УДК 517.935 + 517.938

© *Л. И. Родина*

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

Изучаются статистические характеристики множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ управляемой системы

$$\dot{x}=f(h^t\sigma,x,u),\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{1}$$

которая параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ,h^t). Получены оценки снизу таких характеристик, как относительная частота поглощения, верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости системы (1) заданным множеством M, а также достаточные условия статистической инвариантности множества M относительно управляемой системы. Исследуются условия, которым должна удовлетворять система (1) и множество X, чтобы для заданных $\sigma\in\Sigma$ и $\varkappa_0\in(0,1]$ относительная частота поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы (1) множеством M была не менее $\varkappa_0$. Результаты работы иллюстрируются на примере управляемой системы, которая описывает периодические процессы в химическом реакторе.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, статистически инвариантные множества.

Введение

Исследование общих свойств инвариантных множеств представляет собой актуальную задачу, решению которой посвящено значительное количество работ, опубликованных за последние годы. Эти работы инициировали целый ряд сложных вопросов, ответы на которые длительное время оставались открытыми. Один из таких вопросов относится к математическому описанию множеств, которые «немного» отличаются от инвариантных или слабо инвариантных. Исследованию таких множеств посвящены работы В. Н. Ушакова и его учеников [1, 2], в которых предлагается оценивать «степень отклонения от инвариантности» посредством числовой характеристики, которая названа дефектом инвариантности. В работах [3–5] предлагается другой подход к расширению понятия инвариантности, который состоит в вычислении относительной частоты пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве M. Если эта частота равна единице, то множество M названо статистически инвариантным. Необходимо добавить, что этот подход обусловлен многими прикладными задачами, возникающими в последние годы в экономике, экологии и технике.

Данная статья является продолжением работ [3–5], которые посвящены изучению таких характеристик множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ управляемой системы, как относительная частота поглощения, верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости системы заданным множеством M. В данной работе получены новые свойства этих характеристик и рассматривается следующая задача. Пусть задано число $\varkappa_0\in(0,1]$. Во многих приложениях важно найти условия, которым должна удовлетворять управляемая система и множество X, чтобы для заданного $\sigma\in\Sigma$ относительная частота поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы множеством M была не менее $\varkappa_0$.

Полученные результаты иллюстрируются на примере управляемых систем, которые описывают периодические процессы в химическом реакторе. Отметим, что такие системы исследовались в работах В. В. Петровой и Е. Л. Тонкова [6, 7] в связи со свойством допустимости периодических процессов линейных управляемых систем.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00195-а).

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 2

§ 1. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы

Основным объектом исследования в данной работе является управляемая система

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

правая часть которой параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t). Это означает, что на полном метрическом пространстве Σ с метрикой ρ_Σ задана однопараметрическая группа преобразований h^t пространства Σ в себя, удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t, σ) на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$ (см., например, [8, гл. 5]). Пространство Σ называется фазовым пространством динамической системы (Σ, h^t), функция $t \to h^t\sigma$ — движением точки σ, функция $h^t : \Sigma \to \Sigma$ — потоком на фазовом пространстве Σ.

Рассмотрим отвечающее системе (1.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{1.2}$$

где $H(\sigma, x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $f\big(\sigma, x, U(\sigma, x)\big)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$, $\operatorname{co} H(\sigma, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$. Предполагаем, что правая часть включения (1.2) принимает значения в пространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, состоящем из непустых выпуклых компактных подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа; функция $f(\sigma, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $U(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество $M = \big\{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\big\}$ является подмножеством пространства Ω. Обозначим через $A(t, \omega)$, где $\omega = (\sigma, X)$, множество достижимости системы (1.1) в момент времени t из начального множества X. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ множество достижимости $A(t, \omega)$ существует для всех $t \geqslant 0$. В целях исследования статистической инвариантности множества M в работах [3–5, 9] введены и изучены такие характеристики, как относительная частота $\operatorname{freq}(\omega)$, верхняя и нижняя относительные частоты $\operatorname{freq}^*(\omega)$, $\operatorname{freq}_*(\omega)$ поглощения множества достижимости $A(t, \omega)$ управляемой системы (1.1) заданным множеством M. Для определения этих характеристик введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\vartheta, \omega) \doteq \big\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

Определение 1 (см. [3, 4]). Относительной частотой поглощения множества достижимости $A(t, \omega)$ системы (1.1) множеством M называется следующий предел:

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta, \omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{1.3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (1.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta, \omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta, \omega)}{\vartheta}$$

называются, соответственно, верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости $A(t, \omega)$ системы (1.1) множеством M.

Определение 2 (см. [3, 4]). Множество M называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1.1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\operatorname{freq}(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : A\big(t, \sigma, M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Обозначим через $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы $M(\sigma)$, также рассмотрим множество $N_+^r = \big\{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in N_+^r(\sigma)\big\}$.

Скалярную функцию $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ будем называть *функцией А. М. Ляпунова* (относительно заданного множества $M \subseteq \Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(\sigma, x) \leqslant 0$ при всех $(\sigma, x) \in M$;

2) $V(\sigma, x) > 0$ для всех $(\sigma, x) \in N_+^r$.

Для локально липшицевой функции $V(\sigma, x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ называется следующий предел:

$$V^o(\sigma, x; q) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (\sigma, x, +0)} \frac{V(h^\varepsilon \vartheta, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma, x) \doteq \inf\limits_{q \in F(\sigma,x)} V^o(\sigma, x; q)$, $V^o_{\max}(\sigma, x) \doteq \sup\limits_{q \in F(\sigma,x)} V^o(\sigma, x; q)$ называются *нижней и верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = z_0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Предполагаем, что $z_0 \geqslant 0$ и выполнено следующее условие.

Условие 1. Имеют место следующие свойства:

1) все точки $\sigma \in \Sigma$ являются периодическими точками потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$ с периодом T;

2) функция $w(\sigma, z)$ непрерывна по совокупности переменных и выполнено неравенство

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|w(\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,;$$

3) для каждой точки (σ, z) не существует интервала числовой прямой, на котором выполнено равенство $w(h^t\sigma, z) = 0$.

Напомним, что верхним решением $z^*(t, \sigma)$ задачи Коши (1.4) называется такое решение, что для любого другого решения $z(t, \sigma)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t, \sigma) \geqslant z(t, \sigma)$. В работе [10, с. 38] показано, что если функция $w(\sigma, z)$ непрерывна, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи Коши (1.4) существует для всех $t \geqslant 0$.

Условие 2. Уравнение $\dot{z} = w(h^t\sigma, z)$ имеет T-периодическое решение $z_0(t, \sigma)$ и выполнено равенство

$$\lim_{t \to \infty} \big(z^*(t, \sigma) - z_0(t, \sigma)\big) = 0. \tag{1.5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и для всех* $\sigma \in \Sigma$ *для каждой точки* $x \in M(\sigma)$ *все решения включения* (1.2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0, \sigma, x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. *Предположим, что существует функция Ляпунова* $V(\sigma, x)$ *относительно множества* M *такая, что при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{1.6}$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ *для любого множества* $X \subseteq M(\sigma)$ *имеет место неравенство*

$$\operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, T] : z_0(t, \sigma) \leqslant 0\big\}}{T}. \tag{1.7}$$

Следовательно, если $\operatorname{mes}\big\{t \in [0, T] : z_0(t, \sigma) \leqslant 0\big\} = T$, *то множество* M *статистически инвариантно относительно управляемой системы* (1.1).

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму, в которой исследуются свойства характеристик

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta} \quad \text{и}$$

$$\varkappa(C,\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z^*(t,\sigma)\leqslant C\}}{\vartheta}, \quad \text{где} \quad C\in\mathbb{R}.$$

Отметим, что если $z^*(t,\sigma)=z_0(t,\sigma)$, где $z_0(t,\sigma)$ — T-периодическая функция, то для любого $C\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\varkappa(C,\sigma) = \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]: z_0(t,\sigma)\leqslant C\}}{T}. \tag{1.8}$$

Покажем, что если функция $z^*(t,\sigma)$ не периодическая, то при определенных условиях для нее также справедливо равенство (1.8).

Лемма 1. *Предположим, что функция $t\to z_0(t,\sigma)$ непрерывная периодическая с периодом T и не существует интервала числовой прямой, на котором $\dot z_0(t,\sigma)=0$. Если выполнено равенство* (1.5)*, то имеют место следующие свойства:*

1) *предел $\varkappa(\sigma)$ существует и выполнено равенство*

$$\varkappa(\sigma) = \frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]: z_0(t,\sigma)\leqslant 0\big\}}{T};$$

2) *для любого $\varkappa_0\in[0,1]$ найдется число $C=C(\varkappa_0,\sigma)$ такое, что*

$$\varkappa(C,\sigma) = \frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]: z_0(t,\sigma)\leqslant C\big\}}{T} = \varkappa_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi(t,\sigma)\doteq z^*(t,\sigma)-z_0(t,\sigma)$. Введем в рассмотрение числовую последовательность

$$\big\{\varphi_k(\sigma)\big\}_{k=0}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \varphi_k(\sigma) = \max_{t\in[kT,(k+1)T]} |\psi(t,\sigma)|.$$

Поскольку $\psi(t,\sigma)\to 0$ при $t\to\infty$, то $\varphi_k(\sigma)\to 0$ при $k\to\infty$. Пусть задано $C\in\mathbb{R}$. Рассмотрим подмножество $A(\sigma)=\big\{t\in[0,T]:\ z_0(t,\sigma)<C\big\}$ отрезка $[0,T]$ и множества

$$A_k(\sigma) = \big\{t\in[0,T]:\ z_0(t,\sigma)\leqslant C-\varphi_k(\sigma)\big\}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что $\big\{A_k(\sigma)\big\}_{k=1}^{\infty}$ является последовательностью измеримых множеств, сходящейся к множеству $A(\sigma)$. По свойствам меры Лебега $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{mes}A_k(\sigma)=\operatorname{mes}A(\sigma)$; поэтому, учитывая условие $\operatorname{mes}\{t\in[0,T]: z_0(t,\sigma)=C\}=0$ (которое следует из условия леммы), получаем следующее равенство:

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{mes}A_k(\sigma) = \operatorname{mes}A(\sigma) = \operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\ z_0(t,\sigma)\leqslant C\}.$$

Рассмотрим кусочно-постоянную функцию

$$\varphi(t,\sigma)=\varphi_k(\sigma) \quad \text{при} \quad t\in[kT,(k+1)T),\ \ k=0,1,\ldots$$

и функцию $z(t,\sigma)=z_0(t,\sigma)+\varphi(t,\sigma)$. Используя условие периодичности функции $z_0(t,\sigma)$ и теорему Штольца о свойствах предела последовательности, найдем предел

$$\widetilde\varkappa(C,\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z(t,\sigma)\leqslant C\}}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z_0(t,\sigma)+\varphi(t,\sigma)\leqslant C\}}{\vartheta} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\operatorname{mes}\big\{t\in[kT,(k+1)T]: z_0(t,\sigma)+\varphi_k(\sigma)\leqslant C\big\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]: z_0(t,\sigma)+\varphi_k(\sigma)\leqslant C\big\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z_0(t,\sigma) + \varphi_N(\sigma) \leqslant C\}}{T} = \frac{\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{mes} A_N(\sigma)}{T} =$$

$$= \frac{\operatorname{mes} A(\sigma)}{T} = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z_0(t,\sigma) \leqslant C\}}{T} \doteq \varkappa_0(C,\sigma).$$

Таким образом, $\widetilde{\varkappa}(C,\sigma) = \varkappa_0(C,\sigma)$. Аналогично можно показать, что для функции

$$z(t,\sigma) = z_0(t,\sigma) - \varphi(t,\sigma)$$

также выполнено равенство $\widetilde{\varkappa}(C,\sigma) = \varkappa_0(C,\sigma)$. Напомним, что $z^*(t,\sigma) = z_0(t,\sigma) + \psi(t,\sigma)$, где функция $\psi(t,\sigma)$ удовлетворяет неравенству $|\psi(t,\sigma)| \leqslant \varphi(t,\sigma)$. Тогда имеют место неравенства

$$z_0(t,\sigma) - \varphi(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma) \leqslant z_0(t,\sigma) + \varphi(t,\sigma),$$

из которых получаем, что $\widetilde{\varkappa}(C,\sigma) \leqslant \varkappa(C,\sigma) \leqslant \widetilde{\varkappa}(C,\sigma)$ и поэтому

$$\varkappa(C,\sigma) = \widetilde{\varkappa}(C,\sigma) = \varkappa_0(C,\sigma). \tag{1.9}$$

Если в равенстве (1.9) положим $C = 0$, то получим первое утверждение леммы.

Пусть заданы $\sigma \in \Sigma$ и $\varkappa_0 \in [0,1]$. Рассмотрим функцию

$$\mu(C) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z_0(t,\sigma) \leqslant C\}}{T}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через C_m и C_M наименьшее и наибольшее значения функции $z_0(t,\sigma)$ на отрезке $[0,T]$, тогда $\mu(C) = 0$ для всех $C < C_m$ и $\mu(C) = 1$ для всех $C \geqslant C_M$. Поскольку функция $z_0(t,\sigma)$ непрерывна и для любого $C \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z_0(t,\sigma) = C\} = 0$, то (по свойствам меры Лебега) функция $\mu(C)$ непрерывна и возрастает на интервале (C_m, C_M). Следовательно, для любого $\varkappa_0 \in [0,1]$ найдется $C \in [C_m, C_M]$ такое, что $\mu(C) = \varkappa_0$. Отметим также, что если $\varkappa_0 \in (0,1)$, то значение C, для которого $\mu(C) = \varkappa_0$, единственно.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (1.2), определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x \in X$. Рассмотрим функцию $v(t,\sigma) = V\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\big)$. В силу теоремы Радемахера функция $v(t,\sigma)$ дифференцируема при почти всех t и поскольку $\varphi(0,\sigma,x) \in X \subseteq M(\sigma)$, то $v(0,\sigma) \leqslant 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t,\sigma)$ выполнены неравенства (см. лемму 6 работы [3])

$$V^o_{\min}\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\big) \leqslant \dot v(t,\sigma) \leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\big),$$

поэтому, с учетом неравенства (1.6), имеем при всех $t \geqslant 0$ неравенство

$$\dot v(t,\sigma) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t,\sigma)\big). \tag{1.10}$$

Из неравенств (1.10) и $v(0,\sigma) \leqslant 0 \leqslant z_0 \leqslant z(0,\sigma)$, в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, получаем, что для всех $t \geqslant 0$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (1.4) удовлетворяет неравенству $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$.

Обозначим через $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ нижнюю относительную частоту попадания решения $\varphi(t,\sigma,x)$ в множество M, тогда

$$\operatorname{freq}_*(\varphi) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] :\ \varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} = \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] :\ v(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Пусть $\varkappa_*(\sigma) \doteq \varliminf\limits_{\vartheta\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$, тогда из неравенства $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство $\operatorname{freq}_*(\varphi) \geqslant \varkappa_*(\sigma)$ и, так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (1.2) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x \in X \subseteq M(\sigma)$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}_*(\omega) = \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\sigma,X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} \geqslant \varkappa_*(\sigma). \tag{1.11}$$

Далее, из условий 1 и 2 следует, что не существует интервала числовой прямой, на котором $\dot{z}_0(t,\sigma)=0$. Поэтому, в силу леммы 1, предел $\varkappa(\sigma)$ существует и выполнено равенство

$$\varkappa(\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z_0(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T}. \tag{1.12}$$

Таким образом, из (1.11) и (1.12) получаем неравенство (1.7).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* $1,2$ *и для всех* $\sigma\in\Sigma$ *для каждой точки* $x\in M(\sigma)$ *все решения включения* (1.2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x)=x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существует функция Ляпунова* $V(\sigma,x)$ *относительно множества* M *такая, что при всех* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *выполнено равенство* $V^o_{\max}(\sigma,x)=w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big)$. *Тогда для каждого* $\sigma\in\Sigma$ *для любого множества* $X\subseteq M(\sigma)$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{freq}_*(\omega)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z_0(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T}.$$

§ 2. Свойства характеристики $\varkappa(\sigma)$ для линейной задачи Коши с периодическими коэффициентами

Предположим, что σ является периодической точкой потока $h^t:\Sigma\to\Sigma$, допускающей период T, и функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ непрерывны на множестве Σ. Обозначим через $z(t,\sigma)$ решение линейной задачи Коши

$$\dot{z}=a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma),\quad z(0,\sigma)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{2.1}$$

через $z_0(t,\sigma)$ обозначим периодическое решение линейного уравнения

$$\dot{z}=a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma). \tag{2.2}$$

Предполагаем, что выполнено условие $\displaystyle\int_0^T a(h^t\sigma)dt\neq 0$, которое является необходимым и достаточным условием существования периодического решения $z_0(t,\sigma)$. Обозначим через $\varkappa_0(\sigma)$ относительную частоту попадания решения $z_0(t,\sigma)$ в множество $(-\infty,0]$, тогда

$$\varkappa_0(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z_0(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z_0(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T}.$$

В следующем утверждении получены условия существования и находится значение предела

$$\varkappa(\sigma)=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнено неравенство* $\displaystyle\int_0^T a(h^t\sigma)dt<0$ *и для каждой точки* (σ,z) *не существует интервала числовой прямой, на котором* $a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma)=0$. *Тогда имеют место следующие свойства:*

1) *предел* $\varkappa(\sigma)$ *существует и выполнено равенство*

$$\varkappa(\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z_0(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T};$$

2) *для любого* $\varkappa_0\in[0,1]$ *найдется число* $C=C(\varkappa_0,\sigma)$ *такое, что*

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[0,\vartheta]:z(t,\sigma)\leqslant C\big\}}{\vartheta}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z_0(t,\sigma)\leqslant C\}}{T}=\varkappa_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем решение задачи Коши (2.1)

$$z(t,\sigma)=\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds \tag{2.3}$$

и найдем периодическое решение линейного уравнения (2.2):

$$z_0(t,\sigma)=\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\Big(z_0+\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\Big), \tag{2.4}$$

где

$$z_0=\Big(\exp\Big(-\int_0^T a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)-1\Big)^{-1}\int_0^T b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$z(t,\sigma)=z_0(t,\sigma)-z_0\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t,\sigma)=z(t,\sigma)-z_0(t,\sigma)=-z_0\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big).$$

Учитывая периодичность функции $t\to a(h^t\sigma)$ и неравенство $\int_0^T a(h^t\sigma)dt<0$, найдем

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(h^t\sigma)dt=\lim_{k\to\infty}k\int_0^T a(h^t\sigma)dt=-\infty.$$

Следовательно, $\psi(t,\sigma)\to 0$ при $t\to\infty$. Поскольку для каждой точки (σ,z) не существует интервала числовой прямой, на котором $a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma)=0$, то для периодического решения $z_0(t,\sigma)$ не существует интервала, на котором $\dot z_0(t,\sigma)=0$. Таким образом, функция $z(t,\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и утверждения леммы следуют из леммы 1. $\square$

В случае, когда $\int_0^T a(h^t\sigma)dt\geqslant 0$, значения предела $\varkappa(\sigma)$ получены в работе [4]. Обозначим

$$\beta(t,\sigma)=\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds,$$

тогда $z(t,\sigma)=\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\beta(t,\sigma)$ для всех $t\geqslant 0$.

Лемма 3 (см. [4]). *Предположим, что выполнено неравенство* $\int_0^T a(h^t\sigma)dt\geqslant 0$. *Если* $\beta(T,\sigma)<0$, *то предел* $\varkappa(\sigma)$ *существует и равен единице. Если* $\beta(T,\sigma)>0$, *то* $\varkappa(\sigma)=0$.

§ 3. Оценка относительной частоты поглощения множества достижимости управляемой системы, которая описывает периодические процессы в химическом реакторе

Задачам исследования периодических процессов управляемых систем и оптимального управления периодическими движениями посвящено большое количество работ, среди которых работы Е. Л. Тонкова (см. библиографию в [11]). В работах [6,7] исследуется свойство допустимости периодических процессов линейных управляемых систем и рассматривается система, которая описывает процессы в химическом реакторе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 v + k_2(1 - x_1 - x_2) - 2k_3 x_1^2 v + 2k_4 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = 2k_3 x_1^2 v - 2k_4 x_2^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Предполагается, что x_1, x_2 — концентрации промежуточных веществ (следовательно, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 1$); k_i — скорости реакций ($k_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$); параметр v характеризует скорость продувки катализатора и рассматривается как управляющий параметр, который может меняться с течением времени в заданных границах: $v(t) \in [\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta$. В теории управления химическим реактором представляет интерес реакция системы (3.1) на периодическое управление $v(t)$. Периодическое управление $v(t)$ называется допустимым, если оно измеримо по Лебегу и $v(t) \in [\alpha, \beta]$ для всех $t \geqslant t_0$.

Для управляемой системы (3.1) рассмотрим следующую задачу: для заданного значения $\varkappa_0$ нужно построить такое множество, чтобы относительная частота поглощения множества достижимости данной системы этим множеством равнялась $\varkappa_0$.

В [6] показано, что множество $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 1\}$ инвариантно относительно системы (3.1) для любого управления $v(t) \in [\alpha, \beta]$, поэтому X можно рассматривать как естественное фазовое пространство данной системы. Рассмотрим множества, зависящие от параметра $r \in (0, 1)$:

$$X_r = \big\{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ r \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 1\big\}.$$

Поскольку множество X является фазовым пространством системы (3.1), то в качестве функции Ляпунова относительно множества X_r можно взять функцию $V_r(x_1, x_2) = r - x_1 - x_2$. Найдем верхнюю производную функции $V_r(x_1, x_2)$ в силу включения, отвечающего системе (3.1):

$$V^o_{\max}(x_1, x_2) = k_2(x_1 + x_2 - 1) + k_1 x_1 v(t)$$

и отметим, что для функции $w_r(t, z) = -k_2 z + k_2(r - 1) + k_1 v(t)$ имеет место равенство

$$V^o_{\max}(x_1, x_2) = w\big(t, V_r(x_1, x_2)\big).$$

В силу леммы 2 и следствия 1 относительная частота $\operatorname{freq}(X_r)$ поглощения множества достижимости $A(t, X_r)$ системы (3.1) множеством X_r равна

$$\operatorname{freq}(X_r) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : A\big(t, X_r\big) \subseteq X_r\big\}}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, T] : z_r(t) \leqslant 0\big\}}{T} \doteq \varkappa_r,$$

где $z_r(t)$ — периодическое решение линейного уравнения:

$$\dot{z} = -k_2 z + k_2(r - 1) + k_1 v(t). \tag{3.2}$$

Из равенства (2.4) получаем, что данное решение имеет вид

$$z_r(t) = e^{-k_2 t}\left(z_r + \int_0^t \big(k_2(r - 1) + k_1 v(s)\big) e^{k_2 s} ds\right), \quad \text{где}$$

$$z_r = \big(e^{k_2 T} - 1\big)^{-1} \int_0^T \big(k_2(r - 1) + k_1 v(s)\big) e^{k_2 s} ds.$$

Найдем периодическое решение уравнения (3.2) при управлении $v(t) = \sin t + 2$:

$$z_r(t) = k_2(r - 1) + 2k_1 + \frac{k_1 k_2}{k_2^2 + 1} \sin t - \frac{k_1}{k_2^2 + 1} \cos t$$

и преобразуем его следующим образом:

$$z_r(t) = \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2+1}}\left(\sin(t-\varphi) + \sqrt{k_2^2+1}\left(\frac{k_2}{k_1}(r-1)+2\right)\right), \quad \text{где} \quad \varphi = \arccos\frac{k_2}{\sqrt{k_2^2+1}}.$$

Пусть $a = \sqrt{k_2^2+1}\left(\frac{k_2}{k_1}(1-r)-2\right)$, тогда если $a \in (-1,1)$, то относительная частота

$$\varkappa_r = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z_r(t) \leqslant 0\}}{T} = \frac{\arcsin a}{\pi} + \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Если $a \leqslant -1$, то $\varkappa_r = 0$. Если $a \geqslant 1$, то $\varkappa_r = 1$, следовательно, $\operatorname{freq}(X_r) = 1$ и поэтому множество X_r статистически инвариантно.

Предположим, что задано число $\varkappa_0 \in (0,1]$. Найдем такое $r \in (0,1)$, чтобы относительная частота $\operatorname{freq}(X_r)$ поглощения множества достижимости $A(t, X_r)$ системы (3.1) множеством X_r равнялась $\varkappa_0$. Если в равенстве (3.3) положим $\varkappa_r = \varkappa_0$, то получим, что данное значение

$$r = 1 - \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{\sin\pi(\varkappa_0 - 0,5)}{\sqrt{k_2^2+1}} + 2\right).$$

В [6] указано, что из химического смысла задачи следует ограничение $k_1\beta \leqslant k_2$, поэтому полученное значение r удовлетворяет неравенству $0 < r < 1$.

Автор выражает благодарность за содержательное обсуждение результатов работы и полезные замечания Е. Л. Тонкову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н., Малев Я.А. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 199–222.
2. Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98–111.
3. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
4. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
5. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.
6. Петрова В.В., Тонков Е.Л. Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений. I // Известия вузов. Математика. 1996. № 11. С. 65–72.
7. Петрова В.В., Тонков Е.Л. Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений. II // Известия вузов. Математика. 1997. № 6. С. 17–24.
8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
9. Родина Л.И. Статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 68–87.
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. Бунтов С.Д., Леонов Н.И., Петров Н.Н., Борисов А.В., Грызлов А.А., Дерр В.Я., Карпов А.И., Кондратьев Б.П., Попова С.Н. К семидесятилетию Евгения Леонидовича Тонкова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 3–9.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 2

Поступила в редакцию 30.03.2012

Родина Людмила Ивановна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: box0589@udmnet.ru

L. I. Rodina
Statistical characteristics of attainability set and periodic processes of control systems

Keywords: controll systems, dynamical systems, differential inclusions, statistically invariant sets.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

We investigate the statistical characteristics of attainability set $A(t,\sigma,X)$ of control system

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{1}$$

which is parametrized by means of topological dynamic system (Σ, h^t). We obtained the lower estimations for such characteristics as the relative frequency of containing, the upper and lower relative frequencies of containing of attainability set of the system (1) in the given set M as well as new sufficient conditions of statistical invariance of the set M with respect to control system. We received the conditions for system (1) and set X at which for given $\sigma \in \Sigma$ and $\varkappa_0 \in (0,1]$ the relative frequency of containing of attainability set $A(t,\sigma,X)$ of systems (1) in the set M not less $\varkappa_0$. Results of the work are illustrated by the example of control system which describes periodic processes in a chemical reactor.

REFERENCES

1. Ushakov V.N., Malev A.G. On the question of the stability defect of sets in an approach game problem, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk,* 2010, vol. 16, no. 1, pp. 199–222.

2. Ushakov V.N., Zimovets A.A. Invariance defect of sets with respect to differential inclusion, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 98–111.

3. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, nonwandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288.

4. Rodina L.I., Tonkov E.L. The statistically weak invariant sets of control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 67–86.

5. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. Asymptotically stable statistically weakly invariant sets for controlled systems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 135–142.

6. Petrova V.V., Tonkov E.L. The admissibility of periodic processes and existence theorems for periodic solutions. I, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1996, no. 11, pp. 65–72.

7. Petrova V.V., Tonkov E.L. The admissibility of periodic processes and existence theorems for periodic solutions. II, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1997, no. 6, pp. 17–24.

8. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1949, 550 p.

9. Rodina L.I. The statistically invariant sets of controllable systems with random parameters, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 68–87.

10. Hartman Ph. *Ordinary differential equations,* New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964, 720 p. Translated under the title Obyknovennye differentsialnye uravneniya, Moscow: Mir, 1970, 720 p.

11. Buntov S.D., Leonov N.I., Petrov N.N., Borisov A.V., Gryzlov A.A., Derr V.Ya., Karpov A.I., Kondratyev B.P., Popova S.N. Tonkov Evgeny Leonidovich. To seventieth anniversary, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 3–9.

Received 30.03.2012

Rodina Lyudmila Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: box0589@udmnet.ru