УДК 517.952, 517.977

© *Д. А. Серков*

ОПТИМАЛЬНАЯ ГАРАНТИЯ ПРИ ПОМЕХАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ФУНКЦИЯМИ КАРАТЕОДОРИ [1]

Рассматривается задача оптимизации гарантированного результата для управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и функционала качества, непрерывно зависящего от траектории движения системы. Значения управления и помехи ограничены в каждый момент компактными множествами. Предполагается, что помеха порождается некоторой неизвестной заранее функцией типа Каратеодори, то есть функцией непрерывной по пространственной переменной при каждом значении временной переменной и измеримой по временной переменной при каждом значении пространственной. Оптимальное управление ищется в классе стратегий управления с полной памятью о движении системы и о реализовавшемся управлении.

Показано, что для достаточно широкого семейства управляемых систем оптимальный гарантированный результат в классе стратегий с полной памятью совпадает с оптимальным гарантированным результатом в классе квазистратегий. Для этого семейства управляемых систем построена разрешающая стратегия, допускающая численную реализацию. Приводится иллюстрирующий пример для нелинейной управляемой системы.

Ключевые слова: гарантированное управление, каратеодориевские помехи, стратегии с полной памятью, нижняя игра.

Введение

Рассматривается задача оптимального гарантированного управления системой, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и функционалом качества, непрерывно зависящем от траектории системы. Исследование основывается на подходах и методологии, заложенных в работах Н. Н. Красовского, А. И. Субботина, Ю. С. Осипова, А. В. Кряжимского.

Задачи управления в случаях, когда помеха ограниченна некоторым классом функций, имеют содержательные предпосылки и исследовались в различных формализациях [1, 2, 4, 7, 8, 10, 16]. Так в работах Н. Н. Красовского конструкция программного максимина (стохастического программного максимина) [4, 9] использует программные помехи (стохастические программные помехи) для нахождения оптимального гарантированного результата и оптимальных позиционных стратегий в задаче с «произвольными» помехами. В работах Н. Н. Барабановой и А. И. Субботина [1, 2] исследовались множества программного поглощения [5, 6] для случаев, когда помеха формируется на основе непрерывной позиционной стратегией, либо посредством полунепрерывного сверху многозначного отображения, определенного на расширенном фазовом пространстве управляемой системы. В связи с изучением свойств стратегий с полной памятью [7, 8] А. В. Кряжимским рассматривались помехи из компактного подмножества множества допустимых помех [10] и при весьма общих предположениях об управляемой системе и показателе качества было, в частности, установлено равенство оптимальных результатов, достигаемых в классе стратегий с полной памятью и в классе квазистратегий.

В работах [14, 15] построена неупреждающая стратегия с полной памятью о движении системы и реализации управления, которая является оптимальной при компактных множествах помех и гарантирует результат, достигаемый в классе квазистратегий. Предложенная конструкция управления основывается на идеях процедуры поводыря [7, 8] и динамического восстановления помехи [11, 12]. В настоящей статье показано, что указанная конструкция стратегии при

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», а также при поддержке гранта РФФИ (проект 12–01–00290).

тех же условиях является оптимальной и для случая помех, порождаемых функциями типа Каратеодори.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением и начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T \triangleq [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \\ x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

где «$\triangleq$» означает «равно по определению». Реализации управления и помехи предполагаются измеримыми по Борелю функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям $u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, $v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q$, $\tau \in T$. Семейства всех таких реализаций управления и помехи обозначим $\mathbf{U}_T$ и $\mathbf{V}_T$, соответственно. Множества G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — компакты в соответствующих пространствах. Функция $f(\cdot) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывна, удовлетворяет условию подлинейного роста и локально липшицева по второй переменной.

Для всех $u(\cdot) \in \mathbf{U}_T$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_T$ обозначим $x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (1.1) и определим компактное множество

$$G \triangleq \mathbf{cl}_{\mathbb{R}^{(n+1)}}\{(\tau, x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot))) \mid \tau \in T, z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathbf{U}_T, v(\cdot) \in \mathbf{V}_T\};$$

здесь символы $\mathbf{cl}_A\, B$ означают «замыкание множества $B \subset A$ в топологии пространства A».

Качество движения системы (1.1) будем оценивать функционалом $\gamma(\cdot) : C(T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$, непрерывным в топологии равномерной сходимости пространства $C(T; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций из T в $\mathbb{R}^n$. Требуется минимизировать этот показатель выбором управления $u(\cdot) \in \mathbf{U}_T$.

Конечное множество $\Delta \triangleq \{\tau_i \mid t_0 = \tau_0,\ \tau_{i-1} < \tau_i,\ \tau_{n_\Delta} = \vartheta,\ i \in 0..n_\Delta\}$, порождающее дизъюнктное покрытие интервала $[t_0, \vartheta)$ системой интервалов $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i \in 1..n_\Delta$, назовем *разбиением* T. Для всякого такого Δ из множества $\Delta(T)$ всех разбиений интервала T определим величину $\mathbf{d}(\Delta) \triangleq \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid \tau_i, \tau_{i-1} \in \Delta, i \in 1..n_\Delta\}$.

Пусть $\mathbf{U}_{na}$ — класс неупреждающих стратегий управления U вида

$$U : T \times C(T; \mathbb{R}^n) \times \mathbf{U}_T \times \Delta(T) \mapsto \mathcal{P}.$$

Неупреждаемость понимается как равенство

$$U(t', x_1(\cdot), u_1(\cdot), \Delta) = U(t', x_2(\cdot), u_2(\cdot), \Delta),$$

справедливое для всех $t' \in T$, $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$, $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathbf{U}_T$ и $\Delta \in \Delta(T)$ таких, что $x_1(\cdot)|_{[t_0, t')} = x_2(\cdot)|_{[t_0, t')}$, $u_1(\cdot)|_{[t_0, t')} = u_2(\cdot)|_{[t_0, t')}$; операция $\cdot|_{[t_0, t')}$ означает сужение функции на интервал $[t_0, t')$.

Пусть $z_0 \in G_0$, $\Delta \in \Delta(T)$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $v(\cdot) \subseteq \mathbf{V}_T$. Обозначим $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, z_0, \{U, \Delta\}, v(\cdot))$ и $u(\cdot) = u(\cdot, t_0, z_0, \{U, \Delta\}, v(\cdot))$ движение и реализацию управления, порождаемые стратегией U в пошаговой схеме [3] при разбиении Δ:

$$u(\tau) \triangleq U(\tau_i, \hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \Delta), \quad x(\tau) \triangleq x(\tau, \tau_i, x(\tau_i), u(\cdot), v(\cdot)), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1});$$

здесь $\hat{x}(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$ и $\hat{u}(\cdot) \in \mathbf{U}_T$ — продолжения на интервал T движения $x(\cdot)$ и управления $u(\cdot)$, реализовавшихся к моменту τ_i, $i \in 1..n_\Delta$.

Для произвольного множества $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{V}_T$ обозначим $X(z_0, U, \mathcal{V})$ множество всех равномерных пределов последовательностей вида

$$\{x(\cdot, t_0, z_{0k}, \{U, \Delta_k\}, v_k(\cdot)) \mid k \in \mathbb{N}\},$$
$$z_{0k} \in G_0,\ v_k(\cdot) \in \mathcal{V},\ \Delta_k \in \Delta(T),\ \lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0,\ \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0.$$

Обозначим $\mathbf{comp}(\mathbf{V}_T)$ семейство всех подмножеств из $\mathbf{V}_T$ компактных в сильной топологии пространства $L_2(T;\mathcal{Q})$ (функций из T в $\mathcal{Q}$ суммируемых по Лебегу с квадратом) и положим

$$X^C(z_0,U)\triangleq \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\Big\{\bigcup_{\mathcal{V}\in\mathbf{comp}(\mathbf{V}_T)} X(z_0,U,\mathcal{V})\Big\}.$$

Пусть V — некоторая функция Каратеодори (см. [3, п. II.2]) со значениями в $\mathcal{Q}$, то есть функция, определенная на произведении $T\times\mathbb{R}^n$, измеримая по первому аргументу при произвольном фиксированном значении второго, и непрерывная по второму при всех фиксированных значениях первого аргумента. Множество всех таких функций обозначим $\mathbf{V}_{\mathrm{Car}}$. Опираясь на известные теоремы существования (см. [3, Теорема II.4.3]), можно установить, что при любом выборе такой функции V существует (возможно, не единственное) решение в смысле Каратеодори следующего дифференциального уравнения

$$\begin{cases}\dot{x}(\tau)=f(\tau,x(\tau),u(\tau),V(\tau,x(\tau))), & \tau\in T,\\ x(t_0)=z_0, & u(\cdot)\in\mathbf{U}_T.\end{cases}\tag{1.2}$$

Множество всех решений уравнения (1.2) обозначим $X(z_0,u(\cdot),V)$. В силу [3, Теорема I.5.25] множество реализаций помехи

$$\mathbf{V}(z_0,u(\cdot),V)\triangleq\{v(\tau)=V(\tau,x(\tau)),\tau\in T\mid x(\cdot)\in X(z_0,u(\cdot),V)\},$$

возникающее из движений $X(z_0,u(\cdot),V)$, удовлетворяет включению $\mathbf{V}(z_0,u(\cdot),V)\subseteq\mathbf{V}_T$. Таким образом, для любых $z_0\in G_0$, $u(\cdot)\in\mathbf{U}_T$, $V\in\mathbf{V}_{\mathrm{Car}}$ и $v(\cdot)\in\mathbf{V}(z_0,u(\cdot),V)$ выполняются соотношения

$$v(\tau)=V(\tau,x(\tau,t_0,z_0,u(\cdot),v(\cdot))),\quad \tau\in T.\tag{1.3}$$

Определим пучки пошаговых движений $X(z_0,\{U,\Delta\},V)$, порождаемых стратегией U при разбиении Δ и помехе $V\in\mathbf{V}_{\mathrm{Car}}$, следуя пошаговой схеме [7,8]: на первом интервале разбиения Δ положим управление равным

$$u(\tau)=u_0\in\mathcal{P},\quad \tau\in[\tau_0,\tau_1].$$

При этом получим пучок движений $X(z_0,u(\cdot),V)\subset C([\tau_0,\tau_1];\mathbb{R}^n)$ и множество реализаций управления $\mathbf{U}(z_0,\{U,\Delta\},V)\subseteq\mathbf{U}_{[\tau_0,\tau_1]}$ (пока состоящее из единственного элемента $u(\cdot)\triangleq u_0$). Пусть к моменту $\tau_i\in\Delta$ построено множество реализаций управления $\mathbf{U}(z_0,\{U,\Delta\},V)\subseteq\mathbf{U}_{[\tau_0,\tau_i]}$ и для каждой реализации $u(\cdot)\in\mathbf{U}(z_0,\{U,\Delta\},V)$ определено множество соответствующих движений системы $X(z_0,u(\cdot),V)\subset C([\tau_0,\tau_i];\mathbb{R}^n)$. Исходя из этих множеств определим управление на интервале $[\tau_i,\tau_{i+1}]$:

$$u(\tau)\triangleq U(\tau_i,\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\Delta),\quad \tau\in[\tau_i,\tau_{i+1}),\quad i\in 1..n_\Delta;$$

здесь также $\hat{x}(\cdot)\in C(T;\mathbb{R}^n)$ и $\hat{u}(\cdot)\in\mathbf{U}_T$ — продолжения на интервал T движения $x(\cdot)$ и управления $u(\cdot)$, реализовавшихся к моменту τ_i, $i\in 1..n_\Delta$:

$$\begin{gathered}x(\cdot)\in X(z_0,u(\cdot),V),\quad u(\cdot)\in\mathbf{U}(z_0,\{U,\Delta\},V),\\ x(\cdot)=x(\cdot,t_0,z_0,u(\cdot),v(\cdot)),\quad v(\tau)=V(\tau,x(\tau)),\\ \tau\in[t_0,\tau_i),\quad i\in 1..n_\Delta.\end{gathered}$$

В итоге к моменту $\tau_{n_\Delta}=\vartheta$ получим множества

$$X(z_0,\{U,\Delta\},V)\triangleq\bigcup_{u(\cdot)\in\mathbf{U}(z_0,\{U,\Delta\},V)} X(z_0,u(\cdot),V),$$

$$\mathbf{V}(z_0,\{U,\Delta\},V)\triangleq\bigcup_{u(\cdot)\in\mathbf{U}(z_0,\{U,\Delta\},V)}\mathbf{V}(z_0,u(\cdot),V)$$

пошаговых движений и соответствующих реализаций помехи при разбиении Δ.

Пусть имеются $z_0 \in G_0$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $V \in \mathbf{V}_{\mathrm{Car}}$. Определим множество $X^{\mathrm{Car}}(z_0, U, V)$ конструктивных движений, порождаемых стратегией U и функцией Каратеодори V как совокупность пределов в пространстве $C(T; \mathbb{R}^n)$ всевозможных последовательностей вида

$$\{x_k(\cdot) \in X(z_{0k}, \{U, \Delta_k\}, V) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

таких, что

$$z_{0k} \in G_0, \quad \Delta_k \in \Delta(T), \quad \lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0,$$

и положим

$$X^{\mathrm{Car}}(z_0, U) \triangleq \bigcup_{V \in \mathbf{V}_{\mathrm{Car}}} X^{\mathrm{Car}}(z_0, U, V).$$

Гарантированным результатом стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ и оптимальным гарантированным результатом в классе $\mathbf{U}_{na}$ при *компактных множествах помех* назовем величины (см. [10]):

$$\Gamma^{\mathrm{C}}(z_0, U) \triangleq \sup_{x(\cdot)\in X^{\mathrm{C}}(z_0,U)} \gamma(x(\cdot)), \quad \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{C}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) \triangleq \inf_{U'\in\mathbf{U}_{na}} \Gamma^{\mathrm{C}}(z_0, U').$$

Гарантированным результатом стратегии $U \in \mathbf{U}_{na}$ и оптимальным гарантированным результатом в классе $\mathbf{U}_{na}$ при *каратеодориевских помехах* назовем величины:

$$\Gamma^{\mathrm{Car}}(z_0, U) \triangleq \sup_{x(\cdot)\in X^{\mathrm{Car}}(z_0,U)} \gamma(x(\cdot)), \quad \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{Car}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) \triangleq \inf_{U'\in\mathbf{U}_{na}} \Gamma^{\mathrm{Car}}(z_0, U').$$

Гарантированным результатом квазистратегии $\alpha(\cdot)$ (см. [16, с. 24]) и оптимальным гарантированным результатом в классе квазистратегий $\mathbf{U}_{qs}$ назовем величины:

$$\Gamma_{\mathrm{L}}(z_0, \alpha(\cdot)) \triangleq \sup_{x(\cdot)\in X(z_0,\alpha(\cdot))} \gamma(x(\cdot)), \ \mathbf{\Gamma}_{\mathrm{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}) \triangleq \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{U}_{qs}} \Gamma_{\mathrm{L}}(z_0, \alpha(\cdot)),$$

$$X(z_0, \alpha(\cdot)) \triangleq \Big\{x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)) \mid v(\cdot) \in \mathbf{V}_T\Big\}, \ \alpha(\cdot) \in \mathbf{U}_{qs}.$$

Стратегию $U \in \mathbf{U}_{na}$, обеспечивающую равенство

$$\Gamma^{\mathrm{C}}(z_0, U) = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{C}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) \quad \text{или} \quad \Gamma^{\mathrm{Car}}(z_0, U) = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{Car}}(z_0, \mathbf{U}_{na}),$$

назовем, соответственно, оптимальной стратегией *при компактных множествах помех* или *при каратеодориевских помехах* для начальной позиции $z_0 \in G_0$.

§ 2. Разрешающая стратегия

В [14, 15] приведена конструкция стратегии $U_{\mathrm{L}} \in \mathbf{U}_{na}$, которая при условии (2.6) является оптимальной при компактных множествах помех. Установлено, что указанная стратегия является оптимальной и в случае каратеодориевских помех. Приведем определение стратегии U_{L} и сформулируем соответствующие утверждения. Пусть имеются последовательности

$$z_{0k} \in G_0, \quad v_k(\cdot) \in \mathbf{V}_T, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\Delta_k = \{\tau_{ki} = t_0 + ih_k, h_k = (\vartheta - t_0)/k, i \in 0..k\} \in \Delta(T),$$

Пусть

$$x_k(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_{0k}, \{U_{\mathrm{L}}, \Delta_k\}, v_k(\cdot)), \quad u_k(\cdot) \triangleq u(\cdot, t_0, z_{0k}, \{U_{\mathrm{L}}, \Delta_k\}, v_k(\cdot))$$

— пошаговые движения и реализации управления, порождаемые стратегией U_{L}. Обозначим $x_{ki} \triangleq x_k(\tau_{ki})$, $u_{ki} \triangleq u_k(\tau_{ki})$, $\tau_{ki} \in \Delta_k$, $i \in 0..(k-1)$ — значения этих функций в моменты разбиения Δ_k.

Динамику y-модели зададим уравнениями

$$y_k(\tau) = z_{0k} + \int_{t_0}^{\tau} f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))ds, \quad \tau \in T, \tag{2.1}$$

и обозначим $y_{ki} \triangleq y_k(\tau_{ki})$, $\bar{v}_{ki} \triangleq \bar{v}_k(\tau_{ki})$, $\bar{u}_{ki} \triangleq \bar{u}_k(\tau_{ki})$, $\tau_{ki} \in \Delta_k$, $i \in 0..(k-1)$.

На первом интервале разбиения Δ_k выберем произвольное допустимое управление: $u_{k0}(\cdot) \triangleq u_0 \in \mathcal{P}$. В момент $\tau_{k(i+1)}$, $i \in 0..(k-1)$ определим значение $\bar{v}_{ki} \in \mathcal{Q}$ помехи $\bar{v}_k(\cdot)$ на интервале $[\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)})$ из условия

$$\bar{v}_{ki} \in \nu(u_{ki}, x_k(\cdot), \tau_{ki}, \tau_{k(i+1)}), \tag{2.2}$$

где для произвольных $u \in \mathcal{P}$, $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$, $x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$

$$\nu(u, x(\cdot), \tau, \tau') \triangleq \operatorname*{argmin}_{v \in \mathcal{Q}} \left\| x(\tau') - x(\tau) - (\tau' - \tau) f(\tau, x(\tau), u, v) \right\|.$$

Определим управление $\bar{u}_{ki} \in \mathcal{P}$ как значение контрстратегии [7, § 82, 96], экстремальной к некоторому компактному в $C(T; \mathbb{R}^n)$ множеству W:

$$\bar{u}_{ki} \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \langle y_{ki} - w_{ki}(\tau_{ki}), f(\tau_{ki}, y_{ki}, u, \bar{v}_{ki}) \rangle, \tag{2.3}$$

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{w(\cdot) \in W|_{[t_0, \tau_{ki}]}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)}, \tag{2.4}$$

и положим

$$u_{k(i+1)} = \bar{u}_{ki}, \quad i \in 0..(k-1),\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

При произвольных $(\tau, x) \in G$, $u \in \mathcal{P}$ обозначим $\mathbb{Q}_{\tau,x,u}$ фактор–множество множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $(v_1 \sim v_2) \Leftrightarrow (f(\tau, x, u, v_1) = f(\tau, x, u, v_2))$. Для $z_0 \in G_0$ определим подмножества из $Z_{qs}(z_0) \subseteq C(T; \mathbb{R}^n)$ вида

$$Z_{qs}(z_0) \triangleq \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)} \Big\{ \bigcup_{\substack{\Gamma_{\mathrm{L}}(z_0, \alpha(\cdot)) \leq \\ \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}) + \varepsilon}} X(z_0, \alpha(\cdot)) \Big\},$$

Теорема 1. *Пусть фактор–множества* $\mathbb{Q}_{t,x,u}$ *не зависят от* u*:*

$$\mathbb{Q}_{t,x,u} = \mathbb{Q}_{t,x,u'}, \quad \text{для всех } (t, x) \in G,\ u, u' \in \mathcal{P}. \tag{2.6}$$

Тогда справедливы равенства

$$\Gamma^{\mathrm{CAR}}(z_0, U_{\mathrm{L}}) = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CAR}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) = \mathbf{\Gamma}_{\mathrm{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}), \quad z_0 \in G_0, \tag{2.7}$$

где стратегия U_{L} *задана формулами* (2.1)–(2.5) *при* $W \triangleq Z_{qs}(z_0)$.

Таким образом, стратегия U_{L} является оптимальной стратегией при каратеодориевских помехах и обеспечивает гарантированный результат, равный значению нижней [8] (максиминной [7]) игры.

В качестве примера семейства управляемых систем, удовлетворяющих условию (2.6), можно привести системы вида:

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t)) + f_2(t, x(t), v(t)) + g(t, x(t), u(t)) \cdot h(t, x(t), v(t)), \tag{2.8}$$

где $g(\cdot)$ — матрица–функция размерности $n \times q$, $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — вектор–функции (столбцы) размерности n, и $h(\cdot)$ — вектор–функция размерности q такие, что правая часть (2.8) удовлетворяет условиям существования и продолжимости решений, и при всех $(t, x) \in G$ ядро линейного оператора $g(t, x, u) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^n$ не зависит от $u \in \mathcal{P}$.

Отметим также, что класс помех, формируемых непрерывными позиционными стратегиями, содержится в рассмотренном классе каратеодориевских помех. Другой класс, рассмотренный в [2], класс помех формируемых полунепрерывными сверху многозначными стратегиями, напротив, заведомо не вкладывается в класс компактных помех, так как без труда строится пример стратегии, порождающий не компактную в $L_2(T; \mathbb{R}^q)$ последовательность реализаций помехи.

§ 3. Пример

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = u_1(\tau) \cdot v_1(\tau), & \tau \in T \triangleq [0,1], \mathcal{P} = \mathcal{Q} \triangleq \{-1,1\} \\ \dot{x}_2(\tau) = g(x_1(\tau)) \cdot u_2(\tau) \cdot v_2(\tau), & g(x) \triangleq \max\{0,x\},\ x \in \mathbb{R}, \\ (x_1(0), x_2(0)) = (0,0), & u_1(\tau), u_2(\tau) \in \mathcal{P},\ v_1(\tau), v_2(\tau) \in \mathcal{Q}, \end{cases}$$

и показатель качества $\gamma(x(\cdot)) \triangleq x_2(1)$. Можно проверить, что для данной управляемой системы выполнены условия теоремы 1. Используя (2.2)–(2.5) и монотонность оптимального гарантированного результата по пространственным переменным, можно выписать стратегию U_{L} в замкнутом виде

$$U_{\text{L}}(\tau'', x(\cdot), u(\cdot), \Delta) \in \begin{pmatrix} \operatorname*{argmax}_{u_1 \in \mathcal{P}} \{u_1 \cdot \frac{x_1(\tau'') - x_1(\tau')}{u_1(\tau')}\} \\ \operatorname*{argmin}_{u_2 \in \mathcal{P}} \{u_2 \cdot \frac{x_2(\tau'') - x_2(\tau')}{u_2(\tau')}\} \end{pmatrix}, \quad \tau', \tau'' \in \Delta.$$

Из равенств (2.7) получим значение оптимального гарантированного результата при каратеодориевских помехах $\mathbf{\Gamma}^{\text{Car}}((0,0), \mathbf{U}_{na}) = \mathbf{\Gamma}_{\text{L}}((0,0), \mathbf{U}_{qs}) = -0.5$.

Нетрудно видеть, что в этом примере не выполняется одно из условий, обеспечивающее в работе [10] второе равенство из (4.1), а именно, условие взаимно однозначного соответствия между траекториями системы и реализациями помехи (см. [10, Condition 9.1]).

§ 4. Доказательства

Теорема 1 является следствием аналогичной теоремы для случая компактных множеств помех [15]:

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2.6). *Тогда справедливы равенства*

$$\Gamma^{\text{C}}(z_0, U_{\text{L}}) = \mathbf{\Gamma}^{\text{C}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) = \mathbf{\Gamma}_{\text{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}), \quad z_0 \in G_0, \tag{4.1}$$

где стратегия U_{L} *задана формулами* (2.1)–(2.5) *при* $W \triangleq Z_{qs}(z_0)$.

В самом деле, обозначим $\mathbf{comp}(C(T;\mathbb{R}^n))$ семейство всех компактных подмножеств $C(T;\mathbb{R}^n)$ и

$$V(Y) \triangleq \{v(\cdot) \in \mathbf{V}_T \mid v(\tau) \triangleq V(\tau, y(\tau)), \tau \in T, y(\cdot) \in Y\}$$

для произвольных $V \in \mathbf{V}_{\text{Car}}$, $Y \subseteq C(T;\mathbb{R}^n)$. Все движения системы (1.1), выходящие в момент $t_0 \in T$ из некоторой ε-окрестности позиции z_0 при всех допустимых реализациях управления и помехи, образуют компактное в $C(T;\mathbb{R}^n)$ множество (обозначим его $X(z_0,\varepsilon)$). В силу приводимой ниже леммы 1 и соотношений (1.3) для множества $\mathbf{V}(t_0, z', \{U,\Delta\}, V)$ реализаций помехи при пошаговых движениях будет выполняться включение

$$\mathbf{V}(t_0, z', \{U,\Delta\}, V) \subseteq \mathbf{cl}_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}\{V(X(z_0,\varepsilon))\} \in \mathbf{comp}(\mathbf{V}_T), \tag{4.2}$$

каковы бы ни были стратегия $U \in \mathbf{U}_{na}$, разбиение $\Delta \in \Delta(T)$ и начальная позиция z', такая, что $\|z_0 - z'\| < \varepsilon$. Из (4.2) и определения величины $\Gamma_{\text{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs})$ следуют неравенства

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{L}}(z_0, \mathbf{U}_{qs}) \leqslant \mathbf{\Gamma}^{\text{Car}}(z_0, \mathbf{U}_{na}) \leqslant \Gamma^{\text{Car}}(z_0, U_{\text{L}}) \leqslant \Gamma^{\text{C}}(z_0, U_{\text{L}}).$$

Эти неравенства в совокупности с (4.1) дадут (2.7).

Лемма 1. *Для всякой функции* $V \in \mathbf{V}_{\text{Car}}$ *и для всякого множества* $Y \in \mathbf{comp}(C(T;\mathbb{R}^n))$ *выполняется включение* $\mathbf{cl}_{L_2(T;\mathbb{R}^q)} V(Y) \in \mathbf{compV}_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V и Y удовлетворяют условиям леммы. Проверим, что множество $V(Y)$ предкомпактно в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$. С этой целью воспользуемся критерием компактности множества в пространстве $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ (теорема Колмогорова [13, с. 460]): ограниченность множества $V(Y)$ сразу следует из компактности мгновенных геометрических ограничений на реализации помехи. Установим, что функции Стеклова $v_h(\cdot)$ при $h \to +0$ сходятся в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ к соответствующим функциям $v(\cdot) \in V(Y)$ равномерно на $V(Y)$.

Пусть
$$v(\tau) \triangleq V(\tau, y(\tau)), \quad \tau \in T, \quad y(\cdot) \in Y. \tag{4.3}$$
Оценим при произвольном $h \in (0,1/2)$ величину (считаем на промежутках $[t_0 - 1/2, t_0)$, $(\vartheta, \vartheta + 1/2]$ функции V и $y(\cdot)$ продолженными константами — нулем и по непрерывности, соответственно):
$$\|v_h(\cdot) - v(\cdot)\|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^q)} \triangleq \int_T \|v_h(\tau) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, d\tau \triangleq \int_T \Big\| \int_{\tau-h}^{\tau+h} \frac{v(s)}{2h} ds - v(\tau)\Big\|^2_{\mathbb{R}^q} d\tau$$
$$= \int_T \Big\| \int_{\tau-h}^{\tau+h} \frac{v(s) - v(\tau)}{2h}\, ds\Big\|^2_{\mathbb{R}^q} d\tau \leqslant \int_T \frac{1}{2h} \int_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau. \tag{4.4}$$
Известно [3, Теорема I.5.26] (обобщение теоремы Лузина), что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое измеримое подмножество $E_\varepsilon \subseteq T$, что $\mu(T \backslash E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и сужение $V|_{E_\varepsilon \times G_Y}$ функции $V \in \mathbf{V}_{\mathrm{CAR}}$ на множество $E_\varepsilon \times G_Y$ непрерывно. Здесь
$$G_Y \triangleq \mathbf{cl}_{\mathbb{R}^n}\{y(\tau) \in \mathbb{R}^n \mid y(\cdot) \in Y, \tau \in T\}.$$
В силу теоремы Асколи–Арцела из компактности множества Y следует компактность множества G_Y. Обозначим $\Omega_\varepsilon(\cdot) : (0,+\infty) \mapsto (0,+\infty]$ модуль непрерывности функции V на компактном множестве $E_\varepsilon \times G_Y$. Обозначим E'_ε множество точек плотности E_ε. В силу замкнутости E_ε и теоремы Лебега о точках плотности измеримого множества (см. [13, гл. IX, § 6]) будут выполнены соотношения
$$E'_\varepsilon \subseteq E_\varepsilon, \quad \mu(T \backslash E'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{4.5}$$
Продолжим оценки (4.4), используя разложение T на E'_ε и дополнение к нему:
$$= \int_{T \backslash E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau + \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau. \tag{4.6}$$
В силу (4.5) имеем оценку (продолжаем выкладки):
$$\leqslant 4\varepsilon \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2_{\mathbb{R}^q} + \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{\tau-h}^{\tau+h} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau \leqslant 4\varepsilon \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2_{\mathbb{R}^q} +$$
$$+ \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{[\tau-h,\tau+h] \backslash E'_\varepsilon} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau + \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{[\tau-h,\tau+h] \cap E'_\varepsilon} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau$$
$$\leqslant 4\varepsilon \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2_{\mathbb{R}^q} + \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{2 \cdot \mu([\tau-h,\tau+h] \backslash E'_\varepsilon) \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2_{\mathbb{R}^q}}{h}\, d\tau$$
$$+ \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{[\tau-h,\tau+h] \cap E'_\varepsilon} \|v(s) - v(\tau)\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau.$$
Воспользуемся равенством $\mu([\tau-h,\tau+h] \backslash E_\varepsilon) = \mu([\tau-h,\tau+h] \backslash E'_\varepsilon)$, которое также следует из упомянутой выше теоремы Лебега, и представлением (4.3) реализации $v(\cdot)$ (продолжим оценки):
$$= 2 \cdot \max_{v \in \mathcal{Q}} \|v\|^2_{\mathbb{R}^q} \Big(2\varepsilon + \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{\mu([\tau-h,\tau+h] \backslash E_\varepsilon)}{h}\, d\tau\Big)$$
$$+ \int_{T \cap E'_\varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{[\tau-h,\tau+h] \cap E'_\varepsilon} \|V(s, y(s)) - V(\tau, y(\tau))\|^2_{\mathbb{R}^q}\, ds\, d\tau.$$

Используя модуль непрерывности $\Omega_\varepsilon(\cdot)$ функции V на множестве $E_\varepsilon \times G_Y$ и общий модуль непрерывности $\Omega_Y(\cdot)$ функций из Y (он существует в силу теоремы Асколи–Арцела и компактности Y в $C(T;\mathbb{R}^n)$), оценим внутренний интеграл во втором слагаемом (продолжим оценки):

$$\leqslant 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2_{\mathbb{R}^q}\Big(2\varepsilon+\int_{T\cap E'_\varepsilon}\frac{\mu([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h}\,d\tau\Big)$$
$$+\int_{T\cap E'_\varepsilon}\frac{\mu([\tau-h,\tau+h]\cap E'_\varepsilon)\cdot\Omega^2_\varepsilon(h+\max_{|s|\leqslant h}\|y(\tau+s)-y(\tau)\|_{\mathbb{R}^n})}{2h}\,d\tau$$
$$\leqslant 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2_{\mathbb{R}^q}\Big(2\varepsilon+\int_{T\cap E'_\varepsilon}\frac{\mu([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h}\,d\tau\Big)+(\vartheta-t_0)\cdot\Omega^2_\varepsilon(h+\Omega_Y(h))).$$

В силу определения множества E'_ε выражение под знаком интеграла в первом слагаемом при всех $\tau\in E'_\varepsilon$ стремится к нулю, когда $h\to 0$. Следовательно, и интеграл также стремится к нулю, когда $h\to 0$.

Таким образом, для произвольных $v(\cdot)\in V(Y)$ $h\in(0,1/2)$ и $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\|v_h(\cdot)-v(\cdot)\|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}\leqslant\Psi(\varepsilon,h)$, в котором функция

$$\Psi(\varepsilon,h)\triangleq 2\cdot\max_{v\in\mathcal{Q}}\|v\|^2_{\mathbb{R}^q}\Big(2\varepsilon+\int_{T\cap E'_\varepsilon}\frac{\mu([\tau-h,\tau+h]\backslash E_\varepsilon)}{h}\,d\tau\Big)+(\vartheta-t_0)\cdot\Omega^2_\varepsilon(h+\Omega_Y(h))$$

удовлетворяет равенству $\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{h\to+0}\Psi(\varepsilon,h)=0$. Это эквивалентно искомой равномерной сходимости. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений // Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 796–803.
2. Барабанова Н.Н., Субботин А.И. О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. матем. и мех. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 385–392.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений М.: Наука. 1970. 420 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 523–526.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. матем. мех. 1970. Т. 34. Вып. 6. С. 1005–1022.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game–theoretical control problems. N.Y.: Springer–Verlag, 1988. 517 p.
9. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука. 1985.
10. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute, T.M. Rassias Ed., World Scientific. 1991.
11. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
12. Osipov Yu.S., Krayzhimskii A.V. Inverse Problem of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach. 1995.
13. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
14. Serkov D. Optimal Strategies in Control Problem under Programmed Disturbances // Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, 2011. Edited by S. Bittanti, A. Cenedese, S. Zampieri. Vol. 18. Part 1. IFAC PapersOnLine Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01618.
URL: `http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/50239.html`
15. Серков Д.А. Гарантированное управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 2. С. 81–106.
16. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 2

Поступила в редакцию 12.03.2012

Серков Дмитрий Александрович, к. ф.-м. н., Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

D. A. Serkov

Optimal guarantee under the disturbances of Caratheodory type

Keywords: optimal guarantee, disturbance of Caratheodory type, strategy with full memory, lower game.

Mathematical Subject Classifications: 93C15, 49N30, 49N35

The problem of the optimization of a guaranteed result for the control system, described by an ordinary differential equation, and a continuous payoff functional, is considered. At every moment the values of the control and of the disturbance are in the given compact sets. The actions of the disturbance are assumed to be generated by an unknown function of the Caratheodory type, i.e. by the function continuous with respect to the spatial variable for every value of time variable and measurable with respect to the time variable for every value of spatial one. The actions of control are formed by the strategies with full memory.

It is demonstrated, that for a class of control systems the optimal guaranteed result in this problem is equal to the value of the lower game, i.e. to the value of the optimal guaranteed result in the class of quasi–strategies. The optimal strategy with full memory, that allows numerical implementation, is provided. An illustrative nonlinear example is given.

REFERENCES

1. Barabanova N.N., Subbotin A.I. On the continuous evasion strategies in pursuit–evasion games, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1970, vol. 34, iss. 5, pp. 796–803.

2. Barabanova N.N., Subbotin A.I. On the classes of strategies in the differential games of evasion, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1971, vol. 35, iss. 3, pp. 385–392.

3. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.

4. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game Problems on the motions), Moscow: Nauka, 1970, 420 p.

5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. On the structure of differential games, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 3, pp. 523–526.

6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. The alternative for the pursuit–evasion game problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1970, vol. 34, iss. 6, pp. 1005–1022.

7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.

8. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game–theoretical control problems*, N.Y.: Springer–Verlag, 1988, 517 p.

9. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of dynamic system), Moscow: Nauka, 1995.

10. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies, *Constantin Caratheodory: An International Tribute*, T.M. Rassias Ed., World Scientific, 1991.

11. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. On the control modeling in dynamic system, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekhn. Kibernet.*, 1983, no. 2, pp. 51–60.

12. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. *Inverse Problem of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, London: Gordon and Breach, 1995.

13. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* (Theory of functions of real variable), Moscow: Nauka, 1974, 480 p.

14. Serkov D. Optimal Strategies in Control Problem under Programmed Disturbances, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Edited by S. Bittanti, A. Cenedese, S. Zampieri, vol. 18, part 1. IFAC PapersOnLine Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01618.
`http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/50239.html`

15. Serkov D.A. On the guaranteed control under the functionally restricted disturbances, *Mathematical game theory and applications*, 2012, vol. 4, iss. 2, pp. 81–106.

16. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 288 p.

Received 12.03.2012

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru