

УДК 517.925, 519.216

© *И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко***ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ И ДЕФОРМАЦИИ
СТОХАСТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ¹**

Исследуется воздействие аддитивных и параметрических шумов на аттракторы одномерной системы, задаваемой стохастическим дифференциальным уравнением Ито. Показано, что в отличие от аддитивных, параметрические возмущения приводят к сдвигу экстремумов функции плотности распределения. Для величины такого сдвига получено разложение по малому параметру интенсивности шума. Показано, что воздействие параметрического шума может изменить не только расположение, но и количество экстремумов плотности распределения. Подробный анализ соответствующих индуцированных шумами явлений проведен для трех динамических моделей. Сравнение погрешности приближений разного порядка для оценки сдвига экстремумов функции плотности представлено на примере линейной модели. Два сценария перехода между унимодальной и бимодальной формами стохастического аттрактора исследованы для систем с разными типами кубической нелинейности.

Ключевые слова: уравнение Ито, стохастический аттрактор, параметрический шум, индуцированные шумом переходы.

Введение

Сочетание нелинейности и стохастичности в динамических системах может привести к неожиданным явлениям, зачастую не имеющим аналога в детерминированном случае. Часто даже малый фоновый шум порождает новые режимы динамики, такие как стохастический резонанс, стохастические бифуркации, индуцированные шумом переходы между регулярными и хаотическими режимами динамики [1–4]. В последнее время анализ вызванных шумом явлений является активно развивающейся областью исследований в механике, радиофизике, химической кинетике, биофизике. Как правило, новые индуцированные шумом явления связывают с мультистабильностью и неоднородностью фазового пространства. Нелинейные системы особенно чувствительны к воздействию шумов вблизи точек бифуркаций при качественном перестроении фазовых портретов [5, 6].

Многие стохастические явления существенно зависят от типа вносимых в систему возмущений. Обычно рассматриваемые аддитивные и мультипликативные (параметрические) шумы могут приводить к разным эффектам в динамике системы. С математической точки зрения каждый режим динамики системы в присутствии шума может быть описан соответствующим стохастическим аттрактором. Распределение случайных состояний системы в стохастическом аттракторе полностью характеризуется функцией плотности вероятности, являющейся устойчивым стационарным решением уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Качественные изменения формы стохастического аттрактора (*P*-бифуркации) обычно связывают с изменением количества пиков соответствующей плотности распределения. Данный подход представлен в [1] и был развит в работах [7–9].

Решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для одномерных систем удается найти аналитически, что позволяет проводить детальный параметрический анализ индуцированных шумом явлений для разных типов нелинейности и стохастичности.

В данной работе исследуются индуцированные шумом сдвиги аттракторов и *P*-бифуркации для одномерных динамических систем.

¹Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (10-01-96022-р_урал), Министерством образования РФ (1.1099.2011). Исследование проведено при финансовой поддержке молодых ученых УрФУ в рамках реализации программы развития УрФУ.

В § 1 для общей автономной одномерной системы приводится решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и обсуждаются возможные деформации стохастических аттракторов под воздействием как аддитивных, так и параметрических шумов. Если на систему воздействуют только аддитивные возмущения, то точки максимальной концентрации случайных состояний стохастического аттрактора всегда совпадают с устойчивыми равновесиями невозмущенной динамической системы. Под воздействием параметрических шумов экстремумы функции плотности распределения могут сдвигаться. Для величины сдвига в системе общего вида доказана теорема о разложении по малому параметру интенсивности шума. Анализ возможных сдвигов стохастического аттрактора проводится на примере линейной системы (модель 1) и иллюстрируется в § 2.

Присутствие параметрических шумов в нелинейных системах может приводить к качественному изменению формы стохастического аттрактора. В § 3, 4 для двух систем с различными типами кубической нелинейности (модели 2 и 3) демонстрируются различные варианты деформации стохастического аттрактора, при которых у стационарной плотности распределения меняется количество пиков. Модель 2 иллюстрирует явление индуцированных шумом переходов между двумя сосуществующими аттракторами (устойчивыми равновесиями). С увеличением интенсивности параметрического шума бимодальная форма плотности распределения трансформируется в унимодальную, при этом случайные состояния системы концентрируются в окрестности неустойчивого равновесия.

В модели 3, имеющей единственное устойчивое детерминированное равновесие, увеличение интенсивности параметрического шума приводит сначала к расщеплению унимодальной кривой плотности в бимодальную, а затем бимодальная трансформируется снова в унимодальную. При этом в системе сначала возбуждаются колебания большой амплитуды, а затем происходит локализация случайных состояний в точке, достаточно удаленной от устойчивого равновесия исходной детерминированной системы.

§ 1. Деформация стохастических аттракторов

Рассмотрим одномерное детерминированное нелинейное дифференциальное уравнение

$$dx = f(x)dt, \quad (1)$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая вектор-функция, задающая динамику системы. Аттракторами данной системы являются устойчивые точки покоя $x(t) \equiv \bar{x}$ ($f(\bar{x}) = 0$).

Стандартной математической моделью динамической системы со случайными возмущениями является стохастическое дифференциальное уравнение Ито [1]

$$dx = f(x)dt + \varepsilon\sigma(x)dw, \quad (2)$$

где w — винеровский процесс, $\sigma(x)$ — функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, ε — параметр интенсивности возмущений.

В результате воздействия шумов случайные траектории системы (2) покидают детерминированный аттрактор — устойчивое равновесие системы (1) — и формируют вокруг него некоторый пучок. Детальное вероятностное описание случайных траекторий системы (2) в этом пучке в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет возможный установившийся режим (стохастический аттрактор), то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения $\rho(x)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК

$$\frac{\varepsilon^2}{2}(\sigma^2(x)\rho(x))'' - (f(x)\rho(x))' = 0.$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$\rho(x) = \frac{K}{\sigma^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{\sigma^2(s)} ds\right),$$

где $K > 0$ — константа интегрирования, которая может быть найдена из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$.

Функция $\rho(x)$ задает стационарную функцию плотности распределения, если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx$ сходится. Функция распределения является основной характеристикой самых разнообразных систем, которым свойственно случайное поведение и содержит в себе исчерпывающее описание геометрии стохастических аттракторов систем. В работе [2] доказана устойчивость стационарной плотности.

В данной работе исследуются возможные изменения стохастических аттракторов при увеличении интенсивности действующих шумов (аддитивных и параметрических). Основным объектом исследования здесь являются стохастические P -бифуркации [1]. Под P -бифуркацией обычно понимается качественное изменение стационарной плотности вероятности, заданной на множестве траекторий в фазовом пространстве системы, или плотности вероятности отдельных динамических переменных. Примером P -бифуркации является изменение количества локальных максимумов плотности вероятности. Расположение локальных экстремумов плотности распределения является достаточно простой и естественной характеристикой стохастического аттрактора в целом.

Обозначим через \tilde{x} точки, отвечающие локальным максимумам плотности вероятности $\rho(x)$: $\tilde{x} = \operatorname{argmax} \rho(x)$. Значения \tilde{x} играют важную роль в описании динамики стохастической системы: величины \tilde{x} отмечают точки, в которых концентрация случайных состояний системы максимальна. Исследуем взаимное расположение \tilde{x} и ближайшего к нему устойчивого равновесия \bar{x} детерминированной системы в зависимости от интенсивности действующего шума.

Рассмотрим сначала случай аддитивного шума $\sigma(x) = \operatorname{Const} = \sigma$. Тогда функцию плотности распределения можно записать в виде

$$\rho(x) = \frac{K}{\sigma^2} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2 \varepsilon^2} \int_{x_0}^x f(s) ds\right).$$

Для того, чтобы выяснить, в каких точках вероятность появления случайных состояний системы наибольшая, найдем экстремумы функции $\rho(x)$. Производная функции плотности распределения

$$\rho'(x) = \frac{2K}{\sigma^4 \varepsilon^2} f(x) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2 \varepsilon^2} \int_{x_0}^x f(s) ds\right)$$

обращается в ноль в точках, для которых $f(x) = 0$, то есть в точках равновесия детерминированной системы. Таким образом, в присутствии лишь аддитивного шума точки с максимальной и минимальной концентрацией совпадают с точками покоя детерминированной системы.

Максимумы функции $\rho(x)$ находятся в устойчивых точках покоя \bar{x}_i , с условием $f'(\bar{x}_i) < 0$. Минимумы $\rho(x)$ — в неустойчивых точках \bar{x}_j , $f'(\bar{x}_j) > 0$.

В детерминированной системе неустойчивые точки покоя отделяют один инвариантный интервал от другого. Каждый такой инвариантный интервал содержит единственное устойчивое равновесие и составляет его бассейн притяжения. В детерминированной системе решение не может перейти из одного интервала в другой. В стохастической системе под действием невырожденных случайных возмущений решения могут переходить из одного интервала в другой с ненулевой вероятностью.

Пример 1. Рассмотрим систему (1), функция $f(x)$ которой имеет график, представленный на рис. 1а).

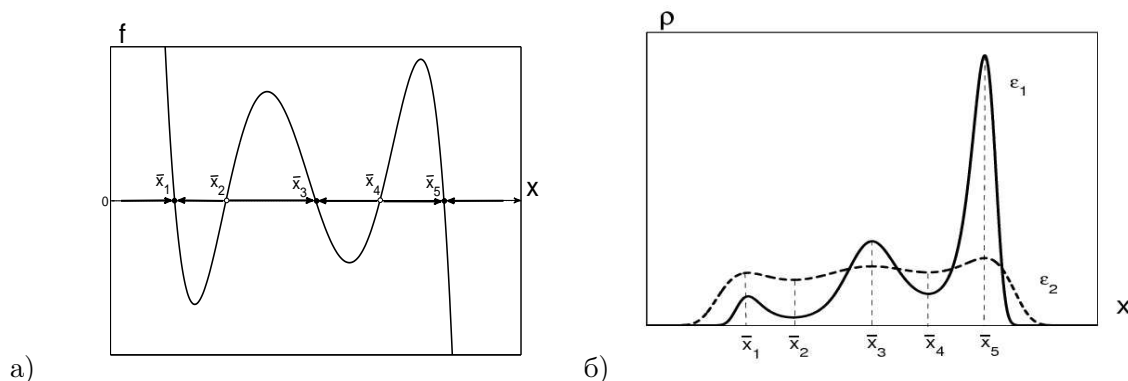


Рис. 1. Графики: а) функции $y = f(x)$; б) функции плотности распределения для двух значений интенсивности аддитивного шума: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Здесь $\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5$ — устойчивые равновесия, \bar{x}_2, \bar{x}_4 — неустойчивые равновесия. Бассейном притяжения равновесия \bar{x}_1 является интервал $(-\infty, \bar{x}_2)$, для равновесия \bar{x}_3 — интервал (\bar{x}_2, \bar{x}_4) , и для \bar{x}_5 — интервал (\bar{x}_4, ∞) .

На рис. 1б) представлены графики стационарной плотности распределения системы (2) для двух значений $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ интенсивности аддитивного шума. При малом шуме наблюдаются высокие узкие пики функции $\rho(x)$ над устойчивыми равновесиями $\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5$. При увеличении интенсивности аддитивного шума эти пики сглаживаются, но по-прежнему располагаются в устойчивых точках покоя.

Рассмотрим теперь случай мультипликативного шума $\sigma(x) \neq Const$. Тогда производная стационарной плотности

$$\rho'(x) = \frac{2K}{\sigma^3(x)} \left(\frac{f(x)}{\sigma(x)\varepsilon^2} - \sigma'(x) \right) \exp \left(\frac{2}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{\sigma^2(s)} ds \right)$$

обращается в ноль в точках, для которых

$$f(x) = \varepsilon^2 \sigma(x) \sigma'(x). \quad (3)$$

Таким образом, при невырожденных мультипликативных шумах ($\sigma(x)\sigma'(x) \neq 0$) точка максимальной концентрации \tilde{x} не совпадает с равновесием \bar{x} детерминированной системы и существенно зависит от ε : $\tilde{x} = \tilde{x}(\varepsilon)$.

Исследуем, как величина сдвига $\delta(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) - \bar{x}$ зависит от параметров системы.

Теорема 1. Пусть \bar{x} — устойчивое равновесие детерминированной системы (1). Для функции $\delta(\varepsilon)$ при малых значениях ε и достаточно гладких $f(x)$ и $\sigma(x)$ справедливо разложение

$$\delta(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) - \bar{x} = \frac{\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\varepsilon^2 + \frac{2f'(\bar{x})((\sigma'(\bar{x}))^2 + \sigma''(\bar{x})\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})\sigma(\bar{x}) - f''(\bar{x})(\sigma'(\bar{x}))^2\sigma^2(\bar{x}))}{2(f'(\bar{x}))^3}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6). \quad (4)$$

Доказательство. Разложим $\tilde{x}(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в точке $\varepsilon = 0$

$$\tilde{x}(\varepsilon) = \tilde{x}(0) + \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0)\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{x}}{d\varepsilon^2}(0)\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\tilde{x}}{d\varepsilon^3}(0)\varepsilon^3 + o(\varepsilon^4). \quad (5)$$

1. При $\varepsilon = 0$ (шум отсутствует) $\tilde{x}(0)$ совпадает с устойчивой точкой покоя \bar{x} .

2. Найдем производную $\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0)$, используя уравнение (3). Дифференцируя (3) по ε , получим

$$\frac{df(\tilde{x})}{dx} \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = 2\varepsilon\sigma(\tilde{x}) \frac{d\sigma(\tilde{x})}{dx} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\sigma(\tilde{x})}{dx} \right)^2 \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} + \varepsilon^2 \sigma(\tilde{x}) \frac{d^2\sigma(\tilde{x})}{dx^2} \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}. \quad (6)$$

В точке $\varepsilon = 0$ справедливо $\frac{df(\bar{x})}{dx} \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0) = 0$, откуда в силу $\frac{df(\bar{x})}{dx} \neq 0$ вытекает, что $\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0) = 0$.

3. Проинтегрировав соотношение (6) по ε , получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f(\tilde{x})}{dx^2} \left(\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{df(\tilde{x})}{dx} \frac{d^2 \tilde{x}}{d\varepsilon^2} = 2\sigma(\tilde{x}) \frac{\sigma(\tilde{x})}{dx} + \\ & + 4\varepsilon \left(\frac{d\sigma(\tilde{x})}{dx} \right)^2 \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} + 4\varepsilon\sigma(\tilde{x}) \frac{d^2\sigma(\tilde{x})}{dx^2} \frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} + 3\varepsilon^2 \frac{d\sigma(\tilde{x})}{dx} \frac{d^2\sigma(\tilde{x})}{dx^2} \left(\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} \right)^2 + \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{d\sigma(\tilde{x})}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \tilde{x}}{d\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \sigma(\tilde{x}) \frac{d^3\sigma(\tilde{x})}{dx^3} \left(\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 \sigma(\tilde{x}) \frac{d^2\sigma(\tilde{x})}{dx^2} \frac{d^2 \tilde{x}}{d\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}(0) = 0$, найдем значение второй производной в точке $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{d\varepsilon^2}(0) = \frac{2\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

4. Рассуждая аналогично, получим соотношения для производных 3-го, 4-го и 5-го порядков:

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 \tilde{x}}{d\varepsilon^3}(0) = 0, \quad \frac{d^5 \tilde{x}}{d\varepsilon^5}(0) = 0, \\ & \frac{d^4 \tilde{x}}{d\varepsilon^4}(0) = \frac{2f'(\bar{x})(12(\sigma'(\bar{x}))^2 + 12\sigma(\bar{x})\sigma''(\bar{x}))\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x}) - 12f''(\bar{x})\sigma^2(\bar{x})(\sigma''(\bar{x}))^2}{f'(\bar{x})^3}. \end{aligned}$$

5. Таким образом, подставив найденные значения производных функции $\tilde{x}(\varepsilon)$ в точку $\varepsilon = 0$ в (5), получим требуемое разложение. □

Первое приближение сдвига $\delta(\varepsilon) \approx \frac{\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \varepsilon^2$ определяется величиной интенсивности шума ε и значениями $\sigma(\bar{x})$, $\sigma'(\bar{x})$ и $f'(\bar{x})$. Величина $f'(\bar{x}) < 0$ является характеристическим показателем детерминированной системы в инвариантной окрестности, охватывающей равновесие \bar{x} , и характеризует степень его устойчивости. Если производная $f'(\bar{x})$ близка к нулю, то равновесие \bar{x} слабо устойчиво и сдвиг $\delta(\varepsilon)$ достаточно велик. Увеличение степени устойчивости детерминированного равновесия ведет к уменьшению $\delta(\varepsilon)$. Детальное исследование величины сдвига $\delta(\varepsilon)$ проведем на примере линейной системы (модель 1).

§ 2. Модель 1

Рассмотрим линейную стохастическую систему

$$dx = \mu x dt + \sigma_1(x - a)dw_1 + \sigma_2 dw_2, \quad (7)$$

где w_1, w_2 — независимые стандартные винеровские процессы, $\sigma_1 > 0$ — интенсивность мультипликативного шума, $\sigma_2 > 0$ — интенсивность аддитивного шума. Стационарная плотность распределения находится из уравнения ФПК в явном виде

$$\rho(x) = K \exp \left(\frac{2\mu a}{\sigma_1 \sigma_2} \arctg \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x - a) \right) (\sigma_1^2 (x - a)^2 + \sigma_2^2)^{\frac{\mu}{\sigma_1^2} - 1},$$

где $K > 0$ — константа интегрирования.

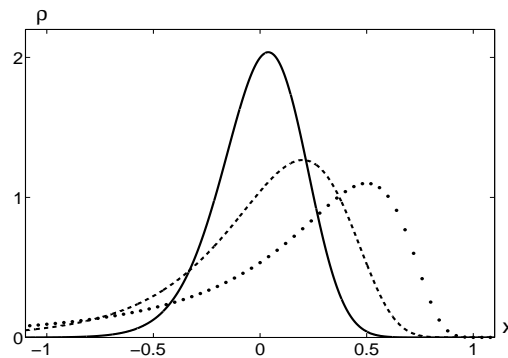


Рис. 2. Функция плотности распределения для $\mu = -1$, $a = 1$, $\sigma_2 = 0.2$, при $\sigma_1 = 0.2$ (сплошная), $\sigma_1 = 0.5$ (пунктир), $\sigma_1 = 1$ (точки)

У системы (7) существует стохастический аттрактор, если $\mu < \frac{\sigma_2^2}{2}$. На рис. 2 представлены графики функции плотности распределения $\rho(x)$ при фиксированных параметрах $\mu = -1$, $a = 1$ и интенсивности аддитивного шума $\sigma_2 = 0.2$ для трех значений мультипликативного шума $\sigma_1 = 0.2$ (сплошная), $\sigma_1 = 0.5$ (пунктир) и $\sigma_1 = 1$ (точки).

Как видим, пик функции плотности распределения $\rho(x)$ сдвигается при изменении параметра σ_1 .

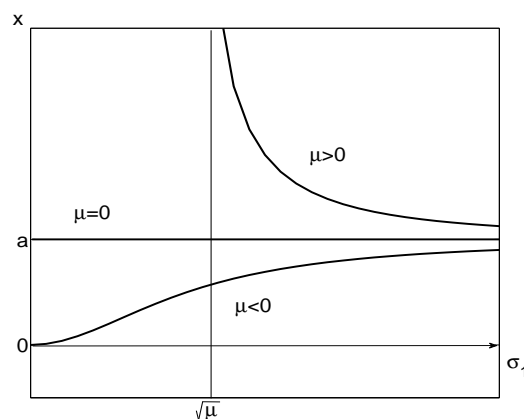


Рис. 3. Зависимость \tilde{x} от σ_1 для разных μ

Уравнение (3) для системы (7) имеет вид $\mu x = \sigma_1^2(x - a)$. Отсюда для точки максимальной концентрации имеем $\tilde{x} = \frac{\sigma_1^2 a}{\sigma_1^2 - \mu}$. На рис. 3 представлены графики зависимости \tilde{x} от σ_1 для разных μ . Отметим, что независимо от величины μ при возрастании σ_1 значение \tilde{x} стремится к a .

На примере системы (7) можно проиллюстрировать погрешность приближений разного порядка для оценки (4) сдвига δ в зависимости от параметра $\varepsilon = \sigma_1$. На рис. 4 представлены графики точной функции $\delta(\sigma_1)$, ее первого и второго приближений, найденных из разложения (4).

§ 3. Модель 2

Рассмотрим теперь систему с кубической нелинейностью в присутствии аддитивных и па-

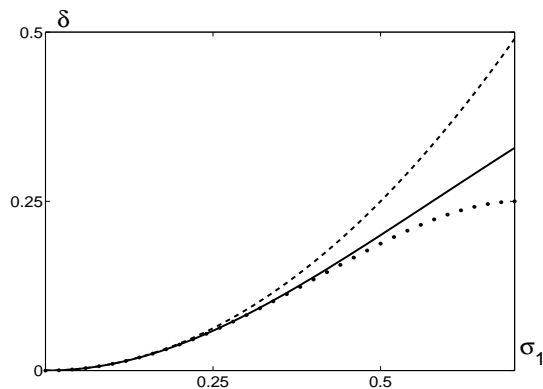


Рис. 4. Оценка сдвига стохастического аттрактора $\delta(\sigma_1)$ для линейной системы (7): точная функция $\delta(\sigma_1)$ (сплошная), первое приближение (пунктир), второе приближение (точки)

раметрических шумов

$$dx = x(\mu - x^2)dt + \sigma_1 x dw_1 + \sigma_2 dw_2. \tag{8}$$

У соответствующей детерминированной системы ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) возможны три точки покоя $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \sqrt{\mu}$ и $\bar{x}_3 = -\sqrt{\mu}$. При значении параметра $\mu < 0$ единственная точка покоя $\bar{x}_1 = 0$ устойчива. При $\mu > 0$ положение $\bar{x}_1 = 0$ теряет устойчивость и появляется пара устойчивых равновесий $\bar{x}_2 = \sqrt{\mu}$, $\bar{x}_3 = -\sqrt{\mu}$.

Стационарная плотность распределения случайных состояний стохастического аттрактора этой системы имеет вид

$$\rho(x) = K \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^4}\right) (\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2)^{\frac{\sigma_1^2 \mu + \sigma_2^2}{\sigma_1^4} - 1}.$$

На рис. 5 представлены графики функции плотности распределения $\rho(x)$ при $\mu = 1$, $\sigma_2 = 0.1$ для $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_1 = 1.4$.

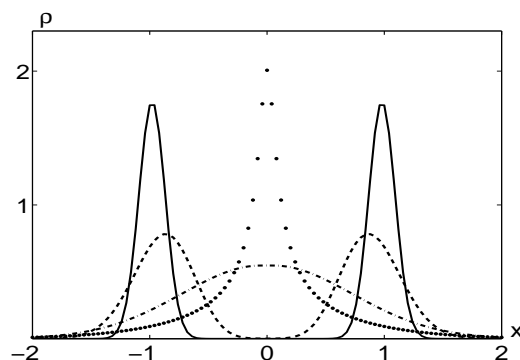


Рис. 5. Функция плотности распределения при $\mu = 1$, $\sigma_2 = 0.1$ для $\sigma_1 = 0.2$ (сплошная), $\sigma_1 = 0.5$ (пунктир), $\sigma_1 = 1$ (точка-тире), $\sigma_1 = 1.4$ (точки)

Как видим, при вариации интенсивности σ_1 мультипликативного шума расположение и количество экстремумов функции $\rho(x)$ существенно меняется. При малом σ_1 график $\rho(x)$ имеет два пика. При увеличении σ_1 пики начинают сближаться и сливаются в один. Дальнейшее

увеличение σ_1 ведет лишь к увеличению высоты и уменьшению ширины этого единственного пика.

Уравнение (3) для системы (8) имеет вид

$$x(\mu - x^2) = \sigma_1^2 x.$$

При $\mu \leq \sigma_1^2$ это уравнение имеет единственный корень $\tilde{x}_1 = 0$, задающий максимум $\rho(x)$. При $\mu > \sigma_1^2$ этот корень \tilde{x}_1 задает минимум $\rho(x)$, и уравнение имеет еще два корня $\tilde{x}_2 = \sqrt{\mu - \sigma_1^2}$, $\tilde{x}_3 = -\sqrt{\mu - \sigma_1^2}$, соответствующих максимумам стационарной плотности распределения. На рис. 6 представлены экстремумы $\rho(x)$ при $\mu > 0$. Здесь сплошные линии соответствуют максимумам, а пунктирная – минимумам функции $\rho(x)$. Слияние двух максимумов в один происходит в точке бифуркации $\sigma_1^* = \sqrt{\mu}$.

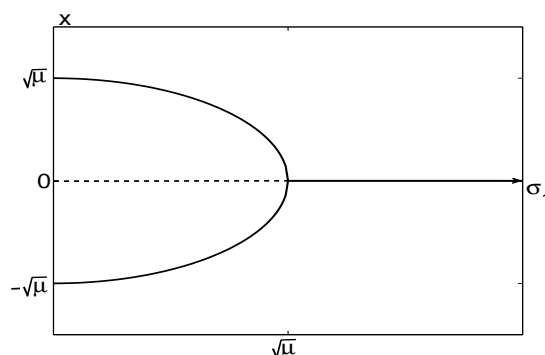


Рис. 6. Экстремумы стационарной плотности для модели 2

На рис. 7 изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма. При $\mu < 0$ независимо от значений σ_1 график $\rho(x)$ имеет унимодальную форму (единственный пик). Для каждого фиксированного значения параметра $\mu > 0$ увеличение σ_1 приводит к трансформации формы графика $\rho(x)$ из бимодальной в унимодальную.

На рис. 8 представлены случайные траектории системы (8) при фиксированных значениях параметров $\mu = 1$, $\sigma_2 = 0.1$ для различных значений интенсивности мультипликативного шума $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_1 = 1.4$.

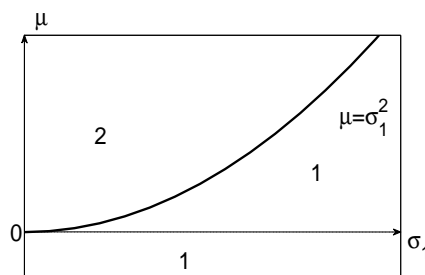


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма нелинейной стохастической модели 2. Зона 1 — «унимодальность», зона 2 — «бимодальность»

При малом σ_1 случайные решения большую часть времени локализованы в малых окрестностях устойчивых равновесий $\tilde{x}_{2,3}$ невозмущенной детерминированной системы. Переходы через сепаратрису $x = 0$ происходят достаточно редко. Увеличение σ_1 ведет к увеличению вероятности переходов. При достаточно большом параметрическом шуме решения большую часть

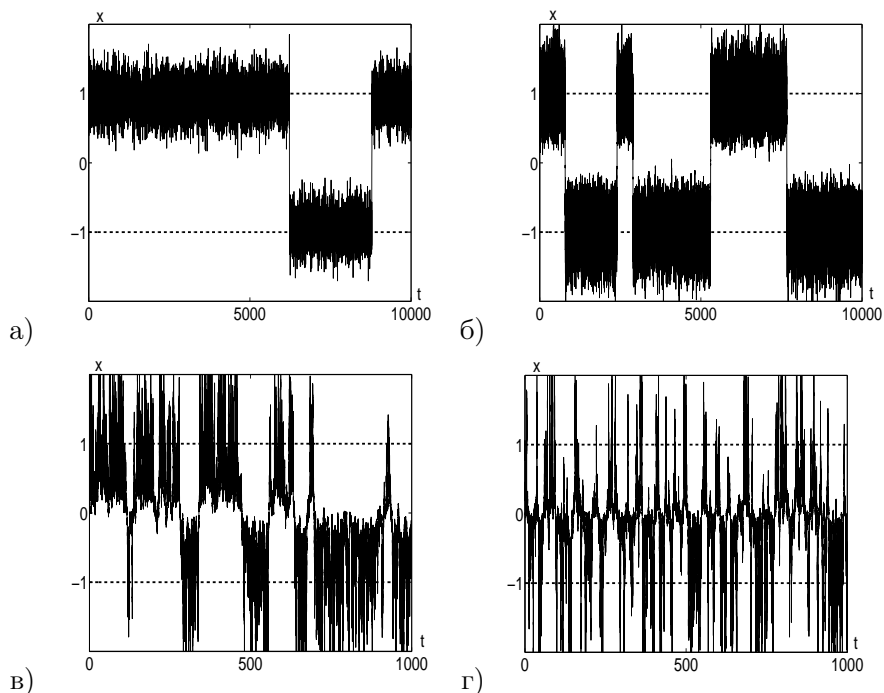


Рис. 8. Случайные траектории системы (8) при $\mu = 1, \sigma_2 = 0.1$ для: а) $\sigma_1 = 0.2$; б) $\sigma_1 = 0.5$; в) $\sigma_1 = 1$; г) $\sigma_1 = 1.4$. Пунктиром указаны детерминированные равновесия $\bar{x}_{2,3} = \pm 1$

времени локализованы в окрестности $x = 0$ и лишь изредка демонстрируют выбросы в направлении $\bar{x}_{2,3}$.

Таким образом, в системе с кубической нелинейностью вариация интенсивности параметрического шума приводит к качественному изменению формы стохастических аттракторов и существенным изменениям динамических характеристик ее решений.

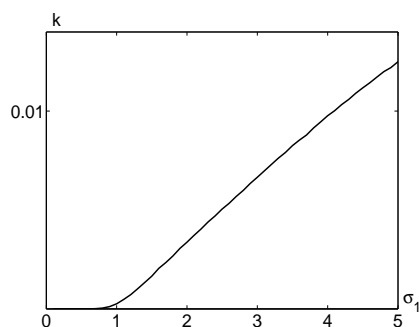


Рис. 9. Частота переходов через сепаратрису $x = 0$

На рис. 9 для $\mu = 1, \sigma_2 = 0.1$ приведена зависимость от σ_1 частоты перехода k через сепаратрису $x = 0$, разделяющую бассейны притяжения устойчивых равновесий $\bar{x}_{2,3}$ невозмущенной детерминированной системы.

Как видим, у функции $k(\sigma_1)$, имеющей при $\sigma_1 < \sigma_1^* = 1$ относительно малые значения, после перехода через точку бифуркации $\sigma_1^* = 1$ наблюдается отчетливый линейный рост.

§ 4. Модель 3

Рассмотрим теперь еще одну систему с кубической нелинейностью в присутствии аддитив-

ных и параметрических шумов

$$dx = f(x, \mu)dt + \sigma_1 x dw_1 + \sigma_2 dw_2, \quad f(x, \mu) = 4 + (\mu - 10)x + 6x^2 - x^3. \quad (9)$$

У соответствующей детерминированной системы ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) при $\mu > 1$ имеется единственная устойчивая точка покоя $\bar{x}(\mu)$, бассейном притяжения которой является вся числовая прямая.

Стационарная плотность распределения случайных состояний стохастического аттрактора этой системы имеет вид

$$\rho(x) = K \exp\left(\frac{-\sigma_1 \sigma_2 (-12 + x)x + 4(2\sigma_1^2 - 3\sigma_2^2) \operatorname{arctg} \frac{\sigma_1 x}{\sigma_2}}{\sigma_1^3 \sigma_2}\right) (\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2)^{\frac{(-10 + \mu)\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^4} - 1}.$$

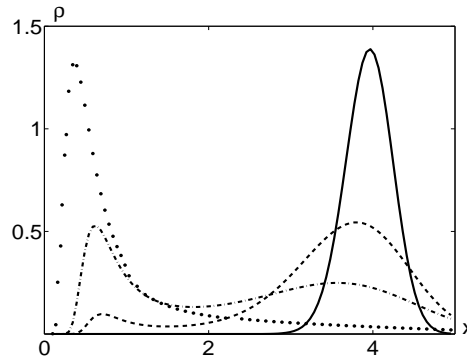


Рис. 10. Функция плотности распределения при $\mu = 1.01$, $\sigma_2 = 0.01$ для $\sigma_1 = 0.5$ (сплошная), $\sigma_1 = 0.65$ (пунктир), $\sigma_1 = 0.8$ (точка-тире), $\sigma_1 = 1.2$ (точки)

На рис. 10 представлены графики функции плотности распределения $\rho(x)$ при $\mu = 1.01$, $\sigma_2 = 0.01$ для четырех значений интенсивности параметрического шума $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_1 = 0.65$, $\sigma_1 = 0.8$, $\sigma_1 = 1.2$.

Как видим, при малом $\sigma_1 = 0.5$ плотность распределения имеет один высокий узкий пик над устойчивым равновесием $\bar{x} = 4.004$. При увеличении интенсивности σ_1 у функции $\rho(x)$ появляется еще один пик в окрестности $x = 1$. С ростом σ_1 высота этого левого пика увеличивается, а правого уменьшается. При $\sigma_1 = 1.2$ у функции $\rho(x)$ наблюдается один высокий левый пик.

Уравнение (3), задающее экстремумы плотности распределения $\rho(x)$, для системы (9) имеет вид

$$f(x, \mu) = \sigma_1^2 x.$$

На рис. 11 представлено взаимное расположение графиков $y = f(x, \mu)$ и $y = \sigma_1^2 x$ при $\mu > 1$. Зависимость корней этого уравнения от параметра σ_1 при $\mu = 1.01$ изображена на рис. 12. Здесь сплошные линии соответствуют максимумам, а пунктирная — минимумам функции $\rho(x, \sigma_1)$. Стохастические бифуркации (при $\mu = 1.01$) происходят в точках $\sigma_{11} = 0.1$ и $\sigma_{12} = 1.1842$. При переходе параметра σ_1 через точку σ_{11} слева направо форма графика $\rho(x)$ трансформируется из унимодальной в бимодальную. При переходе параметра σ_1 через точку σ_{12} наблюдается обратная трансформация от бимодальной к унимодальной. На рис. 13 приведена соответствующая двухпараметрическая бифуркационная диаграмма. Бифуркационные кривые $\mu = 1 + \sigma_1^2$, $\mu = 10 - 6\sqrt{3} + \sigma_1^2$ разбивают плоскость (σ_1, μ) на три зоны.

При фиксированном значении $\mu < 1$ увеличение σ_1 приводит к трансформации формы графика $\rho(x)$ от бимодальной к унимодальной. При $\mu > 1$ наблюдается более сложный переход: от унимодальной через бимодальную снова к унимодальной.

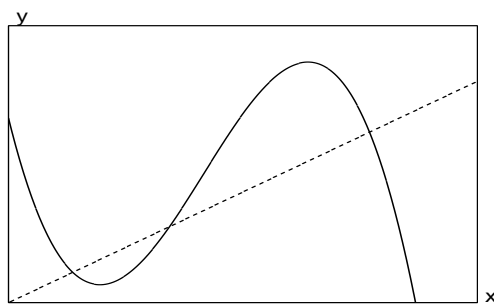


Рис. 11. Графики $y = f(x, \mu)$ (сплошная) и $y = \sigma_1^2 x$ (пунктир)

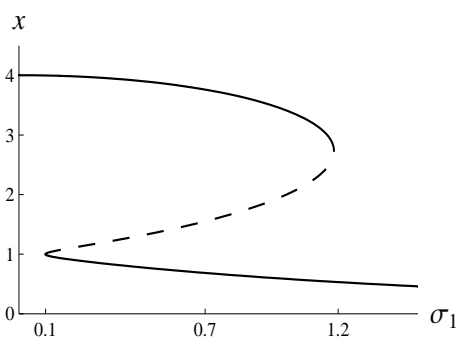


Рис. 12. Экстремумы стационарной плотности для модели 3

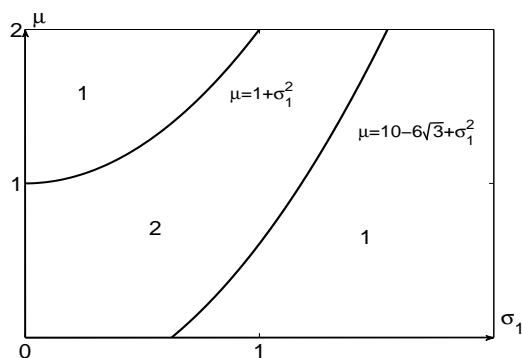


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма нелинейной стохастической модели 3. Зона 1 — «унимодальность», зона 2 — «бимодальность»

Отметим, что в модели 2 бимодальность функции $\rho(x)$ была связана с бистабильностью (существованием двух устойчивых равновесий) соответствующей детерминированной системы. В модели 3 при $\mu < 1$ механизм возникновения бимодальности точно такой же.

При $\mu > 1$ модель 3 моностабильна (имеет лишь одно устойчивое равновесие). Однако, несмотря на моностабильность модели 3, увеличение параметрических шумов приводит к трансформации унимодальной плотности в бимодальную. В этом принципиальное отличие модели 3 от модели 2.

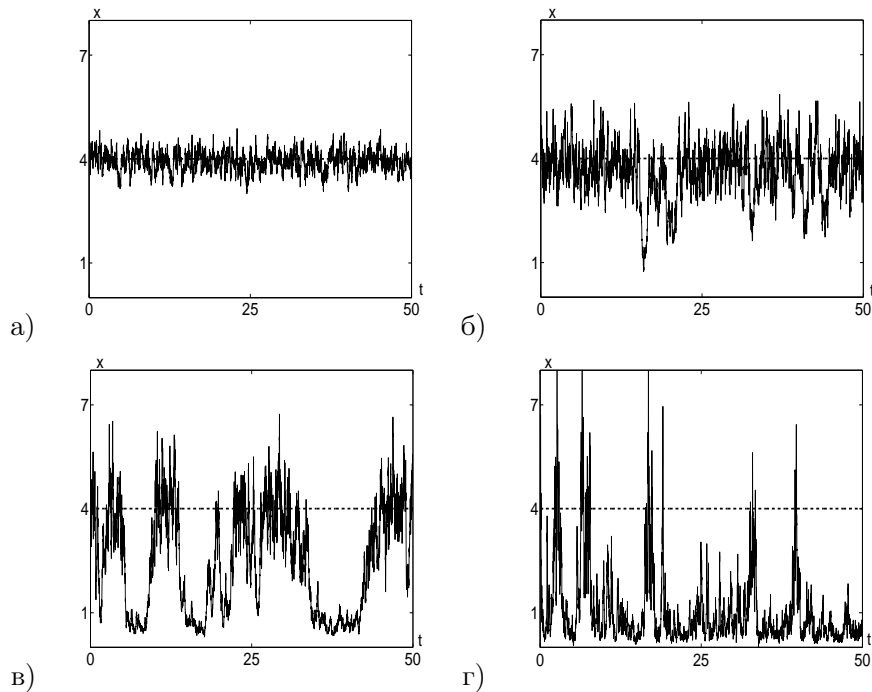


Рис. 14. Случайные траектории системы (9) для $\mu = 1.01$, $\sigma_2 = 0.01$ при: а) $\sigma_1 = 0.5$; б) $\sigma_1 = 0.65$; в) $\sigma_1 = 0.8$; г) $\sigma_1 = 1.2$

Изменения динамических свойств решений модели 3 иллюстрируются на рис. 14. Здесь представлены решения системы (9) для $\mu = 1.01$, $\sigma_2 = 0.01$ и разных значений интенсивности σ_1 параметрического шума.

Для $\sigma_1 = 0.5$ случайные состояния локализованы в окрестности равновесия $\bar{x} = 4.004$. При $\sigma_1 = 0.65$ и $\sigma_1 = 0.8$ наблюдаются случайные переходы решений между достаточно удаленными друг от друга окрестностью равновесия $\bar{x} = 4.004$ и окрестностью точки $x = 1$. При дальнейшем увеличении параметрического шума ($\sigma_1 = 1.2$) решения большую часть времени локализованы в окрестности $x = 1$ и лишь изредка демонстрируют выбросы в направлении $\bar{x} = 4.004$.

На рис. 15 для $\mu = 1.01$, $\sigma_2 = 0.01$ приведена зависимость от σ_1 частоты перехода k через точку $x = 2.5$, разделяющую пики $\rho(x)$ в режиме бимодальности.

В отличие от модели 2 (см. рис. 9), функции $k(\sigma_1)$ здесь немонотонна. На участке $0 < \sigma_1 < \sigma_{12}$ наблюдается быстрый рост, а затем, при дальнейшем увеличении σ_1 — постепенный спад значений.

Таким образом, порождаемые параметрическим шумом деформации стохастических аттракторов существенно зависят от типа нелинейности исходной невозмущенной детерминированной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: Wiley, 1974. 228 p.
2. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 398 с.

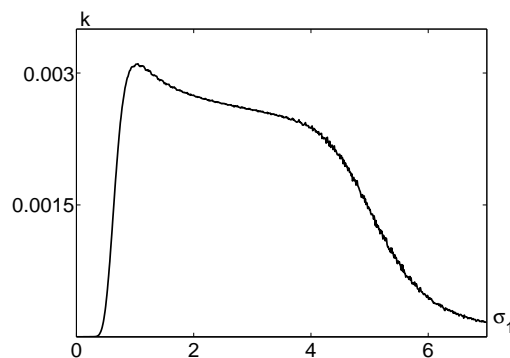


Рис. 15. Частота переходов через $x = 2.5$

3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 529 с.
4. Lai Y.-C., Tel T. Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales. Springer, 2011. 538p.
5. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of Noise in Excitable Systems // Phys. Rep. 392. 2004. P. 321-424.
6. Kraut S., Feudel U., Grebogi C. Preference of attractors in noisy multistable systems // Phys. Rev. E. 1999. 59. P. 5253-5260.
7. Bashkirtseva I., Ryashko L., Stikhin P. Noise-induced backward bifurcations of stochastic 3D-cycles // Fluctuation and Noise Letters. 2010. 9. P. 89-106.
8. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б. Анализ индуцированных шумом бифуркаций в системе Хопфа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. № 1. С. 37-50.
9. Zakharova A., Vadivasova T., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J. Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator // Phys. Rev. E. 2010. 81. P. 011106.

Поступила в редакцию 03.03.2012

Башкирцева Ирина Адольфовна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Irina.Bashkirtseva@usu.ru

Рязанова Татьяна Владимировна, к. ф.-м. н., кафедра математической физики, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Tatyana.Ryazanova@usu.ru

Ряшко Лев Борисович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru

I. A. Bashkirtseva, T. V. Ryazanova, L. B. Ryashko

Noise-induced transitions and deformations of stochastic attractors for one-dimensional systems

Keywords: Ito equation, stochastic attractor, parametrical noise, noise-induced transitions.

Mathematical Subject Classifications: 34F05, 37H20, 60G07

The influence of additive and parametrical noise on attractors of the one-dimensional system governed by the stochastic differential Ito equation is investigated. It is shown that unlike additive, parametrical disturbances lead to the shift of extrema of probability density function. For the value of this shift, a decomposition on small parameter of noise intensity is obtained. It is shown that the influence of the parametrical noise can

change not only the arrangement, but also the quantity of extrema of probability density function. The corresponding noise-induced phenomena are studied for three dynamical models in detail. An analysis of the error for the different order estimations of the shift of extrema for the probability density function is presented by the example of a linear model. Two scenarios of the transition between unimodal and bimodal forms of the stochastic attractor are investigated for systems with different types of cubic nonlinearity.

REFERENCES

1. Arnold L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, New York: Wiley, 1974, 228 p.
2. Horsthemke W., Lefever R. *Noised-induced transitions*, Springer-Verlag, 1984, 398 p. Translated under the title *Indutsirovannyye shumom perehody*, Moscow: Mir, 1987, 398 p.
3. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Neiman A.B., Strelkova G.I., Shimanskii-Gaier L. *Nelineinye effecty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh* (Non-linear effects in chaotic and stochastic systems), Izhevsk: Institute of Computer Sciences, 2003, 529 p.
4. Lai Y.-C., Tel T. *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales*, Springer, 2011, 538 p.
5. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of Noise in Excitable Systems, *Phys. Rep.* 392, 2004, pp. 321–424.
6. Kraut S., Feudel U., Grebogi C. Preference of attractors in noisy multistable systems, *Phys. Rev. E.*, 1999, 59, pp. 5253–5260.
7. Bashkirtseva I., Ryashko L., Stikhin P. Noise-induced backward bifurcations of stochastic 3D-cycles, *Fluctuation and Noise Letters*, 2010, 9, pp. 89–106.
8. Bashkirtseva I.A., Perevalova T.V., Ryashko L.B. Analysis of noised-induced bifurcations in Hopf system, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Prikl. Nelin. Dinamika*, 2010, vol. 18, no 1, pp. 37–50.
9. Zakharova A., Vadivasova T., Anishchenko V., Koseska A., Kurths J. Stochastic bifurcations and coherencelike resonance in a self-sustained bistable noisy oscillator, *Phys. Rev. E.*, 2010, 81, 011106.

Received 03.03.2012

Bashkirtseva Irina Adolfovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Physics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: Irina.Bashkirtseva@usu.ru

Ryazanova Tatyana Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Physics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: Tatyana.Ryazanova@usu.ru

Ryashko Lev Borisovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru