G[x]$, является монотонным на конусном отрезке $[x^-; x^+]$;* A2) *$\rho(AG) < 1$;* A3) *$(I + AG)^{-1} A \geqslant 0$;* A4) *для всех $x \in [x^-; x^+]$ справедливо неравенство: $x^- \leqslant (I + AG)^{-1} A\mathcal{F}[x] \leqslant x^+$.*

Тогда уравнение (0.1) *разрешимо на конусном отрезке $[\theta + x^-; \theta + x^+]$.*

Требование A4) неконструктивно и неудобно для непосредственной проверки. Следующее утверждение (оно будет отправной точкой нашего исследования), содержащее достаточные условия выполнения требования A4) (и всех требований теоремы 1), уже вполне конструктивно.

Теорема 2. *Пусть $A \geqslant 0$ и при некоторых φ, $\psi \in \mathcal{Z}_+^m$ и $x^- = -A\psi$, $x^+ = A\varphi$ выполняются условия:*

Б1) *$F[\theta + A\varphi] \leqslant 0$, $F[\theta - A\psi] \geqslant 0$;* Б2) *существует ЛОО $G : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ такой, что оператор $\mathcal{F} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$, определяемый формулой $\mathcal{F}[x] = F[\theta + x] + G[x]$, является монотонным на конусном отрезке $[x^-; x^+]$;* Б3) *$\rho(AG) < 1$;* Б4) *$(I + AG)^{-1} A \geqslant 0$.*

Тогда оценка A4) *выполняется, и тем самым, справедливо утверждение теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем правую часть неравенства А4). Левая часть доказывается аналогично. Имеем:

$$AG[x^+] + A\varphi = x^+ + AG[x^+] \quad \Leftrightarrow \quad A\big(G[x^+] + \varphi\big) = (I + AG)[x^+] \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (I + AG)^{-1}AG[x^+] + (I + AG)^{-1}A\varphi = x^+.$$

Согласно условию Б4) отсюда получаем $(I + AG)^{-1}AG[x^+] \leqslant x^+$. Таким образом, пользуясь условиями Б1), Б2) и Б4), для всех $x \in [x^-; x^+]$ получаем:

$$(I + AG)^{-1}A\mathcal{F}[x] \leqslant (I + AG)^{-1}A\mathcal{F}[x^+] \leqslant (I + AG)^{-1}AG[x^+] \leqslant x^+.$$

□

Формулировки теорем 1 и 2 содержат следующие два требования I) и II), которые могут (см. § 3) оказаться противоречащими друг другу:

I) существует ЛОО $G : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ такой, что оператор $\mathcal{F} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$, определяемый формулой $\mathcal{F}[x] = F[\theta + x] + G[x]$, является монотонным на конусном отрезке $[x^-; x^+]$ (иначе говоря, оператор F является *монотонизируемым* с помощью оператора G);

II) ЛОО $(I + AG)^{-1}A \geqslant 0$.

Далее, опираясь на предположение о вольтерровости операторов A, F и G, мы заменим требование монотонизируемости оператора F требованием оценки оператора F сверху и снизу на некотором конусном отрезке через линейный оператор G плюс фиксированный элемент. Вольтерровость указанных операторов — весьма распространенное свойство уравнения (0.1), появляющееся всегда, когда это уравнение есть редукция той или иной НКЗ, связанной с эволюционным уравнением (например, уравнением гиперболического или параболического типа, см. примеры § 6). Поэтому использование вольтерровости операторов для обоснования разрешимости уравнения (0.1), на наш взгляд, довольно естественно. Применение основного результата статьи в упомянутых примерах показывает, что для глобальной разрешимости НКЗ, связанной с полулинейным эволюционным уравнением, достаточно, чтобы аналогичная НКЗ, связанная с линейным уравнением, полученным путем оценки нелинейной правой части уравнения на конусном отрезке, имела положительное решение.

§ 1. Формулировка основного утверждения

Прежде всего дадим необходимые определения.

Определение 1. Измеримое подмножество $H \subset \Pi$ будем называть *вольтерровым множеством*[4] оператора $L : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$, если выполняется равенство $P_H L P_H = P_H L$, где P_H – это оператор умножения на характеристическую функцию множества H. Соответственно, систему всех вольтерровых множеств оператора L будем обозначать $\mathcal{B}(L)$.

Заметим, что система $\mathcal{B}(L)$ заведомо непуста, так как во всяком случае содержит $\varnothing$ и множество Π. Если $\mathcal{B}(L)$ состоит только из этих двух множеств, будем называть ее *тривиальной*. Предположим, система $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(F)$ нетривиальна. Тогда для всякого $H \in \mathcal{B}$ мы получаем H-локальный аналог уравнения (0.1), подействовав на него оператором P_H. Решение этого локального аналога естественно искать в пространстве $P_H\mathcal{X}^\ell$ и называть *H-локальным решением* уравнения (0.1). При этом Π-локальное решение логично именовать *глобальным решением* уравнения (0.1).

Определение 2. Пусть для ЛОО $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ система $\mathcal{B}(A)$ нетривиальна. Тогда для произвольного числа $\delta > 0$ подсистему $\mathcal{T} = \Big\{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\} \subset \mathcal{B}(A)$ будем, следуя [10, 11], называть *вольтерровой δ-цепочкой* оператора A, если для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$, выполняется неравенство $\Big\|P_h A P_h\Big\| < \delta$.

[4]Впервые данное понятие было определено в [9]; см. также [3].

Теорема 3. *Пусть $A \geqslant 0$ и существуют φ, $\psi \in \mathcal{Z}^m_+$ такие, что для $x^+ = A\varphi$ и $x^- = -A\psi$ выполняются следующие условия:*

1) *существует положительный ЛОО $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ такой, что: $\big|F[x] - F[y]\big| \leqslant L\big[|x-y|\big]$ для всех $x, y \in [x^-; x^+]$; 2) существует ЛОО $G : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ такой, что: $G[x^-] \leqslant F[\theta + x] + G[x] \leqslant G[x^+]$ для всех $x \in [x^-; x^+]$; 3) оператор A обладает для всякого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой $\mathcal{T}_\delta \in \mathcal{B}(F) \cap \mathcal{B}(G) \cap \mathcal{B}(L)$; 4) $(I + AG)^{-1}A \geqslant 0$.*

Тогда на конусном отрезке $[\theta+x^-; \theta+x^+]$ уравнение (0.1) имеет в точности одно решение.

Далее будет показано, что при выполнении условия 3) теоремы 3 ЛОО AG квазинильпотентен, а потому оператор $(I + AG)$ обратим и условие 4) имеет смысл. Доказательство теоремы 3 см. в § 5.

§ 2. Обсуждение условия 1) теоремы 3

Укажем важный для приложений случай, когда условие 1) теоремы 3 заведомо выполняется. Именно он обычно реализуется при переходе от НКЗ, связанной с полулинейным уравнением, к уравнению вида (0.1) (см. примеры в § 6). Пусть БИП $\mathcal{Z}_0$ таково, что $\|yx\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \|y\|_{\mathcal{Z}_0}\|x\|_{\mathcal{X}}$ для всех $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Z}_0$, а оператор F является оператором суперпозиции $F[x] = f\big(.,x(.)\big)$, где функция $f = f(t,x) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям:

- $\mathbf{F}_1$) $f(t,x)$ дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^\ell$ для *почти всех* (п.в.) $t \in \Pi$ и вместе с производной $f'_x(t,x)$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $x \in \mathbb{R}^\ell$;
- $\mathbf{F}_2$) $f\big(.,x(.)\big) \in \mathcal{Z}^m$, $f'_x\big(.,x(.)\big) \in \mathcal{Z}_0^{m\times\ell}$ для всех $x \in [x^-; x^+]$.

Покажем, что при выполнении предположений $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) условие 1) теоремы 3 будет выполнено. Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением, которое можно получить непосредственно из [12, предложение Д1.2, с.326, и теорема Д1.4, с.327].

Лемма 2. *Пусть $S(\Pi)$ — пространство измеримых почти всюду конечных функций на Π, $l \in \mathbb{N}$, $a(.), b(.) \in S^l(\Pi)$ — измеримые на Π l-вектор-функции, причем $a(t) \leqslant b(t)$ для п.в. $t \in \Pi$, а функция $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $y \in \mathbb{R}^l$. Тогда функция $\varphi(t) \equiv \max\limits_{y\in[a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$ измерима на Π, и более того, существует функция $\theta(.)$ из семейства $M[a;b] \equiv \Big\{y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t); b(t)]\Big\}$ такая, что $\Phi(t,\theta(t)) = \varphi(t)$ для п.в. $t \in \Pi$.*

Выберем произвольно $x, y \in [x^-; x^+]$ и положим $\Delta = x - y$. Пользуясь условиями $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), а также леммой Адамара и неравенством Коши-Буняковского, можем оценить:

$$\big|F[x] - F[y]\big| = \left|\int_0^1 \big(f'_x(.,y+\theta\Delta),\Delta\big)\,d\theta\right| \leqslant \int_0^1 \big|f'_x(.,y+\theta\Delta)\big|\,d\theta\,|\Delta|. \qquad (2.1)$$

Для п.в. $t \in \Pi$ положим $z(t) = \max\limits_{x\in\left[x^-(t);x^+(t)\right]} \big|f'_x(t,x)\big|$. В соответствии с леммой 2 найдется измеримая функция $\gamma(.) \in [x^-; x^+]$ такая, что $z = \Big|f'_x\big(.,\gamma(.)\big)\Big|$. В силу идеальности пространства $\mathcal{X}$ имеем: $\gamma \in \mathcal{X}^\ell$. Отсюда в силу условия $\mathbf{F}_2$) получаем, что $z \in \mathcal{Z}_0$, и кроме того, оператор L, определяемый формулой $L[x] = z \cdot x$, является положительным ЛОО $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$. При этом, согласно нашему построению, $\big|F[x] - F[y]\big| \leqslant L\big[|x-y|\big]$ для любых $x, y \in [x^-; x^+]$, то есть условие 1) теоремы 3 выполняется.

§ 3. Обсуждение условия 2) теоремы 3

Разумеется, условие 2) теоремы 3 может быть выполнено лишь тогда, когда $F[\theta + x^+] \leqslant 0$, $F[\theta + x^-] \geqslant 0$, что соответствует условию Б1) теоремы 2. Понятно, что при выполнении этих двух неравенств в случае монотонности оператора $\mathcal{F}[x] = F[\theta + x] + G[x]$ (монотонизируемости оператора F с помощью некоторого ЛОО G) условие 2) выполняется автоматически. Покажем, что обратное, вообще говоря, не верно, то есть условие 2) может быть выполнено и при отсутствии монотонизируемости оператора F.

Для наглядности предположим, что $\theta = 0$, $m = \ell = 1$, а оператор F является оператором суперпозиции вида $F[x](t) = \gamma(t) f\big(x(t)\big)$, где функция $f(x)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}$, причем $f\big(x^+(t)\big) \leqslant 0$, $f\big(x^-(t)\big) \geqslant 0$, $f\big(.,x(.)\big) \in \mathcal{X}$ для всех $x \in \mathcal{X}$, а функция $\gamma(t) \geqslant 0$ для п.в. $t \in \Pi$, причем $\|\gamma\, x\|_{\mathcal{Z}} \leqslant K\, \|x\|_{\mathcal{X}}$. Кроме того, будем предполагать, что функции $x^- = -A\psi$ и $x^+ = A\varphi$ почти всюду конечны и нашлись две функции k_-, $k_+ \in L_\infty(\Pi)$, k_-, $k_+ > 0$, такие, что при почти каждом $t \in \Pi$ выполняется неравенство

$$y_-(x)[t] \leqslant f(x) \leqslant y_+(x)[t] \quad \forall x \in \big[x^-(t); x^+(t)\big],$$

где $y = y_-(x)[t] = k_-(t)\big(x^-(t) - x\big)$, $y = y_+(x)[t] = k_+(t)\big(x^+(t) - x\big)$ — две прямые, ограничивающие график функции $y = f(x)$ на отрезке $\big[x^-(t); x^+(t)\big]$ снизу и сверху соответственно. Выбирая $k = \max\{k_-; k_+\}$, получаем:

$$k(t)\big(x^-(t) - x\big) \leqslant f(x) \leqslant k(t)\big(x^+(t) - x\big) \quad \forall x \in \big[x^-(t); x^+(t)\big].$$

Таким образом, формула $G[x] = \gamma\, k\, x$ определяет положительный ЛОО $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ такой, что

$$G[x^-] - G[x] \leqslant F[x] \leqslant G[x^+] - G[x] \quad \forall x \in [x^-; x^+],$$

то есть условие 2) выполняется. Заметим, что производная функции $f(x)$ (если она вообще существует) может быть при этом сколь угодно велика и даже неограниченна. Вместе с тем, для того, чтобы обеспечить монотонизируемость оператора F в описанной ситуации, нам пришлось бы потребовать, чтобы $f'(x) \geqslant -k_1$ при $k_1 = k_1(t) \geqslant 0$ для всех $x \in \big[x^-(t); x^+(t)\big]$, и соответственно, взять $G[x] = \gamma\, k_1\, x$.

Отметим, что и в том случае, когда монотонизируемость имеет место, совокупность условий 2), 4) теоремы 3 все равно остается менее ограничительной, нежели совокупность условий Б2), Б4) теоремы 2. Дело здесь в следующем. Предположим, что поправка до монотонного оператора имеет вид $G[x] = k\, x$, где k — фиксированная неотрицательная функция, либо положительное число, а уравнение (0.1) получено редукцией некоторой НКЗ, связанной с полулинейным уравнением. Из предыдущего абзаца видно, что множитель k должен быть достаточно велик. С другой стороны, условие $(I + AG)^{-1}A \geqslant 0$ в терминах исходной НКЗ означает, как правило, что аналогичная НКЗ, связанная с линейным уравнением, полученным заменой правой части выражением $z - k\, x$, $z \geqslant 0$, должна иметь неотрицательное решение. А это может оказаться возможным лишь при достаточно малом множителе k (см. первые два примера в § 6).

§ 4. Вспомогательные утверждения

Лемма 3 (см. [13]). *Пусть $B : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$ — ЛОО, обладающий для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой. Тогда спектральный радиус $\rho(B) = 0$.*

Лемма 4. *Пусть $B = \prod\limits_{j=1}^{k} B_j$, где $B_j : E_j \to E_{j+1}$, $j = \overline{1,k}$, — линейные операторы; E_j, $j = \overline{1,k+1}$, — БИП (или прямые произведения БИП). Пусть, кроме того, $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{j=1}^{k} \mathcal{B}(B_j)$. Тогда для любых двух множеств H_1, $H_2 \in \mathcal{B}$ таких, что $H_1 \subset H_2$, $H_2 \setminus H_1 = h$, имеем: $P_h B P_h = \prod\limits_{j=1}^{k} \big(P_h B_j P_h\big)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $k = 2$:

$$P_h B_1 B_2 P_h = P_h P_{H_2} B_1 B_2 P_h = P_h P_{H_2} B_1 P_{H_2} B_2 P_h = P_h B_1 (P_{H_1} + P_h) B_2 P_h =$$

$$= P_h B_1 (P_{H_1} B_2 P_h + P_h B_2 P_h) = P_h B_1 P_h B_2 P_h,$$

так как $P_{H_1} B_2 P_h = P_{H_1} B_2 P_{H_1} P_h = P_{H_1} B_2 0 = 0$. Дальнейшее доказательство очевидным образом проводится по индукции. □

Лемма 5. *Пусть $A \geqslant 0$, $\rho(AG) < 1$, и при $x^+ = A\varphi$, $x^- = -A\psi$, где φ, $\psi \in \mathcal{Z}_+^m$, выполнены предположения* 2) *и* 4) *теоремы* 3. *Тогда оператор $\mathcal{F}[x] = (I + AG)^{-1} A\big(F[\theta + x] + G[x]\big)$ не выводит из конусного отрезка $[x^-; x^+]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 2, получаем:

$$(I + AG)^{-1} AG[x^+] \leqslant x^+, \quad (I + AG)^{-1} AG[x^-] \geqslant x^-.$$

Таким образом, используя предположения 2) и 4) теоремы 3, для всех $x \in [x^-; x^+]$ имеем:

$$x^- \leqslant (I + AG)^{-1} AG[x^-] \leqslant \mathcal{F}[x] \leqslant (I + AG)^{-1} AG[x^+] \leqslant x^+.$$

□

Лемма 6. *Пусть для ЛОО $L : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ и $G : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ выполнено предположение* 3) *теоремы* 3. *Тогда спектральные радиусы:* I) $\rho(AG) = 0$; II) $\rho\big((I + AG)^{-1} A(L + G)\big) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с леммой 3 достаточно показать, что для всякого $\delta > 0$ цепочка $\mathcal{T}_\delta$ (см. условие 3) теоремы 3) является вольтерровой δ-цепочкой ЛОО AG и $(I + AG)^{-1} A(L + G)$.

I) Зафиксируем любое $\delta > 0$ и предположим, что цепочка $\mathcal{T}_\delta$ имеет вид $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\delta = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$. Поскольку $H_j \in \mathcal{B}(A) \cap \mathcal{B}(G)$, $j = \overline{0, k}$, то

$$P_{H_j} AG = P_{H_j} A P_{H_j} G = P_{H_j} A P_{H_j} G P_{H_j} = P_{H_j} AG P_{H_j},$$

то есть $H_j \in \mathcal{B}(AG)$, и, таким образом, $\mathcal{T}$ является вольтерровой цепочкой оператора AG. При этом учитывая, что $\mathcal{T}$ – вольтеррова δ-цепочка ЛОО A и в соответствии с леммой 4 получаем:

$$\|P_h AG P_h\| = \|P_h A P_h G P_h\| \leqslant \|P_h A P_h\| \cdot \|G\| \leqslant \delta \, \|G\|$$

для всякого $h = H_j \setminus H_{j-1}$, $j = \overline{1, k}$. Отсюда очевидно, что ЛОО AG обладает вольтерровой δ-цепочкой для любого $\delta > 0$. Стало быть по лемме 3 спектральный радиус $\rho(AG) = 0$. Отсюда, в свою очередь, следует существование ЛОО

$$(I + AG)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (AG)^k. \tag{4.1}$$

II) Из представления (4.1) понятно, что для всякого $\delta > 0$ цепочка $\mathcal{T}_\delta \subset \mathcal{B}\big((I + AG)^{-1}\big)$, а следовательно, $\mathcal{T}_\delta \subset \mathcal{B}\big((I + AG)^{-1} A(L + G)\big)$ (см. условие 3) теоремы 3). При этом для всякого $h = H_j \setminus H_{j-1}$, $j = \overline{1, k}$, в соответствии с леммой 4 получаем:

$$\big\|P_h (I + AG)^{-1} A(L + G) P_h\big\| = \big\|P_h (I + AG)^{-1} P_h A P_h (L + G) P_h\big\| \leqslant$$

$$\leqslant \big\|(I + AG)^{-1}\big\| \cdot \big\|P_h A P_h\big\| \cdot \|L + G\| \leqslant \big\|(I + AG)^{-1}\big\| \cdot \|L + G\| \cdot \delta.$$

Отсюда очевидно, что ЛОО $(I + AG)^{-1} A(L + G)$ обладает вольтерровой δ-цепочкой для всех $\delta > 0$. Таким образом, по лемме 3 спектральный радиус $\rho\big((I + AG)^{-1} A(L + G)\big) = 0$. □

Лемма 7. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 3. *Тогда существует число $k \in \mathbb{N}$ такое, что для оператора $\mathcal{F} : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$, определяемого формулой*

$$\mathcal{F}[x] = (I + AG)^{-1} A\big(F[\theta + x] + G[x]\big),$$

степень $\mathcal{F}^k$ является сжимающим оператором на конусном отрезке $[x^-; x^+]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С целью упрощения выкладок предположим, что $m = \ell = 1$. В соответствии с леммой 6 и формулой И.М. Гельфанда спектральный радиус

$$\rho\big((I+AG)^{-1}A(L+G)\big) = \lim_{\mu\to\infty} \sqrt[\mu]{\Big\|\big[(I+AG)^{-1}A(L+G)\big]^{\mu}\Big\|} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty}\Big\|\big[(I+AG)^{-1}A(L+G)\big]^{\mu}\Big\|$ сходится. В таком случае общий член ряда стремится к нулю. Поэтому существует число $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\Big\|\big[(I+AG)^{-1}A(L+G)\big]^{k}\Big\| \leqslant \alpha < 1.$$

Выберем произвольно $x, y \in [x^-; x^+]$ и пользуясь леммой 5, а также предположением 1) теоремы 3, оценим:

$$\big|\mathcal{F}^k[x] - \mathcal{F}^k[y]\big| = \Big|\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{k-1}[x]\big] - \mathcal{F}\big[\mathcal{F}^{k-1}[y]\big]\Big| = \Big|(I+AG)^{-1}\cdot$$
$$\cdot A\Big[F\big[\theta + \mathcal{F}^{k-1}[x]\big] + G\big[\mathcal{F}^{k-1}[x]\big] - F\big[\theta + \mathcal{F}^{k-1}[y]\big] - G\big[\mathcal{F}^{k-1}[y]\big]\Big]\Big| \leqslant$$
$$\leqslant (I+AG)^{-1}A\Big[\big|\ldots\big|\Big] \leqslant (I+AG)^{-1}A(L+G)\Big[\big|\mathcal{F}^{k-1}[x] - \mathcal{F}^{k-1}[y]\big|\Big].$$

По индукции, таким образом, получаем:

$$\big|\mathcal{F}^k[x] - \mathcal{F}^k[y]\big| \leqslant \Big\{(I+AG)^{-1}A(L+G)\Big\}^k\big[|x-y|\big],$$

следовательно, $\Big\|\mathcal{F}^k[x] - \mathcal{F}^k[y]\Big\| \leqslant \alpha\,\|x-y\|$. Доказательство для общего случая нетрудно получить, если воспользоваться следующей далее леммой. $\square$

Лемма 8. *Пусть* $A = \big\{A^{(1)}, \ldots, A^{(\ell)}\big\} : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ *– монотонный ЛОО:* $A \geqslant 0$. *Тогда существует положительный ЛОО* $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, *определяемый формулой:* $B[z] = \sum\limits_{i=1}^{\ell} A^{(i)}[z \cdot \vec{e}]$, $\vec{e} = \{1, \ldots, 1\} \in \mathbb{R}^m$, *такой, что* $\big|A[z]\big| \leqslant B\big[|z|\big]$ *для всех* $z \in \mathcal{Z}^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидным образом следует из монотонности оператора A, а также оценки: $-|z| \leqslant -|z^{(i)}| \leqslant z^{(i)} \leqslant |z^{(i)}| \leqslant |z|$ для каждого $z \in \mathcal{Z}^m$. $\square$

Следующее утверждение практически очевидно.

Лемма 9. *Множество* $\mathcal{X}^\ell_+$ *замкнуто в* $\mathcal{X}^\ell$.

§ 5. Доказательство теоремы 3

В соответствии с леммой 9 конусный отрезок $[x^-; x^+]$ является замкнутым множеством в $\mathcal{X}^\ell$. Прежде всего, преобразуем уравнение (0.1) к некоторому эквивалентному уравнению. Во-первых, перепишем его в виде:

$$x - \theta = AF[x - \theta + \theta], \quad x \in \mathcal{X}^\ell. \tag{5.1}$$

В уравнении (5.1) сделаем замену: $x - \theta = z$. Получим:

$$z = AF[\theta + z], \quad z \in \mathcal{X}^\ell. \tag{5.2}$$

Добавим к обеим частям уравнения (5.2) слагаемое $AG[z]$:

$$(I+AG)[z] = A\Big(F[\theta+z] + G[z]\Big), \quad z \in \mathcal{X}^\ell. \tag{5.3}$$

Подействуем на уравнение (5.3) оператором $(I+AG)^{-1}$. В соответствии с леммой 6 уравнение (5.3) будет эквивалентно следующему уравнению:

$$z=\mathcal{F}[z],\quad z\in\mathcal{X}^{\ell},\tag{5.4}$$

где $\mathcal{F}[z]=(I+AG)^{-1}A\big(F[\theta+z]+G[z]\big)$. Согласно лемме 5 оператор $\mathcal{F}$, а следовательно, и любая его степень не выводит из конусного отрезка $[x^-;x^+]$. По лемме 7 существует число $k\in\mathbb{N}$ такое, что степень $\mathcal{F}^k$ является сжимающим оператором на множестве $[x^-;x^+]$. Таким образом, в соответствии с принципом сжимающих отображений (см., например, [14, теорема 7.2.2, с.432]), существует единственная неподвижная точка оператора $\mathcal{F}$ на множестве $[x^-;x^+]$. □

§ 6. Примеры

Чтобы пояснить методику применения теоремы 3 к доказательству глобальной разрешимости НКЗ, рассмотрим следующие иллюстративные примеры.

6.1. Система Гурса–Дарбу[5] (для упрощения выкладок начально-краевые условия берем нулевые)

$$\begin{cases} x''_{t_1t_2}=f(t,x), & t=(t_1,t_2)\in\Pi=[0;1]\times[0;1],\\ x(0,t_2)=x(t_1,0)=0, & t_1,t_2\in[0;1],\end{cases}\tag{6.1}$$

где $f(t,x)=\gamma\,\big(g(t,x)-x\big)$, $\gamma\in(0;1]$ – некоторая константа, а функция $g(t,x)$ удовлетворяет условиям:

G$_1$) $g(t,x)$ дифференцируема по $x\in\mathbb{R}$ для п.в. $t\in\Pi$ и вместе с производной $g'_x(t,x)$ измерима по $t\in\Pi$ и непрерывна по $x\in\mathbb{R}$;

G$_2$) $\Big|g(t,x)\Big|\leqslant|x|$ для всех $x\in[-1;1]$ и п.в. $t\in\Pi$;

G$_3$) $g'_x\big(.,x(.)\big)\in L_\infty(\Pi)$ для всех $x\in L_\infty(\Pi)$ таких, что $x(t)\in[-1;1]$ при п.в. $t\in\Pi$.

Понимая решение задачи (6.1) в смысле п.в., будем искать его в классе $W(\Pi)$ абсолютно непрерывных на Π функций, имеющих первые частные производные и смешанную производную в классе $L_\infty(\Pi)$. Задача (6.1) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$x(t)=\int_0^{t_1}d\xi\int_0^{t_2}f\big(\xi,\eta,x(\xi,\eta)\big)\,d\eta,\quad x\in W(\Pi).\tag{6.2}$$

Определим операторы $A:L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)$, $F:L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)$ с помощью формул:

$$A[z](t)=\int_0^{t_1}d\xi\int_0^{t_2}z(\xi,\eta)\,d\eta,\quad F[z](t)=f\big(t,z(t)\big),\quad z\in L_\infty(\Pi),\quad t\in\Pi.$$

Интегральное уравнение (6.2) можно переписать в эквивалентной операторной форме:

$$x=AF[x],\quad x\in L_\infty(\Pi).\tag{6.3}$$

Положив $\varphi=\psi\equiv1$, $x^+(t)=A[1](t)=t_1t_2$, $x^-(t)=-x^+(t)$, проверим выполнение условий теоремы 3. Сравнивая условия **G**) с условиями **F**) из § 2 и пользуясь результатами § 2, приходим к выводу, что условие 1) теоремы 3 выполняется с оператором $L:L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)$, представляющим собой оператор умножения на некоторую фиксированную функцию из $L_\infty(\Pi)$. Определив оператор $G:L_\infty(\Pi)\to L_\infty(\Pi)$ формулой

$$G[z](t)=\gamma\,z(t),\quad z\in L_\infty(\Pi),\quad t\in\Pi,$$

[5]Краткий обзор по работам, посвященным системе Гурса–Дарбу, см. в [15].

заметим, что согласно условию $\mathbf{G}_2$)

$$F[x]+G[x]=f(.,x)+\gamma\, x=\gamma\,\big(g(.,x)-x\big)+\gamma\, x\leqslant\gamma\,\big|g(.,x)\big|\leqslant\gamma\,\big|x\big|\leqslant G[x^+]$$

для всех $x\in\big[x^-(.),x^+(.)\big]$. И аналогично $F[x]+G[x]\geqslant G[x^-]$ для всех $x\in\big[x^-(.),x^+(.)\big]$. Таким образом, условие 2) теоремы 3 выполняется. Достаточно очевидно, что ЛОО A для всякого $\delta>0$ обладает вольтерровой δ-цепочкой вида $\mathcal{T}_\delta=\Big\{H_0,H_1,\ldots,H_k\Big\}$, где $H_i=\Big\{t\in\Pi:\quad t_1+t_2\leqslant\tau_i\Big\}$, $i=\overline{0,k}$, при произвольном выборе чисел $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_k=2$, $\tau_i-\tau_{i-1}<\sqrt{\delta}$, $i=\overline{1,k}$. При этом $\mathcal{B}(F)=\mathcal{B}(G)=\mathcal{B}(L)=\Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π. Отсюда понятно, что условие 3) теоремы 3 выполняется. Проверка условия 4) теоремы 3 при ее применении составляет основную трудность. В данном случае условие 4) будет выполнено, если уравнение

$$(I+AG)[x]=A[z],\quad x\in L_\infty(\Pi)$$

имеет неотрицательное решение для любого $z\in L_\infty(\Pi)$, $z\geqslant 0$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что линейная НКЗ вида

$$\begin{cases} x''_{t_1t_2}+\gamma\, x=z(t), & t=(t_1,t_2)\in\Pi=[0;1]\times[0;1],\\ x(0,t_2)=x(t_1,0)=0, & t_1,t_2\in[0;1]\end{cases}\tag{6.4}$$

имеет неотрицательное решение для любого $z\in L_\infty(\Pi)$, $z\geqslant 0$. Как известно (см., например, [16, § 14, теорема 2, с. 112], решение задачи (6.4) выражается формулой:

$$x(t)=\int_0^{t_1}d\xi\int_0^{t_2}J_0\left(\sqrt{4\gamma(t_1-\xi)(t_2-\eta)}\right)\,z(\xi,\eta)\,d\eta,\tag{6.5}$$

где $J_0(.)$ – функция Бесселя первого рода. Эта функция обладает, в частности, свойством: $J_0(\xi)>0$ по крайней мере при $\xi\in[0;2]$ (см., например, [17, с. 669, рис. 21.8-2]). В нашем случае ясно, что при $\gamma\in(0;1]$ имеет место соотношение

$$\sqrt{4\gamma(t_1-\xi)(t_2-\eta)}\in[0;2],$$

следовательно, $J_0\left(\sqrt{4\gamma(t_1-\xi)(t_2-\eta)}\right)>0$, и таким образом, решение задачи (6.4) будет неотрицательным при $z\geqslant 0$, то есть условие 4) теоремы 3 выполняется. Стало быть, согласно теореме 3 задача (6.1) имеет единственное решение в конусном отрезке $[-t_1t_2;t_1t_2]$.

6.2. Задача Коши для волнового уравнения (для упрощения выкладок начальные условия берем нулевые)

$$\begin{cases} x''_{t_1t_1}-c^2\,x''_{t_2t_2}=f(t,x), & t=(t_1,t_2)\in\Pi,\\ x(0,t_2)=0,\ x'_{t_1}(0,t_2)=0, & t_2\in[0;1],\end{cases}\tag{6.6}$$

где $c>0$ — константа, $\Pi=\Big\{t\in[0;1]\times[0;1]:\,ct_1\leqslant t_2\leqslant 1-ct_1\Big\}$ — попадающая в прямоугольник $[0;1]\times[0;1]$ часть сужающегося в направлении оси t_1 характеристического конуса, основанием которого служит отрезок начальных данных $\Gamma=\Big\{t\in\mathbb{R}^2\,:\,t_1=0,t_2\in[0;1]\Big\}$; $f(t,x)=\gamma\,\big(g(t,x)-x\big)$, $\gamma\in(0;4]$ — некоторая константа, а функция $g(t,x)$ удовлетворяет условиям $\mathbf{G}$) из п. 6.1. Решение задачи (6.6) будем понимать в обобщенном смысле. Прежде чем привести соответствующее определение[6], рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} x''_{t_1t_1}-c^2\,x''_{t_2t_2}=z(t), & t=(t_1,t_2)\in\Pi,\\ x(0,t_2)=0,\ x'_{t_1}(0,t_2)=0, & t_2\in[0;1],\end{cases}\tag{6.7}$$

[6] Мы следуем здесь [18, п. 2.4.2].

где $z \in L_\infty(\Pi)$. Положим для любых $x, \omega \in W_2^1(\Pi)$, $z \in L_\infty(\Pi)$

$$J[x,\omega,z] = \int_\Pi \Big\{ -x'_{t_1}\omega'_{t_1} + c^2 x'_{t_2}\omega'_{t_2} - z\omega \Big\}\, dt.$$

Функцию $x \in W_2^1(\Pi)$ назовем *обобщенным решением* задачи (6.7), если $x(0,t_2) = 0$, $t_2 \in [0;1]$, и для любой функции $\omega \in W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющей условию:

$$\omega(t) = 0, \quad t \in \partial\Pi \setminus \Gamma, \tag{6.8}$$

выполняется равенство $J[x,\omega,z] = 0$. Из результатов [19, глава 3, § 18], [20, глава 5, § 3] следует, что задача (6.7) для любого $z \in L_\infty(\Pi)$ имеет единственное решение в $W_2^1(\Pi)$. Непосредственным вычислением проверяется, что это решение, как и в классическом случае, дается формулой Даламбера:

$$x(t) = A[z](t) \equiv \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(t)} z(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \quad t \in \Pi, \tag{6.9}$$

где $\Delta(t) \equiv \Big\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in [0;1],\ |\xi_2 - t_2| \leqslant c\,(t_1 - \xi_1)\Big\}$ — попадающая в полосу $[0;t_1] \times \mathbb{R}$ часть характеристического конуса уравнения (6.7) с вершиной $t = (t_1,t_2)$. Из (6.9) следует, что решение задачи (6.7) принадлежит пространству $W_\infty^1(\Pi)$.

Обобщенным решением задачи (6.6) назовем такую функцию $x \in W_\infty^1(\Pi)$, для которой при любой функции $\omega \in W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющей условию (6.8), выполняется равенство

$$J\Big[x,\omega,f\big(.,x(.)\big)\Big] = 0.$$

В соответствии с данным определением и формулой (6.9) функция $x \in W_\infty^1(\Pi)$ является решением исходной задачи (6.6) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению:

$$x = AF[x], \quad x \in L_\infty(\Pi), \tag{6.10}$$

где оператор A можно понимать как ЛОО $L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$, а оператор $F : L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$ определяется формулой:

$$F[z](t) = f\big(t, z(t)\big), \quad z \in L_\infty(\Pi), \quad t \in \Pi.$$

Положив $\varphi = \psi \equiv 1$, $x^+(t) = A[1](t) = 0.5\, t_1^2$, $x^-(t) = -x^+(t)$, проверим выполнение условий теоремы 3. Дословно повторяя рассуждения из п.6.1, убеждаемся в выполнении условий 1) и 2) теоремы 3. Достаточно очевидно, что ЛОО A для всякого $\delta > 0$ обладает вольтерровой δ-цепочкой вида $\mathcal{T}_\delta = \Big\{H_0, H_1, \ldots, H_k\Big\}$, где $H_i = \Big\{t \in \Pi : \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \tau_i\Big\}$, $i = \overline{0,k}$, при произвольном выборе чисел $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = 1$, $\tau_i - \tau_{i-1} < \delta$, $i = \overline{1,k}$. При этом $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}(G) = \mathcal{B}(L) = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π. Отсюда понятно, что условие 3) теоремы 3 выполняется. Условие 4) теоремы 3 будет выполнено, если уравнение

$$(I + AG)[x] = A[z], \quad x \in L_\infty(\Pi)$$

имеет неотрицательное решение для любого $z \in L_\infty(\Pi)$, $z \geqslant 0$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что линейная задача вида

$$\begin{cases} x''_{t_1t_1} - c^2\, x''_{t_2t_2} + \gamma\, x = z(t), & t = (t_1,t_2) \in \Pi, \\ x(0,t_2) = 0,\ x'_{t_1}(0,t_2) = 0, & t_2 \in [0;1], \end{cases} \tag{6.11}$$

имеет неотрицательное решение для любого $z \in L_\infty(\Pi)$, $z \geqslant 0$. Как известно (см., например, [21, с. 265–268], [22, п. 4.1.3-3, с. 263]), решение задачи (6.11) выражается формулой:

$$x(t) = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(t)} J_0\left(\sqrt{\gamma\left[(t_1-\xi_1)^2 - \left(\frac{t_2-\xi_2}{c}\right)^2\right]}\right) z(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{6.12}$$

где $J_0(.)$ — функция Бесселя первого рода. Эта функция обладает, в частности, свойством: $J_0(\xi) > 0$ по крайней мере при $\xi \in [0;2]$ (см., например, [17, с. 669, рис. 21.8-2]). В нашем случае ясно, что при $\gamma \in (0;4]$ имеет место соотношение

$$\sqrt{\gamma \left[(t_1-\xi_1)^2 - \left(\frac{t_2-\xi_2}{c}\right)^2\right]} \in [0;2],$$

следовательно, $J_0(\ldots) > 0$, и таким образом, решение задачи (6.11) будет неотрицательным при $z \geqslant 0$, то есть условие 4) теоремы 3 выполняется. Стало быть, согласно теореме 3 задача (6.6) имеет единственное решение со значениями в промежутке $[-0.5\,t_1^2; 0.5\,t_1^2]$.

6.3. Первая краевая задача для уравнения диффузии.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область переменных $\overline{t} = (t_1,\ldots,t_n)$; $T > 0$ – заданное число. Положим $\Pi = \Pi_T \equiv (0,T)\times Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область переменных $t = (t_0;\overline{t})$; $S = S_T = (0,T)\times\partial Q$ – боковая поверхность цилиндра Π. По поводу используемых далее функциональных пространств см. [23, § 1.1]. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv x'_{t_0} - \sum_{j=1}^{n}\bigl(a(\overline{t})x'_{t_j}\bigr)'_{t_j} = f\Bigl(t, x(t)\Bigr), \quad t = \{t_0,\overline{t}\} \in \Pi; \tag{6.13}$$

$$x(t) = 0, \quad t \in S; \quad x(0,\overline{t}) = w(\overline{t}), \quad \overline{t} \in Q. \tag{6.14}$$

Будем предполагать, что $a \in \mathbb{C}^1(\overline{Q})$, $a > 0$, $w \in L_2(Q)$, $f(t,x) = g(t,x) - \gamma(t)\,x$, $\gamma \in L_\sigma(\Pi)$, $1/q + 1/\sigma = 1/2$, $\gamma > 0$, а функция $g(t,x)$ удовлетворяет условиям:

Y$_1$) $g(t,x)$ дифференцируема по $x \in \mathbb{R}$ для п.в. $t \in \Pi$ и вместе с производной $g'_x(t,x)$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $x \in \mathbb{R}$;

Y$_2$) $g\bigl(., x(.)\bigr) \in L_2(\Pi)$, $g'_x\bigl(., x(.)\bigr) \in L_\sigma(\Pi)$ для всех $x \in L_q(\Pi)$.

Здесь число q выбирается указанным далее образом. А именно, примем

$$q_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{n-2}, & \text{если} \quad n > 2; \quad +\infty, \quad \text{если} \quad n = 1,2, \end{cases}$$

и выберем некоторые числа $q_0 \in (2, q_n)$ и $r_0 > 2$ так, чтобы выполнялось равенство $r_0^{-1} + n(2q_0)^{-1} = n/4$. Кроме того, обозначим $\overline{q} = \min\{q_0, r_0\}$ и выберем $q \in (2, \overline{q})$. При таком выборе справедливо [23, § 2.3, с. 89] непрерывное (ограниченное) вложение

$$V_2(\Pi) \subset L_{q_0,r_0}(\Pi) \subset L_q(\Pi) \subset L_2(\Pi). \tag{6.15}$$

Установленное вложение будет весьма существенным для наших дальнейших построений.

Решение задачи (6.13), (6.14) будем понимать в указанном далее обобщенном смысле. Чтобы дать строгое определение и обосновать его корректность, рассмотрим, прежде всего, для $z \in L_2(\Pi)$ вспомогательное уравнение:

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi, \tag{6.16}$$

в совокупности с начально-краевыми условиями (6.14). Для $x \in V_2^{1,0}(\Pi)$, $\varphi \in W_2^{1,1}(\Pi)$, $z \in L_2(\Pi)$, $w \in L_2(Q)$, $\xi \in [0,T]$ положим:

$$I[x,z,w,\varphi,\xi] = \int_0^\xi dt_0 \int_Q \Bigl\{-x\varphi'_{t_0} + \sum_{j=1}^{n} a x'_{t_j}\varphi'_{t_j} - \varphi z\Bigr\}\,d\overline{t} + \int_Q x(\xi,\overline{t})\varphi(\xi,\overline{t})\,d\overline{t} - \int_Q w(\overline{t})\varphi(0,\overline{t})\,d\overline{t}.$$

Следуя [23], *обобщенным решением задачи* (6.16), (6.14) для заданных $z \in L_2(\Pi)$, $w \in L_2(Q)$ назовем функцию $x \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$, удовлетворяющую для п.в. $\xi \in [0,T]$ условию:

$$I[x,z,w,\varphi,\xi] = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi).$$

Замечание 1. Заменяя в приведенном определении число T на $\tau \in (0,T)$ и множество $\Pi = \Pi_T$ на Π_τ, получим определение решения задачи (6.16), (6.14) на цилиндре Π_τ. Очевидно, что всякое решение на множестве Π (глобальное решение) является решением и на множестве Π_τ (локальным решением) для всех $\tau \in (0,T)$.

Соответственно, *обобщенным решением задачи* (6.13), (6.14) для заданного $w \in L_2(Q)$ будем называть функцию $x \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$, удовлетворяющую для п.в. $\xi \in [0,T]$ условию:

$$I\Big[x, f(.,x), w, \varphi, \xi\Big] = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi).$$

Из [23, глава 3, теоремы 2.1, 4.2] получаем следующее утверждение.

Лемма 10. *Для любых функций $z \in L_2(\Pi)$, $w \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $x \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ задачи* (6.16), (6.14). *Для этого решения справедливо энергетическое неравенство: $\|x\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leqslant K \cdot \Big\{\|w\|_{L_2(Q)} + \|z\|_{L_2(\Pi)}\Big\}$.*

Поскольку $\mathrm{Ker} I[.,\varphi,\xi]$ – линейное множество для любого $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi)$ и п.в. $\xi \in [0,T]$, то по лемме 10 всякое решение задачи (6.16), (6.14) представимо в виде: $x = \Theta[w] + A[z]$, где $\Theta : L_2(Q) \to \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$, $A : L_2(\Pi) \to \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ — ЛОО. А именно, $\Theta[w]$ — это решение задачи (6.16), (6.14) при $z = 0$, $A[z]$ – решение задачи (6.16), (6.14) при $w = 0$. Поэтому исходная задача эквивалентна операторному уравнению:

$$x = \theta + A\Big[f(.,x)\Big], \quad x \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi), \tag{6.17}$$

где $\theta = \Theta[w]$ (начальные данные w считаем фиксированными). Кроме того, принятое нами понятие обобщенного решения задачи (6.13), (6.14) оказывается корректным, поскольку наши предположения относительно правой части уравнения согласованы со свойствами операторов A и Θ, вытекающими из леммы 10. Согласно ограниченному вложению (6.15) уравнение (6.17) эквивалентно уравнению:

$$x = \theta + A\Big[f(.,x)\Big], \quad x \in L_q(\Pi), \tag{6.18}$$

причем норма $\|A[z]\|_{L_q(\Pi)} \leqslant M \cdot \|A[z]\|_{V_2(\Pi)}$, и согласно лемме 10 норма $\|A[z]\|_{V_2(\Pi)} \leqslant K \cdot \|z\|_{L_2(\Pi)}$ для всех $z \in L_2(\Pi)$. Таким образом, можно рассматривать оператор A как ЛОО $L_2(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Заметим, что уравнение (6.18) является уравнением вида (0.1) при $\ell = m = 1$, $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $F[x] = f(.,x)$.

Из проведенных рассуждений видно, что редукция управляемой НКЗ к функционально-операторному уравнению вида (0.1) оказывается довольно естественной. Действительно, все, что мы использовали в проведенных выше рассуждениях — это утверждение о существовании единственного решения для соответствующей линейной задачи (6.16), (6.14), некоторое энергетическое неравенство для этого решения (см. лемму 10), и наконец, вложение (6.15).

Применим к уравнению (6.18) теорему 3. Как и ранее, будем считать для простоты начальные условия нулевыми: $w = 0$, и соответственно, $\theta = 0$. Кроме того, примем $\varphi = \psi \equiv 1$, $x^+ = A[1]$, $x^- = -x^+$, и дополнительно будем считать выполненным следующее условие:

$\mathbf{Y}_3$) $\big|g(.,x)\big| \leqslant \gamma\,|x|$ для всех $x \in [x^-; x^+]$.

Сравнивая условия $\mathbf{Y}$) с условиями $\mathbf{F}$) из § 2 и пользуясь результатами § 2, приходим к выводу, что условие 1) теоремы 3 выполняется с оператором $L : L_q(\Pi) \to L_2(\Pi)$, представляющим собой оператор умножения на некоторую фиксированную функцию из $L_\sigma(\Pi)$. Определив оператор $G : L_q(\Pi) \to L_2(\Pi)$ формулой

$$G[x](t) = \gamma(t)\,x(t), \quad x \in L_q(\Pi), \quad t \in \Pi,$$

заметим, что согласно условию $\mathbf{Y}_3$)

$$F[x]+G[x]=f(.,x)+\gamma\,x=g(.,x)-\gamma\,x+\gamma\,x\leqslant\big|g(.,x)\big|\leqslant\gamma\,\big|x\big|\leqslant G[x^+]$$

для всех $x\in\big[x^-(.),x^+(.)\big]$. И аналогично $F[x]+G[x]\geqslant G[x^-]$ для всех $x\in\big[x^-(.),x^+(.)\big]$. Таким образом, условие 2) теоремы 3 выполняется.

Проверим выполнение условия 3) теоремы 3. Непосредственно из замечания 1 получаем, что если для некоторого $\tau\in(0,T)$ сужение $z\Big|_{\Pi_\tau}=0$, а x – решение задачи (6.16), (6.14) при $w=0$, то $x\Big|_{\Pi_\tau}=0$. Иными словами, для $H=\Pi_\tau$, $\tau\in(0,T)$ и оператора P_H умножения на характеристическую функцию χ_H множества H справедливо равенство $P_HAP_{\Pi\setminus H}=0$. А в таком случае

$$P_HA=P_HA(P_H+P_{\Pi\setminus H})=P_HAP_H+P_HAP_{\Pi\setminus H}=P_HAP_H,$$

то есть $H=\Pi_\tau\in\mathcal{B}(A)$ для всех $\tau\in(0,T)$. Выберем произвольно число $\lambda>0$, а также τ', $\tau''\in(0;T)$ так, чтобы $0<\tau''-\tau'<\lambda$. Рассмотрим множество $h=\Pi_{\tau''}\setminus\Pi_{\tau'}$. Оценим норму $\|P_hAP_h\|_{L_2\to L_q}$.

Из проведенных выше построений видно, что разрешающий оператор A может рассматриваться как ЛОО $A:L_2(\Pi)\to L_\kappa(\Pi)$ для любого $\kappa\in(q,\overline{q})$. Поэтому для произвольного $z\in L_2(\Pi)$, $\|z\|\leqslant 1$ имеем: $y=A[\chi_hz]\in L_\kappa(\Pi)$, следовательно, $|y|^q\in L_\alpha(\Pi)$, где $\alpha=\kappa/q>1$, и таким образом,

$$\Big\||y|^q\Big\|_{L_\alpha}^\alpha=\|y\|_{L_\kappa}^\kappa=\Big\|A[\chi_hz]\Big\|_{L_\kappa}^\kappa\leqslant\|A\|_{L_2\to L_\kappa}^\kappa\cdot\|z\|_{L_2}^\kappa\leqslant\|A\|_{L_2\to L_\kappa}^\kappa\equiv\gamma^\alpha.$$

По неравенству Гельдера получаем: $\Big\|P_hAP_h[z]\Big\|_{L_q}^q=\Big\|\chi_hy\Big\|_{L_q}^q\leqslant\gamma\|\chi_h\|_{L_\beta}$, где $\beta^{-1}+\alpha^{-1}=1$. Отсюда понятно, что

$$\|P_hAP_h\|_{L_2\to L_q}\leqslant\gamma^{1/q}(\operatorname{mes}h)^{1/(q\beta)}\leqslant\gamma^{1/q}(\lambda)^{1/(q\beta)}(T_2)^{1/(q\beta)}\to+0$$

при $\lambda\to+0$. Поэтому оператор A обладает вольтерровой δ-цепочкой для всех $\delta>0$, то есть условие 3) теоремы 3 выполняется.

Убедимся в положительности оператора A. Отметим, прежде всего, что поскольку A — ЛОО, а множество неотрицательных функций $L_2^+(\Pi)$ замкнуто в $L_2(\Pi)$, нам достаточно доказать, что $A[z]\geqslant 0$ для всех неотрицательных z из какого-либо всюду плотного подмножества в пространстве $L_2(\Pi)$, в частности, из множества $\mathbb{C}_0^\infty(\Pi)$ всех бесконечно гладких финитных на Π функций (см., например, [24, § 4.7]). С другой стороны, для гладких функций $z\in\mathbb{C}_0^\infty(\Pi)$ $A[z]$ — это классическое решение задачи (6.16), (6.14) при $w=0$. Для такого решения выполняется принцип минимума (см., например, [25, п. 6.3.1, с. 367]), согласно которому $A[z]\geqslant 0$ для всех $z\in\mathbb{C}_0^\infty(\Pi)$, $z\geqslant 0$. Как видно из доказательства теоремы [24, § 4.7], всякая неотрицательная функция $z\in L_2(\Pi)$ может быть представлена в виде предела последовательности неотрицательных функций $\{z_k\}\subset\mathbb{C}_0^\infty(\Pi)$. Но в таком случае:

$$\Big\|A[z]-A[z_k]\Big\|_{L_2}\leqslant\|A\|\cdot\|z-z_k\|_{L_2}\to 0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

причем $A[z_k]\geqslant 0$. Поскольку из сходимости по норме в L_2 следует сходимость по мере, а из сходимости по мере — существование подпоследовательности, сходящейся п.в., то отсюда ясно, что $A[z]\geqslant 0$ для всех $z\in L_2^+(\Pi)$, то есть оператор A является положительным.

Наконец, проверим выполнение условия 4) теоремы 3. Условие 4) теоремы 3 будет выполнено, если уравнение

$$(I+AG)[x]=A[z],\quad x\in L_q(\Pi)$$

имеет неотрицательное решение для любого $z\in L_2(\Pi)$, $z\geqslant 0$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что линейная задача вида

$$x'_{t_0}-\sum_{j=1}^n\big(a(\overline{t})x'_{t_j}\big)'_{t_j}+\gamma(t)\,x(t)=z(t),\quad t=\{t_0,\overline{t}\}\in\Pi;\quad x(t)=0,\quad t\in S;\quad x(0,\overline{t})=0,\quad \overline{t}\in Q$$

имеет неотрицательное решение для любого $z \in L_\infty(\Pi)$, $z \geqslant 0$. Этот факт выводится из принципа минимума совершенно так же, как ранее была доказана положительность оператора A. Стало быть, согласно теореме 3 задача (6.13), (6.14) при сделанных предположениях имеет единственное решение в промежутке $[-x^+; x^+]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Политюков В.П. Решение некоторых нелинейных уравнений в банаховых пространствах с конусом и приложения // Доклады АН СССР. 1980. Т. 250. № 4. С. 818–822.
2. Политюков В.П. О методе монотонизации нелинейных уравнений в банаховом пространстве // Математические заметки. 1988. Т. 44. № 6. С. 814–822.
3. Сумин В.И., Чернов А.В. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39–49.
4. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
5. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
6. Чернов А.В. О сходимости метода простой итерации для решения нелинейных функционально-операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (1). С. 149–155.
7. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
9. Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений / ННГУ. Нижний Новгород, 2000. 75 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.2000. № 1198-В00.
10. Сумин В.И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
11. Сумин В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.
12. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
13. Сумин В.И., Чернов А.В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
14. Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. М.: МАИ, 1996. 744 с.
15. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 52–67.
16. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 2003. 255 с.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1970. 720 с.
18. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Нижний Новгород: ННГУ, 1992. 110 с.
19. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
20. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
21. Будак Б.М., Тихонов А.Н., Самарский А.А. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 686 с.
22. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
23. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
24. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005. 352 с.

25. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 400 с.

Поступила в редакцию 15.02.2012

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: chavnn@mail.ru

A. V. Chernov

On Volterra type generalization of monotonization method for nonlinear functional operator equations

Keywords: nonlinear operator equation, solvability, monotonization method, Volterra property.

Mathematical Subject Classifications: 47J05, 47J35

Let $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ be given numbers, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ be a set measurable by Lebesgue and $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ be some Banach ideal spaces of functions measurable on Π. We consider a nonlinear operator equation of the form as follows:

$$x = \theta + AF[x], \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{1}$$

where $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ is bounded linear operator, $F : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{Z}^m$ is some operator. Equation (1) is a natural form of lumped and distributed parameter systems from a wide enough class. Formerly, by V. P. Polityukov it was suggested monotonization method for justification of solvability of equation (1) and obtaining pointwise estimations for solutions. The matter of this method consisted in that solvability of equation (1) was proved (besides other conditions) under following: I) operator F allows some correction of the form $G = \lambda I$ to monotone operator $\mathcal{F}[x] = F[\theta + x] + G[x]$ such that II) $(I + AG)^{-1}A \geqslant 0$ ($\lambda > 0$, I is identity operator). As our examples show, conditions I) and II) may be contradictory to each other, that narrows a sphere of application of the method. The main result of the paper is that for the case of operator A, possessing the Volterra property, which is natural for evolutionary equations, the requirement I) of ability to be monotonized can be replaced by the requirement of some upper and lower estimates for operator F on some cone segment through linear operator G and additional fixed element. We prove that for global solvability of a boundary value problem associated with a semilinear evolutionary equation it is sufficient that analogous boundary value problem associated with linear equation, derived from the original equation by estimating of a right-hand side on some cone segment, have a positive solution. The application of results obtained is illustrated by Goursat–Darboux system, Cauchy problem associated with wave equation and first boundary value problem associated with diffusion equation.

REFERENCES

1. Polityukov V.P. Solution of some nonlinear operator equations and their application to integrodifferential equations, *Sov. Math. Dokl.*, 1980, vol. 21, pp. 229–233. Original Russian text published in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 250, no. 4, pp. 818–822.

2. Polityukov V.P. Method of monotonization of nonlinear equations in Banach spaces, *Mathematical Notes*, 1988, vol. 44, no. 6, pp. 938–944. Original Russian text published in *Mat. Zametki*, 1988, vol. 44, no. 6, pp. 814–822. DOI: 10.1007/BF01158033.

3. Sumin V.I., Chernov A.V. On sufficient conditions of existence stability of global solutions of Volterra operator equations, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Optim. Upr.*, 2003, no. 1 (26), pp. 39–49.

4. Chernov A.V. Volterra functional operator games on a given set, *Mat. teoriya igr i ee prilozheniya*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 91–117.

5. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. Original Russian text published in *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2011, no. 3, pp. 95–107. DOI: 10.3103/S1066369X11030108.

6. Chernov A.V. On convergence of fixed point iteration method for solving nonlinear functional operator equations, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ.*, 2011, no. 4 (1), pp. 149–155.

7. Birkhoff G. *Lattice theory*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society Colloqium Publications, 1967, vi+418 p. Translated under the title *Teoriya reshetok*, Moscow: Nauka, 1984, 568 p.

8. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1984, 752 p.

9. Sumin V.I., Chernov A.V. Volterra operator equations in Banach spaces: existence stability of global solutions, NNSU, Nizhni Novgorod, 2000, 75 p. Deposited in VINITI 25.04.2000, no. 1198-V00.

10. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. Original Russian text published in *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 3–21.

11. Sumin V.I. Controlled functional Volterra equations in Lebesgue spaces, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ. Ser. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1998, no. 2 (19), pp. 138–151.

12. Mordukhovich B.Sh. *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* (Approximation methods in optimization and control problems), Moscow: Nauka, 1988, 360 p.

13. Sumin V.I., Chernov A.V. Operators in spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency, *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403–1411. Original Russian text published in *Differ. Uravn.*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1402–1411.

14. Pugachev V.S. *Lektsii po funktsional'nomu analizu* (Lecture notes on Functional Analysis), Moscow: Moscow Aviation Institute, 1996, 744 p.

15. Lisachenko I.V., Sumin V.I. The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 52–67.

16. Sabitov K.B. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (The Equations of Mathematical Physics), Moscow: Vysshaya Shkola, 2003, 255 p.

17. Korn G., Korn T. *Mathematical handbook for scientists and engineers. Definitions, theorems and formulas for reference and review*, New York–San Francisco–Toronto–London–Sydney: McGraw-Hill, 1968, 572 p. Translated under the title *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Opredeleniya, teoremy, formuly*, Moscow: Nauka, 1970, 720 p.

18. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod State University, 1992, 110 p.

19. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* (Some applications of Functional Analysis in Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1988, 334 p.

20. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Partial differential equations), Moscow: Nauka, 1976, 392 p.

21. Budak B.M., Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* (A collection of problems in mathematical physics), Moscow: Nauka, 1972, 686 p.

22. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* (Handbook on linear equations of mathematical physics), Moscow: Fizmatlit, 2001, 576 p.

23. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of the parabolic type), Moscow: Nauka, 1967, 736 p.

24. Fedorov V.M. *Kurs funktsional'nogo analiza* (A course of functional analysis), St.-Petersburg: Lan', 2005, 352 p.

25. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (The equations of mathematical physics), Moscow: Fizmatlit, 2000, 400 p.

Received 15.02.2012

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Physics, Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru