УДК 517.5 + 517.9

© ***В. И. Родионов***

АНАЛОГ МАТРИЦЫ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В предыдущей работе автора для двух прерывистых функций, заданных на отрезке, и специального параметра, названного дефектом, определено понятие квазиинтеграла. Если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то для любого дефекта существует квазиинтеграл, и все они равны между собой. Интеграл Перрона–Стилтьеса, если он существует, совпадает с одним из квазиинтегралов, где дефект определен специальным образом.

В настоящей работе доказана теорема существования и единственности решения квазиинтегрального уравнения с постоянной матрицей. Ядро системы — скалярная кусочно-непрерывная функция ограниченной вариации, компоненты уравнения — прерывистые функции, спектральный параметр — регулярное число. При определенных условиях квазиинтегральное уравнение можно интерпретировать как импульсную систему. Получено явное представление для решения однородного квазиинтегрального уравнения. Для абсолютно регулярного спектрального параметра определен аналог матрицы Коши, исследованы его свойства и получено явное представление для решения неоднородного квазиинтегрального уравнения в форме Коши. Аналогичные результаты получены для сопряженного и союзных уравнений.

Обсуждается возможность восстановления аппроксимирующего дефекта квазиинтеграла, — дефекта, порождающего аппроксимируемые решения импульсной системы.

Ключевые слова: импульсное уравнение, прерывистая функция, квазиинтеграл.

Введение

Работа продолжает исследования [1–4]. Она развивает идеи [4], — мы используем основные понятия и обозначения данной работы без дополнительных пояснений.

§ 1. Существование и единственность решения квазиинтегрального уравнения в случае регулярного спектрального параметра

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b]$ и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(K) \doteq \mathrm{G}[a,b]$ обозначим пространство *прерывистых* (см. [2, 5]) функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{R}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a,b]$ и $x(t+0) \doteq \lim\limits_{\tau\to t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a,b)$.

Через Ω обозначим пространство функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(0) = 0$. Пару функций $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$ будем называть *дефектом*, а Ω^2 — *пространством дефектов* (см. [4]).

Пусть $\alpha \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta \doteq (\varphi,\psi) \in \Omega^2$, A — матрица порядка r с элементами из $\mathbb{R}$, $Q \in \mathrm{PBV}$ — кусочно-непрерывная функция ограниченной вариации, $y(\cdot) \doteq \mathrm{col}\,(y_1(\cdot),\dots,y_r(\cdot))$, $y_i(\cdot) \in \mathrm{G}$. Функция $x(\cdot) \doteq \mathrm{col}\,(x_1(\cdot),\dots,x_r(\cdot))$, $x_j(\cdot) \in \mathrm{G}$, удовлетворяющая равенству

$$x(t) - \lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = y(t), \quad t \in K, \tag{1.1}$$

называется *решением квазиинтегрального уравнения* (1.1).

Выражение $\int_\alpha^t x\Delta Q$ обозначает вектор $\mathrm{col}\Big(\int_\alpha^t x_1\Delta Q,\dots,\int_\alpha^t x_r\Delta Q\Big)$, компоненты которого определены при всех $x_j \in \mathrm{G}$ и $Q \in \mathrm{PBV}$ ([4], теорема 3). Заметим также, что если функции Q и y_i непрерывно дифференцируемы, то при всех $\Delta \in \Omega^2$ выполнены равенства

$$\int_\alpha^t x_j\Delta Q = \int_\alpha^t x_j\,dQ = \int_\alpha^t \dot Q(s)x_j(s)\,ds,$$

поэтому уравнение (1.1) можно интерпретировать как задачу, состоящую из системы дифференциальных уравнений $\dot{x}(t) - \lambda A\,\dot{Q}(t)\,x(t) = \dot{y}(t)$ и начального условия $x(\alpha) = y(\alpha)$. Тем самым, его можно интерпретировать как импульсную систему.

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *регулярным* для уравнения (1.1), если при всех $\tau_k \in T(Q)$ матрицы $E-\lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E-\lambda\varrho_k(\alpha)A$ обратимы, где скалярные функции π_k и ϱ_k определены равенствами $\pi_k(\cdot) \doteq \varphi(Q_k^-) + Q_k^-\xi_k(\cdot)$, $\varrho_k(\cdot) \doteq \psi(Q_k^+) - Q_k^+\eta_k(\cdot)$.

Напомним [4], что $T(Q)$ — это (конечное) множество точек разрыва функции Q, а Q_k^- и Q_k^+ — левый и правый скачки этой функции в точках разрыва. Здесь и в дальнейшем E — единичная матрица порядка r. Таким образом, уравнение (1.1) имеет не более, чем $2r\,\mathrm{card}\,T(Q)$ нерегулярных чисел. В частности, если Q непрерывна, то любое $\lambda \in \mathbb{R}$ — регулярное число.

Теорема 1. *Уравнение* (1.1) *при регулярном* λ *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T \doteq T(Q) \cup \{\alpha\}$. Для этого T уравнение (1.1) имеет вид

$$x^T(t) - \sum_{\tau_k\in T} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k -$$

$$-\lambda A\int_\alpha^t x\,dQ^T + \lambda A\sum_{\tau_k\in T}\big[\,x_kQ_k^- + x_k^-\varphi(Q_k^-)\,\big]\int_\alpha^t d\xi_k - \lambda A\sum_{\tau_k\in T}\big[\,x_kQ_k^+ + x_k^+\psi(Q_k^+)\,\big]\int_\alpha^t d\eta_k =$$

$$= y^T(t) - \sum_{\tau_k\in T} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Функция Q^T непрерывна, а функции $x^T(t)$, $\displaystyle\int_\alpha^t x\,dQ^T$ и $y^T(t)$ непрерывны в точках $\tau_k \in T$, следовательно, уравнение (1.1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x^T(t) - \lambda A\displaystyle\int_\alpha^t x\,dQ^T = y^T(t), \\ x_k^- - \lambda A\,[\,x_kQ_k^- + x_k^-\varphi(Q_k^-)\,] = y_k^-, \quad \tau_k\in T, \\ x_k^+ - \lambda A\,[\,x_kQ_k^+ + x_k^+\psi(Q_k^+)\,] = y_k^+, \quad \tau_k\in T, \end{cases} \tag{1.2}$$

относительно вектор-функции $x^T(\cdot) = \mathrm{col}\,\big(\,x_1^T(\cdot),\dots,x_r^T(\cdot)\,\big)$ и векторов

$$x_k^- = \mathrm{col}\,\big(\,(x_1)_k^-,\dots,(x_r)_k^-\,\big),\quad x_k^+ = \mathrm{col}\,\big(\,(x_1)_k^+,\dots,(x_r)_k^+\,\big),\quad \tau_k\in T.$$

Первое уравнение (1.2) равносильно уравнению

$$x^T(t) - \lambda A\int_\alpha^t x^T\,dQ^T = b(t), \tag{1.3}$$

где

$$b(t) \doteq y^T(t) + \lambda A\int_\alpha^t\Big[-\sum_{\tau_k\in T} x_k^-\int_\alpha^s d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x_k^+\int_\alpha^s d\eta_k\Big]\,dQ^T(s).$$

В силу утверждения 5 [2] единственное решение уравнения (1.3) представимо в форме Коши

$$x^T(t) = X(t,\alpha)\,b(\alpha) + \int_\alpha^t X(t,s)\,db(s),$$

где $X(t,\tau) \doteq \exp\Big(\lambda A\displaystyle\int_\tau^t dQ^T\Big)$. Поскольку $b(\alpha) = y^T(\alpha) = y(\alpha)$, то

$$x^T(t) = X(t,\alpha)\,y(\alpha) + \int_\alpha^t X(t,s)\,dy^T(s) + \sigma_1 + \sigma_2, \tag{1.4}$$

где

$$\sigma_1 \doteq -\sum_{\tau_k\in T}\int_\alpha^t X(t,s)\,d_s\Big[\,\lambda A x_k^-\int_\alpha^s\Big(\int_\alpha^\tau d\xi_k\Big)\,dQ^T(\tau)\,\Big],$$

$$\sigma_2 \doteq \sum_{\tau_k\in T}\int_\alpha^t X(t,s)\,d_s\Big[\,\lambda A x_k^+\int_\alpha^s\Big(\int_\alpha^\tau d\eta_k\Big)\,dQ^T(\tau)\,\Big].$$

Справедлива цепочка равенств

$$\sigma_1 = -\sum_{\tau_k\in T}\Big[\int_\alpha^t X(t,s)\,\lambda A\Big(\int_\alpha^s d\xi_k\Big)\,dQ^T(s)\Big]\,x_k^- = -\sum_{\tau_k\in T}\Big[\int_\alpha^t\Big(\int_\alpha^s d\xi_k\Big)\,X(t,s)\;d\big(\lambda A Q^T(s)\big)\Big]\,x_k^- =$$

$$= \sum_{\tau_k\in T}\Big[\int_\alpha^t\Big(\int_\alpha^s d\xi_k\Big)\,d_s X(t,s)\Big]\,x_k^- = \sum_{\tau_k\in T} x_k^-\int_\alpha^t d\xi_k - \sum_{\tau_k\in T}\int_\alpha^t X(t,s)\,x_k^-\,d\xi_k(s).$$

(Применили формулу интегрирования по частям.) Функция $X(t,s)$ непрерывна, следовательно, $\sigma_1 = -\sum\limits_{\tau_k\in T}\big[\,X(t,\tau_k)-E\,\big]\,x_k^-\int_\alpha^t d\xi_k$. Аналогично, $\sigma_2 = \sum\limits_{\tau_k\in T}\big[\,X(t,\tau_k)-E\,\big]\,x_k^+\int_\alpha^t d\eta_k$. Таким образом, с учетом формул (1.4) и $x = x^T + x_T$ имеем равенство

$$x(t) = X(t,\alpha)\,y(\alpha) + \int_\alpha^t X(t,s)\,dy^T(s) - \sum_{\tau_\ell\in T} X(t,\tau_\ell)\,x_\ell^-\int_\alpha^t d\xi_\ell + \sum_{\tau_\ell\in T} X(t,\tau_\ell)\,x_\ell^+\int_\alpha^t d\eta_\ell, \tag{1.5}$$

в котором индекс k заменен на ℓ. Формула (1.5) связывает искомое решение $x(\cdot)$ с его скачками x_ℓ^- и x_ℓ^+ в точках $\tau_\ell\in T$. В частности, при $t=\tau_k\in T$ имеет место равенство

$$x_k = Y_k - \sum_{\ell=1}^n M_{k\ell}x_\ell^- + \sum_{\ell=1}^n N_{k\ell}x_\ell^+, \tag{1.6}$$

где $n \doteq \operatorname{card} T$, а вектор Y_k и матрицы $M_{k\ell}$ и $N_{k\ell}$ определены формулами

$$Y_k \doteq X(\tau_k,\alpha)\,y(\alpha) + \int_\alpha^{\tau_k} X(\tau_k,s)\,dy^T(s),\quad M_{k\ell}\doteq X(\tau_k,\tau_\ell)\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_\ell,\quad N_{k\ell}\doteq X(\tau_k,\tau_\ell)\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_\ell,$$

причем $M_{kk} = -E\,\xi_k(\alpha)$, $N_{kk} = -E\,\eta_k(\alpha)$. Последние уравнения (1.2) имеют вид

$$[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,x_k^- - \lambda Q_k^- A x_k = y_k^-,\quad [\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,x_k^+ - \lambda Q_k^+ A x_k = y_k^+,$$

следовательно, с учетом (1.6) скачки функции $x(\cdot)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} [\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A - \lambda Q_k^-\xi_k(\alpha)A\,]\,x_k^- + \lambda Q_k^- A \sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\ne k}}^n M_{k\ell}x_\ell^- - \lambda Q_k^- A\sum\limits_{\ell=1}^n N_{k\ell}x_\ell^+ = y_k^- + \lambda Q_k^- A Y_k,\\ [\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A + \lambda Q_k^+\eta_k(\alpha)A\,]\,x_k^+ + \lambda Q_k^+ A\sum\limits_{\ell=1}^n M_{k\ell}x_\ell^- - \lambda Q_k^+ A\sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\ne k}}^n N_{k\ell}x_\ell^+ = y_k^+ + \lambda Q_k^+ A Y_k.\end{cases}$$

Матричные коэффициенты перед векторами x_k^- и x_k^+ равны $E-\lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E-\lambda\varrho_k(\alpha)A$ соответственно. Покажем, что они обратимы.

Если $\alpha\in T(Q)$, то $T = T(Q)$, а поскольку λ регулярно, то обе матрицы $E-\lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E-\lambda\varrho_k(\alpha)A$ обратимы при всех $\tau_k\in T$. Если же $\alpha\notin T(Q)$, то $Q_m^- = Q_m^+ = 0$, где через m обозначен тот индекс, что $\alpha=\tau_m$. Это означает, что $\pi_m(\alpha)=\varrho_m(\alpha)=0$ и матрицы $E-\lambda\pi_m(\alpha)A$ и $E-\lambda\varrho_m(\alpha)A$ обратимы. Остальные матрицы обратимы в силу регулярности λ. Таким образом, в любом случае матрицы $E-\lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E-\lambda\varrho_k(\alpha)A$ обратимы при всех $\tau_k \in T$, поэтому система принимает вид

$$\begin{cases} x_k^- + \mu_k \sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} M_{k\ell}x_\ell^- - \mu_k \sum\limits_{\ell=1}^{n} N_{k\ell}x_\ell^+ = p_k, \\ x_k^+ + \nu_k \sum\limits_{\ell=1}^{n} M_{k\ell}x_\ell^- - \nu_k \sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} N_{k\ell}x_\ell^+ = q_k, \end{cases}$$

где матрицы μ_k и ν_k и векторы p_k и q_k определены формулами

$$\mu_k \doteq \lambda Q_k^- \,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}A, \quad \nu_k \doteq \lambda Q_k^+ \,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}A, \tag{1.7}$$

$$p_k \doteq [\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}(\,y_k^- + \lambda Q_k^- AY_k\,), \quad q_k \doteq [\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}(\,y_k^+ + \lambda Q_k^+ AY_k\,).$$

Исследуем коэффициенты полученной системы, предварительно заметив, что все диагональные коэффициенты равны E. Поскольку $\alpha \in T$, то $\alpha = \tau_m$ для некоторого m, поэтому (считаем $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$):

1) если $\ell < m$ и $\ell < k$, то $M_{k\ell} = X(\tau_k,\tau_\ell)\displaystyle\int_{\tau_m}^{\tau_k} d\xi_\ell = 0$ и $N_{k\ell} = X(\tau_k,\tau_\ell)\displaystyle\int_{\tau_m}^{\tau_k} d\eta_\ell = 0$;
2) аналогично если $\ell > m$ и $\ell > k$, то $M_{k\ell} = N_{k\ell} = 0$;
3) если $\ell < m$, то $M_{\ell\ell} = 0$;
4) если $\ell > m$, то $N_{\ell\ell} = 0$;
5) если $\ell = m$ и $k \leqslant m$, то $N_{k\ell} = 0$;
6) если $\ell = m$ и $k \geqslant m$, то $M_{k\ell} = 0$.

Это означает, что матрица системы уравнений (коэффициенты этой матрицы сами являются матрицами порядка r) относительно неизвестных векторов $(x_1^-, x_1^+, \ldots, x_n^-, x_n^+)$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} \end{pmatrix},$$

квадратные блоки σ^{11} и σ^{22} имеют размерность $2m-1$ и $2n-2m+1$ соответственно. При этом: в блоке σ^{11} под диагональю расположены нулевые матрицы, а на диагонали — единичные матрицы E; в блоке σ^{22} над диагональю — нулевые матрицы, на диагонали — E; блоки σ^{12} и σ^{21} состоят сплошь из нулевых матриц.

Тем самым система имеет единственное решение, а ссылка на формулу (1.5) завершает доказательство теоремы. □

Если Q непрерывна, то любое λ регулярно, причем справедливо $\displaystyle\int_\alpha^t x_j \Delta Q = \int_\alpha^t x_j dQ$ для любого $\Delta \in \Omega^2$, следовательно, утверждение теоремы 1 трансформируется в классическую теорему существования и единственности.

Заметим также, что если λ не является регулярным, то уравнение (1.1) либо вовсе не имеет решений, либо имеет их бесконечно много. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 1. Пусть $0 \in K$, $g, h \in \mathbb{R}$, $\alpha \in K$, $\alpha < 0$, $Q(t) \doteq -g\displaystyle\int_\alpha^t d\xi + h\int_\alpha^t d\eta$ и рассмотрим уравнение

$$x(t) - \lambda\int_\alpha^t x\Delta Q = 1,$$

в котором $\Delta \doteq (\varphi,\psi)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таковы, что $1-\lambda\psi(h) = 0$ (это означает, что λ не регулярно). Здесь $T = \{0\}$, поэтому система (1.2) для составляющих функции $x(t) \doteq x^T(t) - p\displaystyle\int_\alpha^t d\xi + q\int_\alpha^t d\eta$ имеет вид

$$x^T \equiv 1, \quad p - \lambda\,\big(\,x(0)g + p\varphi(g)\,\big) = 0, \quad q - \lambda\,\big(\,x(0)h + q\psi(h)\,\big) = 0,$$

а равенства $x(0) = x^T(0) - p = 1 - p$ и $\lambda\psi(h) = 1$ приводят к системе

$$p - \lambda\,(1-p)\,g - \lambda p\,\varphi(g) = 0, \quad \lambda\,(1-p)\,h = 0.$$

Поскольку $\lambda\psi(h) = 1$, то $h \neq 0$ (иначе бы $\psi(h) = 0$) и $\lambda \neq 0$, следовательно, система эквивалентна следующей:

$$1 - \lambda\varphi(g) = 0, \quad p = 1.$$

Таким образом, если $1-\lambda\varphi(g) \neq 0$, то решений нет, а в противном случае бесконечное семейство функций $x(t) = 1 - \int_\alpha^t d\xi + q\int_\alpha^t d\eta$, $q \in \mathbb{R}$, удовлетворяет исходному уравнению.

§ 2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leqslant b$ — разбиение отрезка $[a,b]$. При $m < n$ произведение матричнозначных функций*

$$x(t) \doteq E - \sum_{k=1}^m A^k \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{k=1}^m B^k \int_\alpha^t d\eta_k, \quad y(t) \doteq E - A^{m+1}\int_\alpha^t d\xi_{m+1} + B^{m+1}\int_\alpha^t d\eta_{m+1} \tag{2.1}$$

удовлетворяет тождеству $x(t)\,y(t) = E + [\,x(t)-E\,]\,y(a) + x(b)\,[\,y(t)-E\,]$. Здесь A^k, B^k (где $k = 1, \ldots, m+1$) — произвольные матрицы порядка r.

Доказательство. Пусть $T \doteq \{\,\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m+1}\,\}$. Для любых $i, s, j = 1, \ldots, r$ имеем

$$x_{is}(t) = \delta_{is} - \sum_{k=1}^m A_{is}^k \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{k=1}^m B_{is}^k \int_\alpha^t d\eta_k, \quad y_{sj}(t) = \delta_{sj} - A_{sj}^{m+1}\int_\alpha^t d\xi_{m+1} + B_{sj}^{m+1}\int_\alpha^t d\eta_{m+1}.$$

Следовательно, $x_{is}^T(t) = \delta_{is}$, $y_{sj}^T(t) = \delta_{sj}$,

$$x_{isk}^- \doteq (x_{is})_k^- = \begin{cases} A_{is}^k, & k \leqslant m, \\ 0, & k = m+1, \end{cases} \qquad x_{isk}^+ \doteq (x_{is})_k^+ = \begin{cases} B_{is}^k, & k \leqslant m, \\ 0, & k = m+1, \end{cases}$$

$$y_{sjk}^- \doteq (y_{sj})_k^- = \begin{cases} 0, & k \leqslant m, \\ A_{sj}^{m+1}, & k = m+1, \end{cases} \qquad y_{sjk}^+ \doteq (y_{sj})_k^+ = \begin{cases} 0, & k \leqslant m, \\ B_{sj}^{m+1}, & k = m+1. \end{cases}$$

В силу формулы (2.16) [2] справедливо равенство

$$x_{is}(t)\,y_{sj}(t) = (x_{is}\,y_{sj})^T(t) + (x_{is}\,y_{sj})_T(t) = x_{is}(\alpha)\,y_{sj}(\alpha) + \int_\alpha^t x_{is}\,dy_{sj}^T + \int_\alpha^t y_{sj}\,dx_{is}^T + \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$\sigma_1 \doteq -\sum_{k=1}^{m+1} \begin{vmatrix} x_{isk} + x_{isk}^- & y_{sjk} \\ x_{isk} & y_{sjk} + y_{sjk}^- \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k, \quad \sigma_2 \doteq \sum_{k=1}^{m+1} \begin{vmatrix} x_{isk} + x_{isk}^+ & y_{sjk} \\ x_{isk} & y_{sjk} + y_{sjk}^- \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Интегралы по функциям y_{sj}^T и x_{is}^T равны нулю и выполнено равенство $x_{is}(\alpha)\,y_{sj}(\alpha) = \delta_{is}\delta_{sj}$. При $k \leqslant m$ выполнено $y_{sjk}^- = 0$, а при $k = m+1$ имеем $x_{isk}^- = 0$, следовательно,

$$\sigma_1 = -\sum_{k=1}^m x_{isk}^-\,y_{sjk}\int_\alpha^t d\xi_k - x_{is,m+1}\,y_{sj,m+1}^-\int_\alpha^t d\xi_{m+1} = -\sum_{k=1}^m A_{is}^k\,y_{sjk}\int_\alpha^t d\xi_k - x_{is,m+1}\,A_{sj}^{m+1}\int_\alpha^t d\xi_{m+1}.$$

Цепочка равенств

$$x_{is,m+1} = x_{is}(\tau_{m+1}) = \delta_{is} - \sum_{k=1}^m A_{is}^k \int_\alpha^{\tau_{m+1}} d\xi_k + \sum_{k=1}^m B_{is}^k \int_\alpha^{\tau_{m+1}} d\eta_k =$$

$$= \delta_{is} - \sum_{k=1}^m A_{is}^k \int_\alpha^b d\xi_k + \sum_{k=1}^m B_{is}^k \int_\alpha^b d\eta_k$$

заканчивается ссылкой на очевидные равенства $\int_{\tau_{m+1}}^{b} d\xi_k = \int_{\tau_{m+1}}^{b} d\eta_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Таким образом, $x_{is,m+1} = x_{is}(b)$. Аналогично при $k \leqslant m$

$$y_{sjk} = y_{sj}(\tau_k) = \delta_{sj} - A_{sj}^{m+1} \int_{\alpha}^{\tau_k} d\xi_{m+1} + B_{sj}^{m+1} \int_{\alpha}^{\tau_k} d\eta_{m+1} =$$

$$= \delta_{sj} - A_{sj}^{m+1} \int_{\alpha}^{a} d\xi_{m+1} + B_{sj}^{m+1} \int_{\alpha}^{a} d\eta_{m+1} = y_{sj}(a),$$

следовательно,

$$\sigma_1 = \Big[-\sum_{k=1}^{m} A_{is}^{k} \int_{\alpha}^{t} d\xi_k \Big]\, y_{sj}(a) - x_{is}(b) A_{sj}^{m+1} \int_{\alpha}^{t} d\xi_{m+1}.$$

Аналогично

$$\sigma_2 = \Big[\sum_{k=1}^{m} B_{is}^{k} \int_{\alpha}^{t} d\eta_k \Big]\, y_{sj}(a) + x_{is}(b) B_{sj}^{m+1} \int_{\alpha}^{t} d\eta_{m+1},$$

поэтому при всех i, s, j имеем $x_{is}(t)\, y_{sj}(t) = \delta_{is}\delta_{sj} + [\, x_{is}(t) - \delta_{is} \,]\, y_{sj}(a) + x_{is}(b)\, [\, y_{sj}(t) - \delta_{sj} \,]$ и

$$x(t)\, y(t) = E + [\, x(t) - E \,]\, y(a) + x(b)\, [\, y(t) - E \,].$$

Лемма 2. *Пусть $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leqslant b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Произведение матричнозначных функций*

$$\omega_k(t) \doteq E - M_k \int_{\alpha}^{t} d\xi_k + N_k \int_{\alpha}^{t} d\eta_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где M_k и N_k — произвольные матрицы порядка r, удовлетворяет тождеству

$$\prod_{k=1}^{n} \omega_k(t) = E + \sum_{k=1}^{n} \omega_1(b) \ldots \omega_{k-1}(b) \,\big\{\, \omega_k(t) - E \,\big\}\, \omega_{k+1}(a) \ldots \omega_n(a).$$

Формальное доказательство проводится индукцией, мы же лишь заметим, что в соответствии с леммой 1 имеем $\omega_1(t)\, \omega_2(t) = E + \big\{\, \omega_1(t) - E \,\big\}\, \omega_2(a) + \omega_1(b) \,\big\{\, \omega_2(t) - E \,\big\}$, причем это произведение имеет вид (2.1) при $m = 2$, следовательно,

$$\omega_1(t)\, \omega_2(t)\, \omega_3(t) = E + \big\{\, \omega_1(t)\, \omega_2(t) - E \,\big\}\, \omega_3(a) + \omega_1(b)\, \omega_2(b) \,\big\{\, \omega_3(t) - E \,\big\} =$$

$$= E + \big\{\, \omega_1(t) - E \,\big\}\, \omega_2(a)\, \omega_3(a) + \omega_1(b) \,\big\{\, \omega_2(t) - E \,\big\}\, \omega_3(a) + \omega_1(b)\, \omega_2(b) \,\big\{\, \omega_3(t) - E \,\big\}$$

и так далее.

§ 3. Представление решения однородного квазиинтегрального уравнения

Уравнение (1.1), в котором правая часть есть постоянный вектор, будем называть *однородным* и записывать в следующей форме:

$$x(t) - \lambda A \int_{\alpha}^{t} x \Delta Q = x(\alpha). \tag{3.1}$$

Теорема 2. *Уравнение* (3.1) *при регулярном λ имеет единственное решение, представимое в виде*

$$x(t) = \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(t)\, \varepsilon_k^{-1}(\alpha) \Big)\, \exp\Big(\lambda A \int_{\alpha}^{t} dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big)\, x(\alpha), \tag{3.2}$$

где $T \doteq T(Q)$ и $\varepsilon_k(s) \doteq [\, E - \lambda \pi_k(s) A \,]\, [\, E - \lambda \varrho_k(s) A \,]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения справедливы в силу теоремы 1, поэтому остается лишь показать, что этим решением является функция (3.2). Введем в рассмотрение матрицы (существующие в силу регулярности λ)

$$M_k \doteq \mu_k\,[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,],\quad N_k \doteq \nu_k\,[\,E+\mu_k\xi_k(\alpha)\,],$$

$$\omega_k(t) \doteq \varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha),\quad \Theta_k \doteq \omega_1(b)\ldots\omega_{k-1}(b)\,\omega_{k+1}(a)\ldots\omega_n(a),$$

где матрицы μ_k и ν_k определены в (1.7), и докажем равенства

$$\omega_k(t) = E - M_k\int_\alpha^t d\xi_k + N_k\int_\alpha^t d\eta_k,\quad \prod_{\tau_k\in T}\omega_k(\tau_m) = \Theta_m\,\omega_m(\tau_m),\quad \tau_m\in T. \tag{3.3}$$

При всех $s\in K$ имеет место цепочка равенств

$$\varepsilon_k(s) = [\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A-\lambda Q_k^-\xi_k(s)A\,]\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A+\lambda Q_k^+\eta_k(s)A\,] =$$

$$= [\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]-\lambda Q_k^-\xi_k(s)\,A\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]+\lambda Q_k^+\eta_k(s)\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,A,$$

следовательно,

$$\omega_k(t)-E = [\,\varepsilon_k(t)-\varepsilon_k(\alpha)\,]\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha) =$$

$$= -\Big(\lambda Q_k^-\int_\alpha^t d\xi_k\Big)\,A\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha)+\Big(\lambda Q_k^+\int_\alpha^t d\eta_k\Big)\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,A\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha).$$

Поскольку $\varepsilon_k^{-1}(\alpha) = [\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}$, то $\omega_k(t)-E = \sigma_1+\sigma_2$, где

$$\sigma_1 \doteq -\Big(\lambda Q_k^-\int_\alpha^t d\xi_k\Big)\,A\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1},$$

$$\sigma_2 \doteq \Big(\lambda Q_k^+\int_\alpha^t d\eta_k\Big)\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,A\,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}.$$

Легко убедиться, что при всех $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ матрицы A, $E-\gamma A$, $E-\delta A$, $[\,E-\gamma A\,]^{-1}$, $[\,E-\delta A\,]^{-1}$ коммутируют между собой (конечно, при условии, что последние две матрицы существуют), следовательно,

$$\sigma_1 = -\mu_k\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}\int_\alpha^t d\xi_k,$$

$$\sigma_2 = \nu_k\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}\int_\alpha^t d\eta_k.$$

Поскольку $\psi(Q_k^+) = \varrho_k(\alpha)+Q_k^+\eta_k(\alpha)$ и $\varphi(Q_k^-) = \pi_k(\alpha)-Q_k^-\xi_k(\alpha)$, то

$$\sigma_1 = -\mu_k\,[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,]\int_\alpha^t d\xi_k,\quad \sigma_2 = \nu_k\,[\,E+\mu_k\xi_k(\alpha)\,]\int_\alpha^t d\eta_k,$$

что и доказывает первую формулу (3.3).

Легко убедиться, что при всех $k<m$ справедливы равенства $\pi_k(\tau_m) = \varphi(Q_k^-) = \pi_k(b)$ и $\varrho_k(\tau_m) = -\psi^*(Q_k^+) = \varrho_k(b)$, поэтому $\varepsilon_k(\tau_m) = \varepsilon_k(b)$ и $\omega_k(\tau_m) = \omega_k(b)$. Аналогично при $k>m$ имеем $\pi_k(\tau_m) = -\varphi^*(Q_k^-) = \pi_k(a)$, $\varrho_k(\tau_m) = \psi(Q_k^+) = \varrho_k(a)$ и, соответственно, $\varepsilon_k(\tau_m) = \varepsilon_k(a)$ и $\omega_k(\tau_m) = \omega_k(a)$. Следовательно,

$$\prod_{\tau_k\in T}\omega_k(\tau_m) = \omega_1(b)\ldots\omega_{m-1}(b)\,\omega_m(\tau_m)\,\omega_{m+1}(a)\ldots\omega_n(a).$$

При любых $t,s\in K$ матрицы $\varepsilon_k(t)$, $\varepsilon_m(s)$, $\varepsilon_k^{-1}(\alpha)$, $\varepsilon_m^{-1}(\alpha)$ коммутируют между собой, поэтому матрицы $\omega_k(t)$ и $\omega_m(s)$ тоже коммутируют, что доказывает вторую формулу (3.3).

Формулу (3.2) можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \Big(\prod_k \omega_k(t) \Big) X(t, \alpha)\, x(\alpha), \tag{3.4}$$

где $X(t,\tau) \doteq \exp\Big(\lambda A \int_\tau^t dQ^T \Big)$ и пишем $\prod\limits_k$ вместо $\prod\limits_{\tau_k \in T}$, следовательно, в силу (3.3)

$$x_m = x(\tau_m) = \Theta_m\, \omega_m(\tau_m)\, X(\tau_m, \alpha)\, x(\alpha) = \Theta_m \,[\, E + M_m \xi_m(\alpha) - N_m \eta_m(\alpha)\,]\, X(\tau_m, \alpha)\, x(\alpha), \tag{3.5}$$

а для произвольного $t \in K$ в соответствии с (3.3), леммой 2 и определением матриц Θ_k справедлива цепочка равенств

$$x(t) = \Big(E + \sum_k \Theta_k \,\{\, \omega_k(t) - E \,\} \Big) X(t, \alpha)\, x(\alpha) =$$

$$= \Big(E - \sum_k \Theta_k M_k \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k \Theta_k N_k \int_\alpha^t d\eta_k \Big) X(t, \alpha)\, x(\alpha).$$

Тем самым векторы x_k^- и x_k^+ равны:

$$x_k^- = \Theta_k\, M_k\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha), \quad x_k^+ = \Theta_k\, N_k\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha), \tag{3.6}$$

что справедливо в силу следующего утверждения: если f — непрерывная функция, то

$$f(t) \int_\alpha^t d\xi_k = [\, f(t) - f(\tau_k)\,] \int_\alpha^t d\xi_k + f(\tau_k) \int_\alpha^t d\xi_k, \quad f(t) \int_\alpha^t d\eta_k = [\, f(t) - f(\tau_k)\,] \int_\alpha^t d\eta_k + f(\tau_k) \int_\alpha^t d\eta_k,$$

где первые слагаемые суть непрерывные функции.

Равенства $N_k \eta_k(\alpha) = \nu_k \,[\, E + \mu_k \xi_k(\alpha)\,]\, \eta_k(\alpha) = \nu_k \eta_k(\alpha) + \nu_k\, \mu_k\, \xi_k(\alpha)\, \eta_k(\alpha) = \nu_k \eta_k(\alpha)$,

$$\mu_k \pi_k(\alpha) = \lambda Q_k^- \,[\, E - \lambda \pi_k(\alpha) A\,]^{-1} A \pi_k(\alpha) =$$

$$= Q_k^- \,[\, E - \lambda \pi_k(\alpha) A\,]^{-1} \big[\, E - [\, E - \lambda \pi_k(\alpha) A\,]\big] = Q_k^- \,\big[\, [\, E - \lambda \pi_k(\alpha) A\,]^{-1} - E\,\big],$$

формулы (3.5), (3.6) и равенство $Q_k^- \xi_k(\alpha) + \varphi(Q_k^-) = \pi_k(\alpha)$ влекут цепочку равенств

$$\sigma \doteq \lambda A \big(x_k Q_k^- + x_k^- \varphi(Q_k^-) \big) = \lambda A\, \Theta_k \,\big[\, [\, E + M_k \xi_k(\alpha) - N_k \eta_k(\alpha)\,]\, Q_k^- + M_k \varphi(Q_k^-) \big]\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha) =$$

$$= \lambda A\, \Theta_k \,[\, Q_k^- E + M_k \pi_k(\alpha) - Q_k^- \nu_k \eta_k(\alpha)\,]\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha) =$$

$$= \lambda A\, \Theta_k \,\big[\, \mu_k \pi_k(\alpha)\,[\, E - \nu_k \eta_k(\alpha)\,] + Q_k^- \,[\, E - \nu_k \eta_k(\alpha)\,]\big]\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha) =$$

$$= \lambda A\, \Theta_k Q_k^- \,[\, E - \lambda \pi_k(\alpha) A\,]^{-1} [\, E - \nu_k \eta_k(\alpha)\,]\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha).$$

Матрица A коммутирует с Θ_k и $[\, E - \lambda \pi_k(\alpha) A\,]^{-1}$, следовательно,

$$\sigma = \Theta_k \mu_k \,[\, E - \nu_k \eta_k(\alpha)\,]\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha) = \Theta_k\, M_k\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha).$$

Аналогично доказывается равенство $\lambda A \big(x_k Q_k^+ + x_k^+ \psi(Q_k^+) \big) = \Theta_k\, N_k\, X(\tau_k, \alpha)\, x(\alpha)$, следовательно, в формуле

$$\lambda A \int_\alpha^t x \Delta Q = \lambda A \int_\alpha^t x\, dQ^T + \sigma_1 \tag{3.7}$$

имеем

$$\sigma_1 \doteq -\lambda A \sum_k \big(x_k Q_k^- + x_k^- \varphi(Q_k^-) \big) \int_\alpha^t d\xi_k + \lambda A \sum_k \big(x_k Q_k^+ + x_k^+ \psi(Q_k^+) \big) \int_\alpha^t d\eta_k =$$

$$= -\sum_k \Theta_k\, M_k\, X(\tau_k,\alpha)\, x(\alpha) \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k \Theta_k\, N_k\, X(\tau_k,\alpha)\, x(\alpha) \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Матрицы A, $\omega_k(s)$ и $X(s,\alpha)$ коммутируют между собой, поэтому в силу (3.4) и (3.7)

$$\lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = \Big[\lambda A \int_\alpha^t \Big(\prod_k \omega_k(s)\Big)\, X(s,\alpha)\, dQ^{\scriptscriptstyle T}(s)\Big]\, x(\alpha) + \sigma_1 =$$

$$= \Big[\int_\alpha^t \Big(\prod_k \omega_k(s)\Big) \exp\Big(\lambda A \int_\alpha^s dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)\, d\Big(\lambda A \int_\alpha^s dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)\Big]\, x(\alpha) + \sigma_1 =$$

$$= \Big[\int_\alpha^t \Big(\prod_k \omega_k(s)\Big)\, d \exp\Big(\lambda A \int_\alpha^s dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)\Big]\, x(\alpha) + \sigma_1.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\omega_k(\alpha) = E$, имеем

$$\lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = \Big(\prod_k \omega_k(t)\Big)\, X(t,\alpha)\, x(\alpha) - \Big(\prod_k \omega_k(\alpha)\Big)\, x(\alpha) -$$

$$-\Big[\int_\alpha^t X(s,\alpha)\, d\Big(\prod_k \omega_k(s)\Big)\Big]\, x(\alpha) + \sigma_1 = x(t) - x(\alpha) + \sigma_1 + \sigma_2,$$

где в соответствии с леммой 2

$$\sigma_2 \doteq -\Big[\int_\alpha^t X(s,\alpha)\, d\Big(\prod_k \omega_k(s)\Big)\Big]\, x(\alpha) =$$

$$= -\Big[\int_\alpha^t X(s,\alpha)\, d\Big(E - \sum_k \Theta_k M_k \int_\alpha^s d\xi_k + \sum_k \Theta_k N_k \int_\alpha^s d\eta_k\Big)\Big]\, x(\alpha) =$$

$$= \Big[\sum_k X(\tau_k,\alpha)\, \Theta_k M_k \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_k X(\tau_k,\alpha)\, \Theta_k N_k \int_\alpha^t d\eta_k\Big]\, x(\alpha).$$

В последнем равенстве воспользовались непрерывностью X и формулами (2.5) [2]. Поскольку матрицы $X(\tau_k,\alpha)$, Θ_k, M_k коммутируют, то $\sigma_2 = -\sigma_1$, поэтому $\lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = x(t) - x(\alpha)$.

Пример 2. При $Q(s) = s - g\xi(s) + h\eta(s)$, $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$, $v \neq 0$, уравнение (3.1) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) - \lambda u \int_\alpha^t x_1 \Delta Q - \lambda v \int_\alpha^t x_2 \Delta Q = x_1(\alpha) \\ x_2(t) + \lambda v \int_\alpha^t x_1 \Delta Q - \lambda u \int_\alpha^t x_2 \Delta Q = x_2(\alpha). \end{cases} \tag{3.8}$$

Здесь $T = \{\,0\,\}$, функции $\pi(\cdot)$ и $\varrho(\cdot)$ равны $\varphi(g) + g\xi(\cdot)$ и $\psi(h) - h\eta(\cdot)$ соответственно, а матрицы $E - \lambda\pi(\cdot)A$ и $E - \lambda\varrho(\cdot)A$ равны

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\pi(\cdot)u & -\lambda\pi(\cdot)v \\ \lambda\pi(\cdot)v & 1-\lambda\pi(\cdot)u \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda\varrho(\cdot)u & -\lambda\varrho(\cdot)v \\ \lambda\varrho(\cdot)v & 1-\lambda\varrho(\cdot)u \end{pmatrix}.$$

Они обратимы, поэтому любое λ — регулярное число, следовательно, уравнение (3.8) при всех λ имеет единственное решение

$$x(t) = \varepsilon(t)\, \varepsilon^{-1}(\alpha)\, \exp\big(\lambda A\, (t-\alpha)\big)\, x(\alpha),$$

где $\varepsilon(\cdot) \doteq [\,E - \lambda\pi(\cdot)A\,]\,[\,E - \lambda\varrho(\cdot)A\,]$.

В частности, при $g = h = 0$ уравнение (3.8) можно интерпретировать как дифференциальное уравнение $\dot{x} = \lambda A x$, решением которого является функция $x(t) = \exp\big(\lambda A\,(t-\alpha)\big)\, x(\alpha)$. Сравнение двух решений приводит к тождеству $\varepsilon(t) \equiv \mathrm{const}$ и, как следствие, $\varepsilon(t) \equiv E$. Это действительно так, поскольку при $g = h = 0$ имеем $\pi(t) = \varrho(t) \equiv 0$ и $\varepsilon = E$.

§ 4. Четыре союзные системы квазиинтегральных уравнений в случае абсолютно регулярного спектрального параметра

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *абсолютно регулярным* для уравнения (1.1), если при всех $\tau_k \in T(Q)$ матрицы $E - \lambda\varphi(Q_k^-)A$, $E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A$, $E - \lambda\psi(Q_k^+)A$ и $E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A$ обратимы. Здесь $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ — пара двойственных дефектов (см. [4]).

Лемма 3. *Если λ — абсолютно регулярно для уравнения* (1.1), *то*

1) λ — *регулярно для уравнения* (1.1);

2) λ — *регулярно для уравнения*

$$x(t) + \lambda A \int_\alpha^t x\Delta^* Q = y(t); \tag{4.1}$$

3) λ — *регулярно для уравнения*

$$x(t) + \lambda A' \int_\alpha^t x\Delta^* Q = y(t), \tag{4.2}$$

где A' — сопряженная матрица к A.

Доказательство. 1. Зафиксируем $\tau_k \in T(Q)$.

Если $\alpha < \tau_k$, то $\pi_k(\alpha) = \varphi(Q_k^-) - Q_k^- = -\varphi^*(Q_k^-)$ и $\varrho_k(\alpha) = \psi(Q_k^+)$, следовательно, матрицы $E - \lambda\pi_k(\alpha)A = E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A = E - \lambda\psi(Q_k^+)A$ обратимы. Если $\alpha = \tau_k$, то $E - \lambda\pi_k(\alpha)A = E - \lambda\varphi(Q_k^-)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A = E - \lambda\psi(Q_k^+)A$ — обратимые матрицы. Наконец, при $\alpha > \tau_k$ имеем $E - \lambda\pi_k(\alpha)A = E - \lambda\varphi(Q_k^-)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A = E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A$, поэтому обратимость также имеет место.

2. Уравнение (4.1) отличается от (1.1) тем, что λ заменено на $-\lambda$, а функции φ и ψ — на φ^* и ψ^*, поэтому регулярность числа $\lambda \in \mathbb{R}$ для уравнения (4.1) означает, что матрицы $E+\lambda\pi_k^*(\alpha)A$ и $E+\lambda\varrho_k^*(\alpha)A$ обратимы, где $\pi_k^*(\cdot) \doteq \varphi^*(Q_k^-)+Q_k^-\xi_k(\cdot)$, $\varrho_k^*(\cdot) \doteq \psi^*(Q_k^+)-Q_k^+\eta_k(\cdot)$. Это действительно имеет место, в чем легко убедиться, проведя выкладки, аналогичные предыдущим, рассмотрев три случая: $\alpha < \tau_k$, $\alpha = \tau_k$ и $\alpha > \tau_k$.

3. Матрицы $E+\lambda\pi_k^*(\alpha)A'$ и $E+\lambda\pi_k^*(\alpha)A$ — сопряжены. То же самое можно сказать о матрицах $E+\lambda\varrho_k^*(\alpha)A'$ и $E+\lambda\varrho_k^*(\alpha)A$, поэтому доказательство завершает замечание, что сопряженные матрицы обратимы или нет одновременно. □

Для полноты картины заметим, что если λ — абсолютно регулярно для уравнения (1.1), то λ — регулярно и для уравнения

$$x(t) - \lambda A' \int_\alpha^t x\Delta Q = y(t). \tag{4.3}$$

Кроме того, справедливо более общее утверждение: если λ — абсолютно регулярно для одного из уравнений (1.1), (4.1), (4.2) или (4.3), то оно регулярно для всех этих уравнений. Более того, если λ — абсолютно регулярно для одного из уравнений (1.1), (4.1), (4.2) или (4.3), то оно абсолютно регулярно для всех остальных. Будем называть эти четыре уравнения *союзными.*

Таким образом, введя обозначение

$$D(\lambda) \doteq \prod_{\tau_k \in T} [\,E - \lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]\,[\,E - \lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A\,],$$

мы можем сформулировать эквивалентное определение: число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *абсолютно регулярным* для союзных уравнений (1.1), (4.1), (4.2) и (4.3), если $\det D(\lambda) \neq 0$.

Теорема 3. *Однородное уравнение*

$$x(t) + \lambda A \int_\alpha^t x\Delta^* Q = x(\alpha) \tag{4.4}$$

при регулярном λ имеет единственное решение

$$x(t) = \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k^*(t)\, \varepsilon_k^{*^{-1}}(\alpha) \Big) \exp \Big(-\lambda A \int_\alpha^t dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big)\, x(\alpha), \tag{4.5}$$

где $T \doteq T(Q)$ и $\varepsilon_k^*(s) \doteq [\,E + \lambda\pi_k^*(s)A\,]\,[\,E + \lambda\varrho_k^*(s)A\,]$.

Уравнение (4.4) можно рассматривать как уравнение (3.1), в котором вместо λ взято число $-\lambda$, а вместо Δ — дефект Δ^*. При этом величины $\pi_k(\cdot)$ и $\varrho_k(\cdot)$ переходят в $\pi_k^*(\cdot)$ и $\varrho_k^*(\cdot)$ соответственно, а матрица $\varepsilon_k(\cdot)$ — в $\varepsilon_k^*(\cdot)$.

Заметим также, что если λ — абсолютно регулярно для уравнения (4.4), то оно абсолютно регулярно для (3.1) и справедливы формулы (3.2) и (4.5).

§ 5. Аналог матрицы Коши

Определение 1. *Матрицей Коши* уравнения (1.1) при абсолютно регулярном λ называется матрица

$$C(t,\tau) \doteq D^{-1}(\lambda) \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(t)\, \varepsilon_k^*(\tau) \Big) \exp \Big(\lambda A \int_\tau^t dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big).$$

Отметим основные свойства матрицы Коши.

1. Справедливы включения: $C_{ij}(\cdot,\tau) \in \mathrm{PBV}$ при фиксированном $\tau \in K$ и $C_{ij}(t,\cdot) \in \mathrm{PBV}$ при фиксированном $t \in K$.

Утверждение легко следует из замечания, что компоненты матриц $\varepsilon_k(\cdot)$ и $\varepsilon_k^*(\cdot)$ — кусочно-постоянны, а матрица $\exp\Big(\lambda A \int_\tau^t dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)$ состоит из кусочно-непрерывных функций ограниченной вариации, как суперпозиция липшицевой функции $\exp(\cdot)$ и $Q^T \in \mathrm{PBV}$.

2. Имеет место полугрупповое свойство: $C(t,s)\,C(s,\tau) = C(t,\tau)$.

В правой части равенства

$$C(t,s)\,C(s,\tau) = D^{-1}(\lambda) \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(t)\, \varepsilon_k^*(s) \Big) \exp \Big(\lambda A \int_s^t dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big) \times$$

$$\times D^{-1}(\lambda) \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(s)\, \varepsilon_k^*(\tau) \Big) \exp \Big(\lambda A \int_\tau^s dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big)$$

все матрицы коммутируют между собой, следовательно, в силу легко проверяемых тождеств

$$[\,E - \lambda\pi_k(s)A\,]\,[\,E + \lambda\pi_k^*(s)A\,] \equiv [\,E - \lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,],$$

$$[\,E - \lambda\varrho_k(s)A\,]\,[\,E + \lambda\varrho_k^*(s)A\,] \equiv [\,E - \lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A\,],$$

$$\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(s)\, \varepsilon_k^*(s) \equiv D(\lambda) \tag{5.1}$$

справедливо равенство $C(t,s)\,C(s,\tau) = D^{-1}(\lambda) \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(t)\, \varepsilon_k^*(\tau) \Big) \exp \Big(\lambda A \int_\tau^t dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big) = C(t,\tau)$.

3. Тождество $C(s,s) \equiv E$ очевидно из предыдущего свойства.

4. Матрицы $C(t,\tau)$ и $C(\tau,t)$ — взаимно обратны.

5. Для любого абсолютно регулярного числа λ уравнение (3.1) имеет единственное решение $x(t)=C(t,\alpha)\,x(\alpha)$.

Действительно, в силу тождества (5.1) справедливо равенство

$$C(t,\alpha)\,x(\alpha)=D^{-1}(\lambda)\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^*(\alpha)\Big)\,\exp\Big(\lambda A\int_\alpha^t dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)\,x(\alpha)=$$

$$=\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha)\Big)\,\exp\Big(\lambda A\int_\alpha^t dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)\,x(\alpha),$$

в правой части которого стоит функция (3.2).

6. Аналогично доказывается, что уравнение (4.4) при абсолютно регулярном λ имеет единственное решение $x(t)=C(\alpha,t)\,x(\alpha)$.

Таким образом, уравнения (3.1) и (4.4) принимают вид

$$C(t,\alpha)\,x(\alpha)-\lambda A\int_\alpha^t C(s,\alpha)\,x(\alpha)\,\Delta Q(s)=x(\alpha),\quad C(\alpha,t)\,x(\alpha)+\lambda A\int_\alpha^t C(\alpha,s)\,x(\alpha)\,\Delta^*Q(s)=x(\alpha),$$

соответственно, следовательно, справедливы тождества

$$C(t,\tau)-\lambda A\int_\tau^t C(s,\tau)\,\Delta Q(s)\equiv E, \tag{5.2}$$

$$C(t,\tau)-\lambda A\int_\tau^t C(t,s)\,\Delta^*Q(s)\equiv E. \tag{5.3}$$

§ 6. Представление решений неоднородных квазиинтегральных уравнений

Теорема 4. *Уравнение* (1.1) *при абсолютно регулярном* λ *имеет единственное решение*

$$x(t)=C(t,\alpha)\,y(\alpha)+\int_\alpha^t C(t,s)\,\Delta^*y(s)-$$

$$-\lambda A\sum_{\tau_k\in T}C(t,\tau_k)\,[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]^{-1}\begin{vmatrix}\varphi(Q_k^-) & \varphi(y_k^-)\\ \varphi^*(Q_k^-) & \varphi^*(y_k^-)\end{vmatrix}\int_\alpha^t d\xi_k+$$

$$+\lambda A\sum_{\tau_k\in T}C(t,\tau_k)\,[\,E+\lambda\psi^*(Q_k^+)A\,]^{-1}\begin{vmatrix}\psi(Q_k^+) & \psi(y_k^+)\\ \psi^*(Q_k^+) & \psi^*(y_k^+)\end{vmatrix}\int_\alpha^t d\eta_k,$$

где $T\doteq\big[\,\bigcup_{i=1}^r T(y_i)\,\big]\cap T(Q)$, *а символическая запись через определители обозначает векторы*

$$\mathrm{col}\,\big(\,\varphi(Q_k^-)\varphi^*(y_{1k}^-)-\varphi^*(Q_k^-)\varphi(y_{1k}^-),\ \ldots\ ,\varphi(Q_k^-)\varphi^*(y_{rk}^-)-\varphi^*(Q_k^-)\varphi(y_{rk}^-)\,\big),$$

$$\mathrm{col}\,\big(\,\psi(Q_k^+)\psi^*(y_{1k}^+)-\psi^*(Q_k^+)\psi(y_{1k}^+),\ \ldots\ ,\psi(Q_k^+)\psi^*(y_{rk}^+)-\psi^*(Q_k^+)\psi(y_{rk}^+)\,\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1 решение существует и единственно. Обозначим его через $x(\cdot)$. В силу тождества (5.2) матрица $X(t)\doteq C(t,\alpha)$ удовлетворяет уравнению $X(t)-\lambda A\int_\alpha^t X\Delta Q=E$, то есть компоненты матрицы X удовлетворяют системе уравнений, аналогичной системе (1.2) :

$$\begin{cases} X^{\scriptscriptstyle T}(t)-\lambda A\displaystyle\int_\alpha^t X dQ^{\scriptscriptstyle T}=E,\\ X_k^- -\lambda A\,[\,X_kQ_k^- + X_k^-\varphi(Q_k^-)\,]=0,\quad \tau_k\in T,\\ X_k^+ -\lambda A\,[\,X_kQ_k^+ + X_k^+\psi(Q_k^+)\,]=0,\quad \tau_k\in T.\end{cases} \tag{6.1}$$

Матрица X обратима, следовательно, определен вектор $b(\cdot)$ такой, что $x = Xb$. Поскольку $X_{ij} \in \mathrm{PBV}$ и $b_j \in \mathrm{G}$, то квазиинтегралы $\int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij}$ и $\int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j$ существуют, поэтому в силу формулы (4.8) [4] справедливо равенство

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^r X_{ij}(t)\, b_j(t) = \sum_{j=1}^r X_{ij}(\alpha)\, b_j(\alpha) + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j + \sigma_{1i} =$$

$$= x_i(\alpha) + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j + \sigma_{1i},$$

где (с учетом обозначений $X^-_{ijk} \doteq (X_{ij})^-_k$, $X^+_{ijk} \doteq (X_{ij})^+_k$, $b^-_{jk} \doteq (b_j)^-_k$ и $b^+_{jk} \doteq (b_j)^+_k$)

$$\sigma_{1i} \doteq \sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} \varphi(X^-_{ijk}) & \varphi(b^-_{jk}) \\ \varphi^*(X^-_{ijk}) & \varphi^*(b^-_{jk}) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} \psi(X^+_{ijk}) & \psi(b^+_{jk}) \\ \psi^*(X^+_{ijk}) & \psi^*(b^+_{jk}) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k.$$

По определению квазиинтеграла имеем равенство $\sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} = \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j dX^T_{ij} + \sigma_{2i}$, где

$$\sigma_{2i} \doteq -\sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} b_{jk} & -\varphi(X^-_{ijk}) \\ b^-_{jk} & X^-_{ijk} \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} b_{jk} & -\psi(X^+_{ijk}) \\ b^+_{jk} & X^+_{ijk} \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k,$$

следовательно, в силу первого равенства (6.1) справедлива цепочка равенств

$$\sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} = \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j\, d\Big[\delta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t X_{kj} dQ^T\Big] + \sigma_{2i} =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t \Big[\sum_{j=1}^r X_{kj} b_j\Big] dQ^T + \sigma_{2i} = \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t x_k dQ^T + \sigma_{2i}.$$

Это означает, что $x_i(t) = x_i(\alpha) + \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t x_k dQ^T + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j + \sigma_{1i} + \sigma_{2i}$, или в векторной форме: $x(t) = x(\alpha) + \lambda A \int_\alpha^t x\, dQ^T + \int_\alpha^t X \Delta^* b + \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_1 \doteq \mathrm{col}\,(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1r}), \quad \sigma_2 \doteq \mathrm{col}\,(\sigma_{21}, \ldots, \sigma_{2r}).$$

Следовательно, уравнение (1.1) и равенство $x(\alpha) = y(\alpha)$ порождают цепочку равенств

$$y(t) = x(t) - \lambda A \int_\alpha^t x \Delta Q = x(\alpha) + \int_\alpha^t X \Delta^* b + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = y(\alpha) + \int_\alpha^t X db^T + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4,$$

где компоненты σ_{3i} и σ_{4i} векторов σ_3 и σ_4 равны

$$\sigma_{3i} \doteq \lambda \sum_{j=1}^r A_{ij} \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} x_{jk} & -\varphi(Q^-_k) \\ x^-_{jk} & Q^-_k \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k - \lambda \sum_{j=1}^r A_{ij} \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} x_{jk} & -\psi(Q^+_k) \\ x^+_{jk} & Q^+_k \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k,$$

$$\sigma_{4i} \doteq -\sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} X_{ijk} & -\varphi^*(b^-_{jk}) \\ X^-_{ijk} & b^-_{jk} \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} X_{ijk} & -\psi^*(b^+_{jk}) \\ X^+_{ijk} & b^+_{jk} \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k$$

соответственно. Здесь $x_{jk} \doteq x_j(\tau_k)$, $x^-_{jk} \doteq (x_j)^-_k$, $x^+_{jk} \doteq (x_j)^+_k$ Наконец, в силу определений (2.6) и (2.8) (см. [2]) справедливо равенство

$$y^T(t) = y^T(\alpha) + \int_\alpha^t X db^T + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5, \tag{6.2}$$

$$\sigma_5 \doteq \operatorname{col}(\sigma_{51},\ldots,\sigma_{5r}), \quad \sigma_{5i} \doteq \sum_{\tau_k\in T} y^-_{ik}\int_\alpha^t d\xi_k - \sum_{\tau_k\in T} y^+_{ik}\int_\alpha^t d\eta_k, \quad y^-_{ik} \doteq (y_i)^-_k, \quad y^+_{ik} \doteq (y_i)^+_k.$$

Поскольку функции y^T, b^T и $\displaystyle\int_\alpha^t X db^T$ непрерывны в точках $\tau_k \in T$, то уравнение (6.2) эквивалентно двум: $\sigma \doteq \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5 \equiv 0$ и

$$y^T(t) = y^T(\alpha) + \int_\alpha^t X db^T. \tag{6.3}$$

В силу тождества (5.3) матрица $Y(t) \doteq C(\alpha,t)$ удовлетворяет матричному уравнению $Y(t)+\lambda A\displaystyle\int_\alpha^t Y\Delta^* Q = E$, эквивалентному системе уравнений

$$\begin{cases} Y^T(t)+\lambda A\displaystyle\int_\alpha^t Y dQ^T = E, \\ Y^-_k + \lambda A\,[\,Y_k Q^-_k + Y^-_k \varphi^*(Q^-_k)\,] = 0, \quad \tau_k\in T, \\ Y^+_k + \lambda A\,[\,Y_k Q^+_k + Y^+_k \psi^*(Q^+_k)\,] = 0, \quad \tau_k\in T. \end{cases} \tag{6.4}$$

Поскольку $C(t,\alpha)\,C(\alpha,t) \equiv E$, то $XY = E$, следовательно, в силу (6.3) и очевидных равенств $b^T(\alpha) = b(\alpha) = x(\alpha) = y(\alpha)$ справедливы равенства

$$\int_\alpha^t Y dy^T = \int_\alpha^t Y(s)\,d\Big[\,y^T(\alpha)+\int_\alpha^s X db^T\Big] = \int_\alpha^t Y(s)X(s)\,db^T(s) = \int_\alpha^t db^T,$$

$$b^T(t) = y(\alpha) + \int_\alpha^t Y dy^T. \tag{6.5}$$

Тождество $\sigma\equiv 0$ означает, что при всех $i=1,\ldots,r$ и $\tau_k\in T$ для левых скачков выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^r\left\{\begin{vmatrix}\varphi(X^-_{ijk}) & \varphi(b^-_{jk})\\ \varphi^*(X^-_{ijk}) & \varphi^*(b^-_{jk})\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{jk} & -\varphi(X^-_{ijk})\\ b^-_{jk} & X^-_{ijk}\end{vmatrix}\right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^r\left\{\lambda A_{ij}\begin{vmatrix} x_{jk} & -\varphi(Q^-_k)\\ x^-_{jk} & Q^-_k\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_{ijk} & -\varphi^*(b^-_{jk})\\ X^-_{ijk} & b^-_{jk}\end{vmatrix}\right\} + y^-_{ik} = 0,$$

и аналогичное равенство справедливо для правых скачков. Раскрыв определители и воспользовавшись равенством $\varphi(h)+\varphi^*(h) = h$, получим, что

$$\sum_{j=1}^r\Big\{X_{ijk}b^-_{jk} + X^-_{ijk}b_{jk} + X^-_{ijk}b^-_{jk} - \lambda A_{ij}\left(\,x_{jk}Q^-_k + x^-_{jk}\varphi(Q^-_k)\,\right)\Big\} = y^-_{ik},$$

или в векторной форме:

$$X_k b^-_k + X^-_k b_k + X^-_k b^-_k - \lambda A\left(\,x_k Q^-_k + x^-_k\varphi(Q^-_k)\,\right) = y^-_k. \tag{6.6}$$

Равенство $x_k = X_k b_k$ очевидно, а в силу формулы (2.3) [2] и равенства $z(\tau_k-) = z_k + z^-_k$, справедливого для любой функции $z\in \mathrm{G}$, имеем

$$x^-_k = (Xb)^-_k = X(\tau_k-)\,b(\tau_k-) - X(\tau_k)\,b(\tau_k) = X_k b^-_k + X^-_k b_k + X^-_k b^-_k,$$

следовательно, равенство (6.6) принимает вид

$$[\,E-\lambda\varphi(Q^-_k)A\,]\,[\,X_k + X^-_k\,]\,b^-_k + \left\{X^-_k - \lambda A X_k Q^-_k - \lambda A X^-_k\varphi(Q^-_k)\right\}b_k = y^-_k.$$

В силу второго равенства (6.1) выражение, стоящее в фигурных скобках, равно нулю, следовательно,

$$[\,E-\lambda\varphi(Q^-_k)A\,]\,[\,X_k + X^-_k\,]\,b^-_k = y^-_k.$$

Это же равенство, записанное в виде $[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,X_k^-=\lambda A\,X_kQ_k^-$, влечет цепочку равенств

$$[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,X_k+X_k^-\,]=[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]\,X_k=X_k\,[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,],$$

последнее равенство которой справедливо в силу коммутативности матриц A и $X(t)=C(t,\alpha)$. Это означает, что (напомним, что λ— абсолютно регулярно)

$$b_k^-=[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]^{-1}Y_ky_k^-,$$

что вместе с аналогичным равенством для b_k^+ и формулой (6.5) приводит к цепочке

$$b(t)=b^T(t)-\sum_k b_k^-\int_\alpha^t d\xi_k+\sum_k b_k^+\int_\alpha^t d\eta_k=$$

$$=y(\alpha)+\int_\alpha^t Y\,dy^T-\sum_k b_k^-\int_\alpha^t d\xi_k+\sum_k b_k^+\int_\alpha^t d\eta_k=y(\alpha)+\int_\alpha^t Y\,\Delta^*y+\sigma',$$

$$\sigma'\doteq-\sum_k\left\{b_k^- -\begin{vmatrix} Y_k & -\varphi^*(y_k^-)\\ Y_k^- & y_k^-\end{vmatrix}\right\}\int_\alpha^t d\xi_k+\sum_k\left\{b_k^+ -\begin{vmatrix} Y_k & -\psi^*(y_k^+)\\ Y_k^+ & y_k^+\end{vmatrix}\right\}\int_\alpha^t d\eta_k.$$

Заметим, что по поводу символической записи через определители мы дали все необходимые пояснения в формулировке теоремы. В частности, в силу (6.4) справедливы равенства

$$[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]\,Y_k^-=-\lambda A\,Y_kQ_k^-,$$

$$b_k^- -\begin{vmatrix} Y_k & -\varphi^*(y_k^-)\\ Y_k^- & y_k^-\end{vmatrix}=b_k^- -Y_ky_k^-+\lambda\,[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]^{-1}A\,Y_kQ_k^-\varphi^*(y_k^-)=$$

$$=[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]^{-1}\cdot\lambda A\,Y_k\begin{vmatrix}\varphi(Q_k^-) & \varphi(y_k^-)\\ \varphi^*(Q_k^-) & \varphi^*(y_k^-)\end{vmatrix}.$$

Воспользовались формулой для b_k^- и тождеством $\varphi(h)+\varphi^*(h)=h$. Аналогично получается равенство

$$b_k^+ -\begin{vmatrix} Y_k & -\psi^*(y_k^+)\\ Y_k^+ & y_k^+\end{vmatrix}=[\,E+\lambda\psi^*(Q_k^+)A\,]^{-1}\cdot\lambda A\,Y_k\begin{vmatrix}\psi(Q_k^+) & \psi(y_k^+)\\ \psi^*(Q_k^+) & \psi^*(y_k^+)\end{vmatrix}.$$

Наконец, матрицы A, $Y(s)=C(\alpha,s)$ и $X(t)=C(t,\alpha)$ коммутируют между собой, а ссылка на равенства $Y_k=C(\alpha,\tau_k)$, $x(t)=C(t,\alpha)\,b(t)$ и $C(t,\alpha)\,C(\alpha,s)=C(t,s)$ завершает доказательство теоремы. □

Следствие 1. *Если φ и ψ линейны, то решение уравнения* (1.1) *представимо в виде*

$$x(t)=C(t,\alpha)\,y(\alpha)+\int_\alpha^t C(t,s)\Delta^*y(s). \tag{6.7}$$

Следствие 2. *Если существует интеграл Римана–Стилтьеса $\int_K y\,dQ$, то формула* (6.7) *имеет место при любом $\Delta\in\Omega^2$.*

Действительно, существование $\int_K y\,dQ$ означает, что при всех i справедливо равенство $T(y_i)\cap T(Q)=\varnothing$, поэтому $T=\varnothing$.

Замечание 1. В случае если Q и y_i не имеют общих односторонних разрывов, например, если $Q\in \mathrm{G}_{L}$, $y_i\in \mathrm{G}_{R}$ (или наоборот), то формула (6.7) также справедлива.

Теорема 5. *Уравнение* (4.1) *при абсолютно регулярном* λ *имеет единственное решение*

$$x(t) = C^*(t,\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t C^*(t,s)\, \Delta y(s) +$$

$$+\lambda A \sum_{\tau_k \in T} C^*(t,\tau_k)\, [\, E - \lambda\varphi(Q_k^-) A\,]^{-1} \begin{vmatrix} \varphi^*(Q_k^-) & \varphi^*(y_k^-) \\ \varphi(Q_k^-) & \varphi(y_k^-) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k -$$

$$-\lambda A \sum_{\tau_k \in T} C^*(t,\tau_k)\, [\, E - \lambda\psi(Q_k^+) A\,]^{-1} \begin{vmatrix} \psi^*(Q_k^+) & \psi^*(y_k^+) \\ \psi(Q_k^+) & \psi(y_k^+) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k,$$

где $T \doteq \big[\, \bigcup\limits_{i=1}^{r} T(y_i) \,\big] \cap T(Q)$, *а через* $C^*(t,\tau)$ *обозначена матрица Коши уравнения* (4.1):

$$C^*(t,\tau) \doteq D^{-1}(\lambda) \Big(\prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k^*(t)\, \varepsilon_k(\tau) \Big) \exp\Big(-\lambda A \int_\tau^t dQ^T \Big). \tag{6.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (4.1) можно рассматривать как уравнение (1.1), в котором вместо λ взято число $-\lambda$, а вместо Δ взят дефект Δ^*. При это величины $\pi_k(\cdot)$ и $\varrho_k(\cdot)$ изменятся на $\pi_k^*(\cdot)$ и $\varrho_k^*(\cdot)$ соответственно, а матрица $\varepsilon_k(\cdot)$ — на $\varepsilon_k^*(\cdot)$. При этом легко заметить, что матрица $D(\lambda)$ не изменится, а матрица Коши имеет вид (6.8).

Заметим, что аналог формулы (6.7), то есть формула

$$x(t) = C^*(t,\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t C^*(t,s)\, \Delta y(s)$$

имеет место в тех же случаях, что и формула (6.7): если функции φ и ψ линейны; если существует интеграл $\int_K y\, dQ$; если функции Q и y_i не имеют общих односторонних разрывов.

Легко проверяемое тождество $C^*(t,\tau) = C(\tau,t)$ придает свойству 6 матриц Коши более естественную формулировку: уравнение (4.4) при абсолютно регулярном λ имеет единственное решение $x(t) = C^*(t,\alpha)\, x(\alpha)$.

Замечание 2. Справедливо более общее утверждение: при абсолютно регулярном λ решения четырех союзных однородных уравнений (1.1), (4.1), (4.2) и (4.3) представимы в виде $x(t) = X(t,\alpha)\, x(\alpha)$, в котором матрица X определена следующим образом: $X(t,\tau) \doteq C(t,\tau)$ для уравнения (1.1); $X(t,\tau) \doteq C(\tau,t)$ — для уравнения (4.1); $X(t,\tau) \doteq C'(\tau,t)$ — для уравнения (4.2) и, наконец, $X(t,\tau) \doteq C'(t,\tau)$ — для уравнения (4.3).

Замечание 3. Утверждение, аналогичное теореме 5, справедливо и для уравнения (4.2): единственное отличие состоит в том, что вместо матрицы A следует взять сопряженную матрицу A'. Более того, сейчас мы установим, что скалярное произведение решений однородных уравнений (1.1) и (4.2) при абсолютно регулярном λ есть величина постоянная, то есть имеет место тождество $\big(x(t), x'(t)\big) \equiv \text{const}$, где x — решение однородного уравнения (1.1), а x' — решение однородного уравнения (4.2). Это позволяет называть уравнения (1.1) и (4.2) *сопряженными.* Таковыми же являются уравнения (4.1) и (4.3).

Теорема 6. *Пусть* x — *решение однородного уравнения* (1.1), *а* x' — *решение сопряженного однородного уравнения* (4.2). *Справедливо тождество* $\big(x(t), x'(t)\big) \equiv \text{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о опирается на формулу $(Ax, B'y) = (BAx, y)$ и замечание 2:

$$\big(x(t), x'(t)\big) = \big(C(t,\alpha)\, x(\alpha),\, C'(\alpha,t)\, x'(\alpha)\big) =$$

$$= \big(C(\alpha,t)\, C(t,\alpha)\, x(\alpha),\, x'(\alpha)\big) = \big(x(\alpha), x'(\alpha)\big) = \text{const}.$$

Замечание 4. Аналогичное утверждение имеет место для второй пары сопряженных однородных уравнений (4.1) и (4.3).

§ 7. К вопросу об аппроксимируемых решениях импульсных уравнений

1. Следуя [6, с. 143], *импульсным* называется уравнение $\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,\dot{Q}(t)$, заданное в терминах обобщенных функций. Через x и Q обозначены соответственно n-мерная и m-мерная векторные функции, а матричнозначная функция $f : \Omega \to \mathbb{C}^{\,n\times m}$ задана в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{C}^{\,n}$.

2. В основе проблематики импульсных систем лежит известный вопрос о стыковке различных интегральных кривых одного и того же уравнения, последовательно решаемого на разных временны́х участках. Поясним сказанное на примере. Пусть функция $Q = Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференцируемая при $t < \tau$ и при $t > \tau$, терпит разрыв в точке τ. Для достаточно гладкой функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ графики двух семейств решений уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,\dot{Q}(t)$ (решаемого отдельно при $t < \tau$ и при $t > \tau$) заполняют всю плоскость $\mathbb{R}^2$, за исключением прямой $t = \tau$. Если же мы изучаем процесс при всех $t \in \mathbb{R}$, то возникает вопрос обоснования «разумной стыковки» графиков этих двух семейств решений. Существующие в настоящее время подходы к решению проблемы приводят к противоречащим друг другу результатам.

Проиллюстрируем сказанное на уравнении $\dot{x} = \frac{1}{2}\,\delta(t)\,x$, $x(-1) = \omega$ (см. [6, с. 145]). Здесь $f(t,x) = \frac{1}{2}\,x$, $Q = \theta(t)$ — функция Хевисайда, то есть $\theta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Уже в работах авторов, развивающих технику умножения разрывных функций на обобщенные, нет единообразия. Так, решением в смысле [7] является функция $x(t) = \omega\,(\,1 + \frac{2}{3}\,\theta(t)\,)$, а в смысле [6, глава 1] — функция $x(t) = \omega\,\exp\,(\,\frac{1}{2}\,\theta(t)\,)$. В работах авторов, развивающих технику перевода исходной задачи в интегральную форму (в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса, Душника–Стилтьеса и др.), также нет единообразия. Если, например, использовать интеграл Перрона–Стилтьеса, то получим решение $x(t) = \omega\,(\,1 + \frac{1}{2}\,\theta(t)\,)$, а если интеграл Душника–Стилтьеса, то $x(t) = \omega\,(\,1 + \theta(t)\,)$. Применяя квазиинтегралы [4] (варьируя дефекты), можно получить вообще любую функцию из семейства $\{\,x(t) = \omega\,(\,1 + c\,\theta(t)\,),\ c \in \mathbb{R}\,\}$.

Мы видим разнообразие подходов предшественников к представлению импульсных систем. Как следствие, имеет место разнообразие семейств решений таких задач. Мы, однако, исследуем квазиинтегральные уравнения как единое семейство и полагаем, что отступать от этого принципа следует лишь в исключительных случаях, тогда, когда специфика той или иной конкретной задачи не позволяет работать со всем классом. Например, мы допускаем, что математические модели различных прикладных задач, записанные в квазиинтегральной форме, допускают восстановление конкретного, специфического именно для этой задачи, дефекта по результатам эксперимента, проведенного в рамках данной предметной области. (Подобным образом в статистике восстанавливается так называемая эмпирическая функция распределения.)

3. Исходя из этого принципа мы восстанавливаем так называемый аппроксимирующий дефект, — дефект, порождающий аппроксимируемые решения импульсной системы. Пусть $K \doteq (a,b)$ — интервал; $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(K)$ — функция локально ограниченной вариации; последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, состоящая из непрерывных функций локально ограниченной вариации, поточечно сходится к функции Q. Точка $(\alpha,\omega) \in K\times\mathbb{R}$, непрерывная функция $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и дефект $\Delta \doteq (\varphi,\psi)$ порождают последовательность квазиинтегральных уравнений

$$\Big\{\,x_n(t) - \int_\alpha^t f(x_n(s))\,\Delta Q_n(s) = \omega\,\Big\}_{n=1}^{\infty} \tag{7.1}$$

и предельное уравнение

$$x(t) - \int_\alpha^t f(x(s))\,\Delta Q(s) = \omega. \tag{7.2}$$

Так как функция Q_n непрерывна, то уравнение (7.1) совпадает с разрешимым уравнением

$$x_n(t) - \int_\alpha^t f(x_n(s))\,dQ_n(s) = \omega, \tag{7.3}$$

заданным через интеграл Римана–Стилтьеса. Если предельная функция Q разрывна, причем $\alpha \in T(Q)$, то известно, что замена в предельном уравнении (7.2) квазиинтеграла на интеграл

Римана–Стилтьеса приводит нас к неразрешимой, вообще говоря, задаче (к несуществующему объекту). Таким образом, даже в том случае, когда последовательность $\{\, x_n \colon K_{x_n} \to \mathbb{R}\,\}$, состоящая из решений уравнений (7.3), сходится в смысле какой-либо топологии к некой функции $x\colon K_x \to \mathbb{R}$, она не является решением предельного уравнения. (В работах ряда исследователей такие предельные функции директивно объявляются решением предельного уравнения.)

Разрешимость предельного квазиинтегрального уравнения (7.2) (см. доказанные выше утверждения и примеры из [4]) позволяет поставить следующий корректный вопрос: при каких дефектах Δ решения уравнений (7.1) и (7.2) связаны тождеством $\lim\limits_n x_n(t) = x(t)$? В первую очередь заметим, что поставленная проблема порождает ряд других вопросов. Существуют ли решения? Каковы области существования этих решений? Какова область, в которой должно быть выполнено данное тождество? Решение этих вопросов в общем случае требует проведения существенных исследований, поэтому ограничимся лишь следующим частным случаем.

Пусть функция f задана, непрерывна, строго монотонна и не обращается в нуль на интервале $X \doteq (A,B)$. Зафиксируем интервал $K \doteq (a,b)$ такой, что $0 \in K$, точку $(\alpha,\omega) \in K \times X$, $\alpha < 0$, и предположим, что последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, поточечно сходится к разрывной функции $Q(t) \doteq q(t) + r(t)$ такой, что $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, $r(t) = 0$ при $t < 0$, $r(0) = -g$, $r(t) = h - g$ при $t > 0$, $g \neq 0$, $h \neq 0$. Тогда существует дефект $\Delta = \Delta_{(f,Q)}$ (зависящий от f и Q) такой, что какова бы ни была последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, поточечно сходящаяся к функции Q, последовательность непродолжаемых непрерывных решений $\{\, x_n\}$ уравнений (7.1) поточечно сходится к непродолжаемому прерывистому решению x уравнения (7.2) в общем (непустом) промежутке существования этих решений.

Пример 3. Если $X \doteq (0,\infty)$, $f(x) = x$, $K = \mathbb{R}$, то аппроксимируемыми решениями являются функции $x(t) = \omega\, e^{Q(t)-Q(\alpha)}$, $t \in \mathbb{R}$, а функции

$$\varphi^*(g) = \frac{g}{1 - e^{-g}} - 1, \qquad \psi(h) = 1 - \frac{h}{e^h - 1}$$

составляют аппроксимирующий дефект $\Delta_{(f,Q)} \doteq (\varphi,\psi)$.

Пример 4. Если $X \doteq (0,\infty)$, $f(x) = x^2$, $K = \mathbb{R}$, то аппроксимируемыми решениями являются функции $x(t) = \big(\omega^{-1} - Q(t) + Q(\alpha)\big)^{-1}$, $t \in K_x$, а аппроксимирующий дефект составляют функции

$$\varphi^*(g) = g\,\frac{1+z}{2+z}, \quad \psi(h) = h\,\frac{1-w}{2-w}, \quad \text{где} \quad z \doteq \frac{g}{\omega^{-1} - q(0) + q(\alpha)}, \quad w \doteq \frac{h}{\omega^{-1} - q(0) + q(\alpha) + g}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса // Известия вузов. Математика. 2007. № 2 (537). С. 79–82.
2. Родионов В.И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 7–24.
3. Родионов В.И. К вопросу о разрешимости импульсных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 2. С. 3–18.
4. Родионов В.И. Об одном семействе аналогов интеграла Перрона–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 95–106.
5. Hönig Ch.S. Volterra–Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. Amsterdam: North-Holland, 1975. 152 p.
6. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
7. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 2

Поступила в редакцию 10.01.2012

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

V. I. Rodionov

Analogue of the Cauchy matrix for system of quasi-integral equations with constant coefficients

Keywords: impulse system, regulated function, quasi-integral.

Mathematical Subject Classifications: 26A39, 34A37

In previous article we defined the concept of quasi-integral for two regulated functions on the interval and the special parameter, called «defect». If there is the Riemann–Stieltjes integral, then for any defect there is a quasi-integral, and they are all equal. The Perron–Stieltjes integral, if it exists, coincides with one of quasi-integrals where the defect is defined in a special way.

In the present article the theorem of existence and uniqueness of solution for a quasi-integral equation with a constant matrix is proved. System's kernel is a scalar piecewise continuous function of bounded variation. Components of the equation are regulated functions, spectral parameter is a regular number. Under certain conditions a quasi-integral equation can be interpreted as an impulse system. An explicit representation for the solution of a quasi-integral homogeneous equation is given. For an absolutely regular spectral parameter, the analogue of the Cauchy matrix is defined, its properties are investigated and the explicit representation for the solution of the nonhomogeneous quasi-integral equation in the Cauchy form is given. Similar results are obtained for the adjoint and associated equations.

We discussed the possibility of restoration of the approximating defect of quasi-integral, which is defect generating approximated solutions of the impulse system.

REFERENCES

1. Rodionov V.I. The adjoint Riemann–Stieltjes integral, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 2, pp. 75–79.

2. Rodionov V.I. On family of subspaces of the space of regulated functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 4, pp. 7–24.

3. Rodionov V.I. On solvability of impulse systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 2, pp. 3–18.

4. Rodionov V.I. On a family of analogs of the Perron–Stieltjes integral, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 95–106.

5. Hönig Ch.S. *Volterra–Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16*, Amsterdam: North-Holland, 1975, 152 p.

6. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye protsessy: Modeli i prilozheniya* (Impulse processes: Models and applications), Moscow: Nauka, 1991, 256 p.

7. Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach*, Amsterdam–Warszawa: Elsevier–PWN, 1973, 274 p. Translated under the title *Teoriya obobshchennykh funktsii*, Moscow: Mir, 1976, 312 p.

Received 10.01.2012

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Dean, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru