МЕХАНИКА

УДК 517.957; 532.591:532.133

© *В. А. Баринов, К. Ю. Басинский*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ СТОКСА НА ПОВЕРХНОСТИ СЛАБОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Приводится постановка нелинейной краевой задачи о распространении волн по свободной поверхности слабовязкой жидкости. Решение задачи находится методом переменной во времени частоты, являющимся обобщением метода Стокса для диссипативных волновых процессов. Найдено асимптотическое решение с точностью третьего приближения по волновому параметру. Показано, что частота и декремент затухания нелинейной волны с течением времени стремятся к значениям, соответствующим линейной задаче. Определены нелинейные траектории жидких частиц, а также выражение переносной скорости Стокса в слабовязкой жидкости.

Ключевые слова: нелинейные поверхностные волны, вязкая диссипация, дисперсионные соотношения.

Введение

Для решения нелинейной задачи о волнах на свободной поверхности идеальной жидкости Стоксом был разработан метод последовательных приближений [1], который получил развитие во многих последующих работах, например, в [2, 3]. В случае вязкой жидкости применение этого метода испытывает существенные трудности, обусловленные: диссипацией волнового движения, которая оценивается дополнительным волновым параметром – коэффициентом (декрементом) затухания; наличием вязковихревого движения жидкости и второго динамического условия (для касательных напряжений) на свободной поверхности. В работах [4, 5] найдено условие, при котором можно пренебречь вихревой составляющей скорости и вторым динамическим условием (слабовязкая жидкость). Отношение вязкой частоты к частоте в идеальной жидкости (относительная вязкая частота) не должно превышать 0,4. Для большинства жидкостей при длинах волн более 10^{-2} см это условие выполняется. Поэтому решение задачи можно находить в виде затухающих потенциальных волн, то есть учитывать только диссипацию, пренебрегая вязковихревой составляющей скорости. Однако даже для такой модели решение нелинейной задачи удается найти только с точностью второго приближения. Например, для вязкой диссипации [6], для диссипации за счет межфазного трения в двухфазной смеси [7]. Относительная простота определения второго приближения обусловлена отсутствием нелинейных добавок к частоте и декременту затухания волны в этом приближении. Но уже в третьем приближении даже для идеальной жидкости появляются постоянные добавки. При нахождении же дисперсионных соотношений в третьем приближении для слабовязкой жидкости, если частоту и декремент полагать постоянными, появляются неопределенные функции времени. Чтобы задача для третьего приближения стала разрешимой, необходимо изначально положить частоту (фазовую скорость) волны изменяющейся во времени. Действительно, в вязкой жидкости все возмущения со временем изменяются (затухают), следовательно, должна изменяться и частота (фазовая скорость). В настоящей работе за счет этого предположения проводится обобщение метода Стокса на случай слабовязких жидкостей. В результате определено решение нелинейной задачи с точностью третьего приближения, найдено выражение для переносной скорости Стокса частицы слабовязкой жидкости.

§ 1. Модель слабовязкого волнового движения

Рассмотрим бесконечно глубокий слой несжимаемой вязкой жидкости, ограниченный свободной поверхностью $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$. Декартова система координат задана так, что плоскость

$z^* = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, а ось z^* противоположно направлена вектору силы тяжести $\mathbf{g}$. Пусть по свободной поверхности в направлении оси x^* распространяется гравитационная волна. Волновое движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой, там где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины.

Нелинейная модель (краевая задача) волнового движения вязкой жидкости имеет вид [4]

$$\nabla\mathbf{u} = 0, \quad \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t^*} - \nu_0\Delta\mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}, \tag{1.1}$$

$$v - \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial\xi}{\partial t^*} = \varepsilon u\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon\xi, \tag{1.2}$$

$$p - \xi - T_n = -\varepsilon T_s\frac{\partial\xi}{\partial x}; \quad T_s = -\varepsilon\left(p - \xi + T_n\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}; \quad z = \varepsilon\xi, \tag{1.3}$$

$$T_n = 2\nu_0\frac{\partial v}{\partial z} = -2\nu_0\frac{\partial u}{\partial x}; \quad T_s = \nu_0\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\mathbf{u} \to 0; \quad z \to -\infty. \tag{1.4}$$

В системе (1.1)–(1.4) безразмерные величины связаны с физическими равенствами

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon c_0\mathbf{u}, \quad P - P_a + \rho g z^* = \varepsilon\rho c_0^2 p, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad \xi^* = \varepsilon\xi/k,$$

$$\nu_0 = \nu k/c_0, \quad c_0^2 = g/k, \quad \omega_0^2 = gk, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Здесь ρ — плотность, P — давление, $P_a = const$ — атмосферное давление, ν — коэффициент кинематической вязкости, λ — длина волны, $\varepsilon = k\max|\xi^*|$ — волновой параметр.

В общую модель волнового движения вязкой жидкости (1.1)–(1.4) входят два характерных параметра: волновой ε и относительная вязкая частота ν_0. Для определенных диапазонов значений этих параметров исходную модель можно упростить и функции $\mathbf{u}$, ξ находить в виде затухающих бегущих волн, что составляет суть модели слабовязкого волнового движения. В работе [4] показано, что затухающая потенциальная составляющая скорости превалирует над вязковихревой для $\nu_0 < 0,4$. Поэтому при выполнении этого условия в модели можно учитывать только вязкую диссипацию и пренебречь вихревым движением, то есть $\mathbf{u}$ и ξ искать в виде затухающих потенциальных волн. Вторым ограничением, упрощающим модель (1.1)–(1.4), является малость параметра ε. Из динамических условий (1.3) следует, что касательные составляющие тензора вязких напряжений на порядок по ε выше нормальных: $|T_n| \sim |p - \xi|$, $|T_s| \sim \varepsilon|p - \xi|$. Тогда при малых ε (пологие волны) второе динамическое условие (1.3) является равенством более высокого порядка малости по ε, чем первое. Поэтому в случае пологих волн (модуль угла наклона касательной свободной поверхности к оси x меньше $\pi/8$ [4]) вторым равенством (1.3) — x-ой компонентой нормальной проекции тензора скачка напряжений на свободной поверхности можно пренебречь по сравнению с z-ой компонентой — первым равенством (1.3). Таким образом, нелинейную модель волнового движения слабовязкой жидкости составят уравнения (1.1), условия (1.2), (1.4) и первое динамическое условие (1.3).

§ 2. Краевая задача и ее асимптотическое представление

В системе (1.1)–(1.4) все динамические величины обезразмерены с помощью фазовой скорости (частоты) волны в идеальной жидкости, что обеспечивает малость безразмерных величин. В уравнениях (1.1), (1.2) размерной остается переменная t^*. Чтобы при обезразмеривании сохранить реальное время волнового процесса необходимо временную переменную обезразмерить истинной частотой волны, то есть $t = \omega t^* = kct^*$. Полагая истинную частоту (соответственно и фазовую скорость) волны неизвестной функцией времени, то есть $\omega = \omega(t)$ ($c = c(t)$), получаем нелинейную краевую задачу для определения волнового движения слабовязкой жидкости

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}, \tag{2.1}$$

$$v - \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \tag{2.2}$$

$$p - \xi - 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon \nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{u} \to 0, \quad z \to -\infty, \tag{2.4}$$

где $\alpha(t) = c(t)/c_0 = \omega(t)/\omega_0$. В силу малости волнового параметра условия (2.2), (2.3) разложением в ряд Маклорена входящих в них функций можно свести к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$.

Исходя из ограничения на относительную вязкую частоту ($\nu_0 < 0,4$), скорость волнового движения можно находить в виде затухающих прогрессивных волн

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n\frac{\beta}{\alpha}t}\mathbf{u}_n, \quad \mathbf{u}_n = (u_n, 0, v_n), \quad v_n = e^{nz}\left\{A_n \cos n\bar{x} + B_n \sin n\bar{x}\right\},$$

$$u_n = e^{nz}\left\{B_n \cos n\bar{x} - A_n \sin n\bar{x}\right\}, \quad \bar{x} = x - t.$$

Здесь $\beta(t)$ — безразмерный декремент затухания ($\beta\omega_0$ — размерный). Остальные неизвестные функции будем также искать в виде рядов по малому параметру ε:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n\frac{\beta}{\alpha}t} p_n, \quad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n\frac{\beta}{\alpha}t}\xi_n,$$

$$\alpha = \alpha_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n a_n(t)\right), \quad \beta = \beta_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n b_n(t)\right),$$

$$e^{-\frac{\beta t}{\alpha}} = e^{-\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}}\left[1 + \varepsilon\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}(a_1 - b_1) + \varepsilon^2\frac{\beta_0 t}{\alpha_0}\left(a_2 - b_2 + a_1 b_1 - a_1^2 + \frac{\beta_0 t}{2\alpha_0}(b_1 - a_1)^2\right) + \ldots\right],$$

где α_0, β_0 — безразмерные частота и декремент затухания, соответствующие линейной задаче.

Подставив в уравнения (2.1) и разложенные в окрестности $z = 0$ граничные условия (2.2), (2.3) вместо $\mathbf{u}$, p, ξ, α, β ряды и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем задачи соответствующих приближений. В первом (линейном) приближении задача имеет вид: при ε^0

$$div\mathbf{u}_1 = 0, \quad \alpha_0\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \beta_0 \mathbf{u}_1 - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 = 0, \tag{2.5}$$

$$v_1 - \alpha_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \beta_0 \xi_1 = 0, \quad p_1 - \xi_1 - 2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0.$$

Во втором приближении получаем: при ε^1

$$div\mathbf{u}_2 = 0, \quad \alpha_0\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - 2\beta_0 \mathbf{u}_2 - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_2 + \nabla p_2 = -(\mathbf{u}_1\nabla)\mathbf{u}_1 + \tag{2.6}$$

$$+ e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[\beta_0 \mathbf{u}_1 (tb_1)' - \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$v_2 - \alpha_0\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + 2\beta_0 \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \xi_1) + e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0 (ta_1)'\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \beta_0 \xi_1 (tb_1)'\right], \quad z = 0,$$

$$p_2 - \xi_2 - 2\nu_0\frac{\partial v_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1\right) - \nu_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial x}, \quad z = 0.$$

Здесь и ниже штрихом обозначена производная по t.

В третьем приближении задача примет вид: при ε^2

$$div\mathbf{u}_3 = 0, \quad \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial t} - 3\beta_0 \mathbf{u}_3 - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_3 + \nabla p_3 = -\left[(\mathbf{u}_2 \nabla)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \nabla)\mathbf{u}_2\right] + \tag{2.7}$$

$$+e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{-\frac{\partial \mathbf{u_1}}{\partial t}\left[\alpha_0 (ta_2)' + \beta_0 (ta_1)'(tb_1 - ta_1) + \alpha_0 t^2 \left(a_1'\right)^2\right] + \beta_0 \mathbf{u_1}\left[(tb_2)' + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\beta_0}{\alpha_0}(tb_1)'(tb_1 - ta_1) + t^2 a_1' b_1'\right]\right\} + e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left[2\beta_0 \mathbf{u}_2 (tb_1)' - \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}(ta_1)'\right],$$

$$v_3 - \alpha_0 \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + 3\beta_0 \xi_3 = \frac{\partial}{\partial x}\left[u_1 \xi_2 + u_2 \xi_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial z}\xi_1^2\right] + e^{\frac{2\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{\frac{\partial \xi_1}{\partial t}\left[\alpha_0 (ta_2)' + \right.\right.$$

$$\left.+\beta_0 (ta_1)'(tb_1 - ta_1) + \alpha_0 t^2 \left(a_1'\right)^2\right] - \beta_0 \xi_1 \left[(tb_2)' + \frac{\beta_0}{\alpha_0}(tb_1)'(tb_1 - ta_1) + \right.$$

$$\left.\left.+t^2 a_1' b_1'\right]\right\} + e^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}t}\left\{\alpha_0 (ta_1)' \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - 2\beta_0 \xi_2 (tb_1)'\right\}, \quad z = 0,$$

$$p_3 - \xi_3 - 2\nu_0 \frac{\partial v_3}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} - p_2\right) - \nu_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi_1}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1\right) - \nu_0 \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right), \quad z = 0.$$

§ 3. Решение задачи в первых трех приближениях

Первое приближение (2.5) совпадает с линейной задачей, рассмотренной в [4, 8]. Ее решение имеет вид:

$$u_1 = Ae^z \cos\chi, \quad v_1 = Ae^z \sin\chi, \tag{3.1}$$

$$p_1 = Ae^z (\alpha_0 \cos\chi + \nu_0 \sin\chi), \quad \xi_1 = A(\alpha_0 \cos\chi - \nu_0 \sin\chi),$$

$$\alpha_0^2 + \nu_0^2 = 1, \quad \beta_0 = \nu_0, \quad \chi = \bar{x} + \theta,$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\,(A_1/B_1).$$

Здесь θ — начальная фаза волны. Через новую переменную χ компоненты $\mathbf{u}_n$, начиная со второго приближения, выразятся следующим образом:

$$v_n = e^{nz}\left[C_n \cos(n\chi) + D_n \sin(n\chi)\right], \quad u_n = e^{nz}\left[D_n \cos(n\chi) - C_n \sin(n\chi)\right], \tag{3.2}$$

$$C_n = A_n \cos(n\theta) - B_n \sin(n\theta), \quad D_n = B_n \cos(n\theta) + A_n \sin(n\theta), \quad n = 2,\ 3,\ \ldots.$$

Отметим, что функции (3.2) удовлетворяют условию несжимаемости жидкости, поэтому ниже его можно не выписывать.

Тогда задача во втором приближении (2.6) примет вид:

$$\alpha_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} - 2\nu_0 u_2 - \nu_0 \Delta u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x} = Ae^{z + \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\nu_0 (tb_1)' \cos\chi - \alpha_0 (ta_1)' \sin\chi\right],$$

$$\alpha_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} - 2\nu_0 v_2 - \nu_0 \Delta v_2 + \frac{\partial p_2}{\partial z} = Ae^{z + \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\nu_0 (tb_1)' \sin\chi + \alpha_0 (ta_1)' \cos\chi\right] - A^2 e^{2z},$$

$$\alpha_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - 2\nu_0 \xi_2 - v_2 = \mathrm{A}^2 (\nu_0 \cos 2\chi + \alpha_0 \sin 2\chi) + Ae^{\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0 \nu_0 (tb_1 - ta_1)' \cos\chi - \right.$$

$$\left.- \left(\nu_0^2 tb_1 + \alpha_0^2 ta_1\right)' \sin\chi\right], \quad z = 0,$$

$$p_2 - \xi_2 - 2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} = A^2\left[\left(2\nu_0^2 - 1/2\right)\cos 2\chi + 2\alpha_0 \nu_0 \sin 2\chi + \nu_0^2 - 1/2\right], \quad z = 0.$$

Из уравнений движения, используя выражения для компонент скорости (3.2) при $n = 2$, находим p_2, затем из динамического условия определяем ξ_2. Подставив выражения для v_2 и ξ_2 в кинематическое условие и приравняв коэффициенты при $\cos\chi$, $\sin\chi$, $\cos 2\chi$, $\sin 2\chi$, получаем систему двух алгебраических и двух дифференциальных уравнений для определения C_2, D_2 и $a_1(t)$, $b_1(t)$ соответственно:

$$\left(1+4\nu_0^2\right)C_2+4\alpha_0\nu_0D_2=-2\nu_0A^2,\quad 4\alpha_0\nu_0C_2-\left(1+4\nu_0^2\right)D_2=0,$$
$$\alpha_0\left(ta_1\right)''-2\nu_0\left(tb_1\right)'=0,\quad \nu_0\left(tb_1\right)''+2\alpha_0\left(ta_1\right)'=0.$$

Решение системы алгебраических уравнений имеет вид:

$$C_2=-\frac{2\nu_0A^2\left(1+4\nu_0^2\right)}{1+24\nu_0^2},\quad D_2=-\frac{8\alpha_0\nu_0^2A^2}{1+24\nu_0^2}.$$

При решении дифференциальных уравнений необходимо удовлетворить условию: при $t = 0$ функции $a_1(t)$ и $b_1(t)$ должны принимать конечные значения. С учетом этого условия получаем: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Подставив найденные C_2, D_2 и a_1, b_1 в выражения для v_2, u_2, p_2 и ξ_2, находим решение задачи во втором приближении:

$$u_2=\frac{2\nu_0A^2e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left[\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 2\chi-4\alpha_0\nu_0\cos 2\chi\right],$$

$$v_2=-\frac{2\nu_0A^2e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left[4\alpha_0\nu_0\sin 2\chi+\left(1+4\nu_0^2\right)\cos 2\chi\right],$$

$$p_2=A^2\left[\frac{2\nu_0e^{2z}}{1+24\nu_0^2}\left(\alpha_0\sin 2\chi-5\nu_0\cos 2\chi\right)+\left(\nu_0^2-e^{2z}/2\right)\right],$$

$$\xi_2=\frac{A^2}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[\left(1+16\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos 2\chi-32\alpha_0\nu_0^3\sin 2\chi\right].$$

Это решение совпадает с полученным в работе [6], в которой частота и декремент волны полагались постоянными.

Подставив найденные решения первого и второго приближения в уравнения и граничные условия (2.7), получаем задачу для третьего приближения в явном виде:

$$\alpha_0\frac{\partial u_3}{\partial t}-3\nu_0u_3-\nu_0\Delta u_3+\frac{\partial p_3}{\partial x}=Ae^z\left\{\left[C_2e^{2z}+\nu_0e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(tb_2\right)'\right]\cos\chi+\right.$$
$$\left.+\left[D_2e^{2z}-\alpha_0e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(ta_2\right)'\right]\sin\chi\right\},$$

$$\alpha_0\frac{\partial v_3}{\partial t}-3\nu_0v_3-\nu_0\Delta v_3+\frac{\partial p_3}{\partial z}=Ae^z\left\{\left[\alpha_0e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(ta_2\right)'-3D_2e^{2z}\right]\cos\chi+\right.$$
$$\left.+\left[3C_2e^{2z}+\nu_0e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(tb_2\right)'\right]\sin\chi\right\},$$

$$\alpha_0\frac{\partial \xi_3}{\partial t}-3\nu_0\xi_3-v_3=\frac{9A^3}{8\left(1+24\nu_0^2\right)}\left[2\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi+\left(1+10\nu_0^2-16\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right]+$$
$$+A\alpha_0\nu_0\left[e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(tb_2-ta_2\right)'+\frac{A^2\left(56\nu_0^2-3\right)}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\right]\cos\chi+A\left[\frac{A^2\left(5-8\nu_0^2\right)\left(1+14\nu_0^2\right)}{8\left(1+24\nu_0^2\right)}-\right.$$
$$\left.-e^{\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\nu_0^2tb_2+\alpha_0^2ta_2\right)'\right]\sin\chi,\quad z=0,$$

$$p_3-\xi_3-2\nu_0\frac{\partial v_3}{\partial z}=\frac{A^3}{8}\left\{\nu_0\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 3\chi-\alpha_0\left(3+4\nu_0^2\right)\cos 3\chi+\right.$$
$$\left.+\left[\alpha_0\left(3+160\nu_0^2+448\nu_0^4\right)\cos\chi-\nu_0\left(11-64\nu_0^2+448\nu_0^4\right)\sin\chi\right]/\left(1+24\nu_0^2\right)\right\},\ z=0.$$

Из уравнений движения и динамического условия, подставив в них выражения (3.2) при $n=3$, находим p_3 и ξ_3. Затем, подставив выражения для v_3 и ξ_3 в кинематическое условие и приравняв коэффициенты при $\cos\chi$, $\sin\chi$, $\cos 3\chi$, $\sin 3\chi$, получаем для определения C_3, D_3 и $a_2(t)$, $b_2(t)$ соответственно систему алгебраических и дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\left(1+6\nu_0^2\right)C_3+6\alpha_0\nu_0 D_3=\frac{3\alpha_0\nu_0A^3\left(24\nu_0^2-1\right)}{4\left(1+24\nu_0^2\right)},\\ 6\alpha_0\nu_0C_3-\left(1+6\nu_0^2\right)D_3=\frac{3\nu_0^2A^3\left(11+24\nu_0^2\right)}{4\left(1+24\nu_0^2\right)},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0\left(ta_2\right)''-2\nu_0\left(tb_2\right)'=-\frac{\nu_0A^2e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{2\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(5+76\nu_0^2+224\nu_0^4\right),\\ \nu_0\left(tb_2\right)''+2\alpha_0\left(ta_2\right)'=\frac{A^2e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{2\alpha_0\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(2+35\nu_0^2-36\nu_0^4+224\nu_0^6\right).\end{cases}$$

Из первой системы находим

$$C_3=-\frac{3\alpha_0\nu_0A^3}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right),$$

$$D_3=-\frac{3\nu_0^2A^3}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left(17-60\nu_0^2+288\nu_0^4\right).$$

Решение системы дифференциальных уравнений, с учетом условий $a_2(0)<\infty$, $b_2(0)<\infty$, имеет вид:

$$a_2=\alpha_0A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{4\nu_0t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6\right),$$

$$b_2=\alpha_0A^2\frac{1-e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{8\nu_0t\left(1+24\nu_0^2\right)}\left(3+36\nu_0^2+184\nu_0^4-448\nu_0^6\right).$$

Подставляя C_3, D_3 и a_2, b_2 в выражения для v_3, u_3, p_3 и ξ_3, получаем решение задачи в третьем приближении:

$$u_3=\frac{3A^3\nu_0e^{3z}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\sin 3\chi-\right.$$
$$\left.-\nu_0\left(17-60\nu_0^2+288\nu_0^4\right)\cos 3\chi\right],$$

$$v_3=-\frac{3A^3\nu_0e^{3z}}{4\left(1+24\nu_0^2\right)\left(1+48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(1-84\nu_0^2-288\nu_0^4\right)\cos 3\chi+\right.$$
$$\left.+\nu_0\left(17-60\nu_0^2+288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right],$$

$$p_3=\frac{A^3e^z}{4\left(1+24\nu_0^2\right)}\left\{\frac{\nu_0e^{2z}}{1+48\nu_0^2}\left[54\alpha_0\nu_0\left(8\nu_0^2-1\right)\cos 3\chi+3\left(1-102\nu_0^2-144\nu_0^4\right)\cdot\right.\right.$$
$$\cdot\sin 3\chi\Big]+2\alpha_0\left[1+20\nu_0^2+20\nu_0^4+224\nu_0^6+16\nu_0^2e^{2z}\right]\cos\chi+\nu_0\Big[3+36\nu_0^2+$$
$$\left.+184\nu_0^4-448\nu_0^6-8e^{2z}\left(1+4\nu_0^2\right)\right]\sin\chi\Big\},$$

$$\xi_3=\frac{A^3}{8}\left\{\frac{1}{1+48\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(3+76\nu_0^2-240\nu_0^4\right)\cos 3\chi+\nu_0\left(5-196\nu_0^2+240\nu_0^4\right)\cdot\right.\right.$$
$$\left.\cdot\sin 3\chi\Big]+\frac{1-28\nu_0^2}{1+24\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(1+12\nu_0^2-32\nu_0^4\right)\cos\chi+\nu_0\left(1-28\nu_0^2+32\nu_0^4\right)\sin\chi\right]\right\}.$$

Из найденных выражений нелинейных добавок для относительной частоты и декремента затухания следует: свое максимальное конечное значение они принимают в начальный момент и с течением времени исчезают.

Собирая вместе решения первых трех приближений, получаем выражения для относительной фазовой скорости, декремента затухания, скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности с точностью до третьего приближения:

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{4\nu_0 t\left(1 + 24\nu_0^2\right)} \left(1 + 20\nu_0^2 + 20\nu_0^4 + 224\nu_0^6\right)\right], \tag{3.3}$$

$$\beta = \nu_0 \left[1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{8\nu_0 t\left(1 + 24\nu_0^2\right)} \left(3 + 36\nu_0^2 + 184\nu_0^4 - 448\nu_0^6\right)\right],$$

$$u = Ae^{z - \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\cos\chi + \varepsilon \frac{2\nu_0 A e^{z-\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}}{1 + 24\nu_0^2}\left[\left(1 + 4\nu_0^2\right)\sin 2\chi - 4\alpha_0\nu_0\cos 2\chi\right] + \right.$$

$$+\frac{\varepsilon^2 A^2}{8\left(1 + 24\nu_0^2\right)}\left\{\frac{6\nu_0 e^{2z-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{\left(1 + 48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4\right)\sin 3\chi - \nu_0\left(17 - 60\nu_0^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+288\nu_0^4\right)\cos 3\chi\right] + \left(e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t} - 1\right)\left(1 - 4\nu_0^2 + 144\nu_0^4 - 896_0^6\right)\cos\chi\right\}\right),$$

$$v = Ae^{z - \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\sin\chi - \varepsilon \frac{2\nu_0 A e^{z-\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}}{1 + 24\nu_0^2}\left[4\alpha_0\nu_0\sin 2\chi + \left(1 + 4\nu_0^2\right)\cos 2\chi\right] + \right.$$

$$+\frac{\varepsilon^2 A^2}{8\left(1 + 24\nu_0^2\right)}\left\{-\frac{6\nu_0 e^{2z-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{\left(1 + 48\nu_0^2\right)}\left[\alpha_0\left(1 - 84\nu_0^2 - 288\nu_0^4\right)\cos 3\chi + \nu_0\left(17 - 60\nu_0^2 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+288\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right] + \left(e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t} - 1\right)\left(1 - 4\nu_0^2 + 144\nu_0^4 - 896_0^6\right)\sin\chi\right\}\right),$$

$$p = Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left(e^z\left(\alpha_0\cos\chi + \nu_0\sin\chi\right) + \varepsilon A e^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\frac{2\nu_0 e^{2z}}{1 + 24\nu_0^2}\left(\alpha_0\sin 2\chi - 5\nu_0\cos 2\chi\right)\right.\right.$$

$$\left. + \left(\nu_0^2 - e^{2z}/2\right)\right] + \frac{\varepsilon^2 A^2 e^z}{8\left(1 + 24\nu_0^2\right)}\left\{\frac{2\nu_0 e^{2z-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{1 + 48\nu_0^2}\left[3\left(1 - 102\nu_0^2 - 144\nu_0^4\right)\sin 3\chi - \right.\right.$$

$$\left. -54\alpha_0\nu_0\left(1 - 8\nu_0^2\right)\cos 3\chi\right] + \alpha_0\left[e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(5 + 76\nu_0^2 + 224\nu_0^4 + 64\nu_0^2 e^{2z}\right) - 1 + 4\nu_0^2 - \right.$$

$$\left. -144\nu_0^4 + 896\nu_0^6\right]\cos\chi + \nu_0\left[e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(7 + 68\nu_0^2 + 512\nu_0^4 - 1792\nu_0^6\right) - 16e^{2z-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\left(1 + 4_0^2\right) - 1 + 4\nu_0^2 - 144\nu_0^4 + 896\nu_0^6\right]\sin\chi\right\}\right),$$

$$\xi = Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0\cos\chi - \nu_0\sin\chi + \varepsilon\frac{Ae^{-\frac{\nu_0}{\alpha_0}t}}{2\left(1 + 24\nu_0^2\right)}\left[\left(1 + 16\nu_0^2 - 32\nu_0^4\right)\cos 2\chi - \right.\right.$$

$$\left. -32\alpha_0\nu_0^3\sin 2\chi\right] + \varepsilon^2\frac{A^2}{8}\left(\frac{e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}}{1 + 48\nu_0^2}\left[\alpha_0\left(3 + 76\nu_0^2 - 240\nu_0^4\right)\cos 3\chi + \right.\right.$$

$$\left. +\nu_0\left(5 - 196\nu_0^2 + 240\nu_0^4\right)\sin 3\chi\right] + \frac{1}{1 + 24\nu_0^2}\left\{\alpha_0\left[2e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left(1 - 10\nu_0^2 - 112\nu_0^4\right) - \right.\right.$$

$$-1+4\nu_0^2-144\nu_0^4+896\nu_0^6\big]\cos\chi+\nu_0\Big[1-4\nu_0^2+144\nu_0^4-896\nu_0^6-4\nu_0^2 e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\cdot$$

$$\cdot\left(13-168\nu_0^2\right)\big]\sin\chi\big\}\big)\big].$$

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов третьего порядка по малому амплитудному параметру. В предельном случае $\nu_0\to 0$ из найденных выражений следуют известные результаты для идеальной жидкости [2, 3]. При исследовании нелинейных движений идеальной жидкости Стоксом был установлен нелинейный эффект — зависимость частоты (фазовой скорости) волны от ее высоты, то есть от параметра ε. Первая формула (3.3) является ее обобщением на случай слабовязкой жидкости. Из нее следует, что с течением времени частота (фазовая скорость) стремится к значению, соответствующему линейной задаче. Однако это стремление более медленное, чем общее затухание волны. Поэтому нелинейная частота не успевает выровняться с линейной до полного затухания волны. Графики зависимости фазовой скорости и декремента затухания волны длины 1 м и относительной высоты 0,1 ($\varepsilon=0,1$), распространяющейся по поверхности воды ($\nu_0=5\cdot10^{-6}$), представлены на рисунках 1 и 2 соответственно. Максимальные значения фазовая скорость и декремент принимают в начальный момент времени: $c\,(0)=1,255$ м/с, $\beta^*\,(0)=44\cdot10^{-6}c^{-1}$. Из графиков видно, что для воды нелинейная фазовая скорость и декремент стремятся к своим линейным значениям. Это стремление достаточно медленное, они становятся равными примерно через 55 часов.

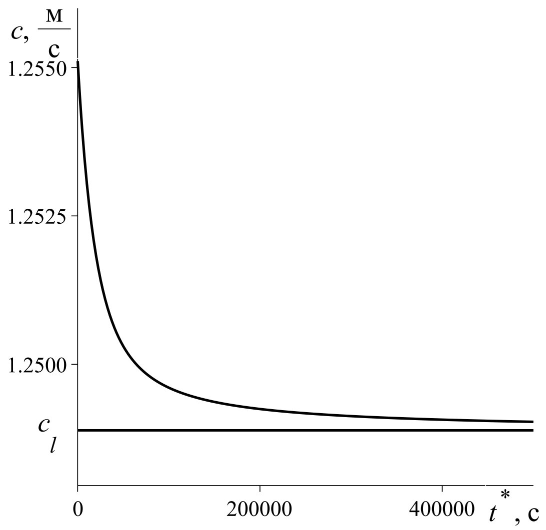

Рис. 1. Зависимость $c(t^*)$ для воды при $\lambda=1$ м, $\varepsilon=0,1$, A=1

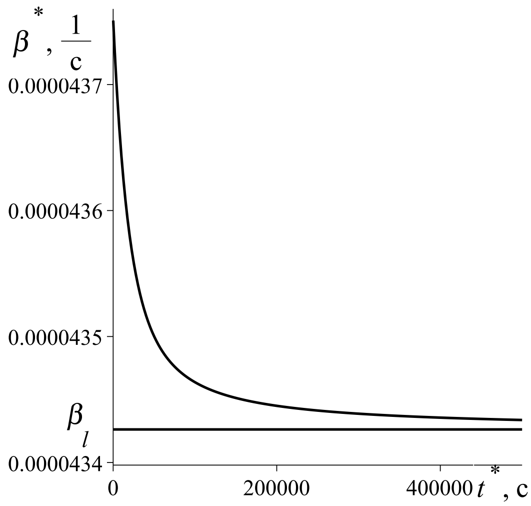

Рис. 2. Зависимость $\beta^*(t^*)$ для воды при $\lambda=1$ м, $\varepsilon=0,1$, A=1

Другим нелинейным эффектом для идеальной жидкости является наличие приповерхностного переносного течения (течение Стокса), обуславливающего разомкнутость траекторий движения жидких частиц. Чтобы получить выражение для течения Стокса в случае слабовязкой жидкости, необходимо определить нелинейные выражения для траекторий.

§ 4. Волновые траектории частиц слабовязкой жидкости

Физические координаты жидкой частицы $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*}=u^*,\quad \frac{dz^*}{dt^*}=v^*.$$

В приведенных выше решениях зависимость от x^* выражена через волновую переменную $\chi/k=(\bar{x}+\theta)/k$. Следовательно, и в уравнениях движения нужно перейти к этой переменной.

Кроме того, физическое время необходимо обезразмерить частотой колебания жидкой частицы σ, так как для нелинейных волн даже в идеальной жидкости σ не совпадает с частотой волны [2, 3]. Тогда безразмерные переменные примут вид

$$t^* = t/\sigma, \quad kz^* = z, \quad kx^* = \bar{x} + \gamma t = \chi - \theta + \gamma t,$$

где $\gamma = \omega/\sigma$. Следуя выше примененному методу переменной частоты, положим $\gamma = \gamma(t)$. Тогда уравнения движения в безразмерном виде запишутся как

$$\frac{d\chi}{dt} = -(t\gamma)' + \varepsilon\Big(t\frac{\gamma}{\alpha}\Big)'u, \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon\Big(t\frac{\gamma}{\alpha}\Big)'v. \tag{4.1}$$

Решение (4.1) находим в виде рядов по степеням ε:

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\chi_n, \quad z = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n z_n, \tag{4.2}$$

$$\bar{x} = \chi_0 + \theta + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\chi_n, \quad \gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\gamma_n.$$

Подставляя выражения (3.3), ряды (4.2) в уравнения (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, можно выписать асимптотические приближения системы (4.1). Соответственно в нулевом и первом приближении (при ε^0 и ε^1) уравнения примут вид

$$\frac{d\chi_0}{dt} = -1, \quad \frac{dz_0}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\chi_1}{dt} = \frac{A}{\alpha_0}e^{z_0 - \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\cos\chi_0 - (t\gamma_1)', \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{A}{\alpha_0}e^{z_0 - \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\sin\chi_0.$$

В нулевом приближении находим

$$\chi_0 = \chi_L - t = x_L + \theta - t, \quad z_0 = z_L,$$

где x_L, z_L — лагранжевы координаты частицы в состоянии покоя.

Периодическое по χ_L решение в первом приближении имеет вид

$$\gamma_1 = 0, \quad \chi_1 = -Ae^{z_L - \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\nu_0\cos\chi_L + \alpha_0\sin\chi_L\right), \quad z_1 = Ae^{z_L - \frac{\nu_0}{\alpha_0}t}\left(\alpha_0\cos\chi_L - \nu_0\sin\chi_L\right).$$

Уравнения для определения траектории частицы жидкости во втором приближении примут вид

$$\frac{d\chi_2}{dt} = \frac{2\nu_0A^2}{\alpha_0\left(1+24\nu_0^2\right)}e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\left(1+4\nu_0^2\right)\sin 2\chi_L - 4\alpha_0\nu_0\cos 2\chi_L\right] + A^2e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0}t} - (t\gamma_2)',$$

$$\frac{dz_2}{dt} = -\frac{2\nu_0A^2}{\alpha_0\left(1+24\nu_0^2\right)}e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\left(1+4\nu_0^2\right)\cos 2\chi_L + 4\alpha_0\nu_0\sin 2\chi_L\right].$$

Полагая χ_2, z_2 периодическими по χ_L, находим

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_0A^2}{2\nu_0 t}e^{2z_L}\left(1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\right),$$

$$\chi_2 = \frac{\nu_0A^2}{1+24\nu_0^2}e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0\left(1+8\nu_0^2\right)\cos 2\chi_L + \nu_0\left(3-8\nu_0^2\right)\sin 2\chi_L\right],$$

$$z_2 = \frac{\nu_0A^2}{1+24\nu_0^2}e^{2z_L - \frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\left[\alpha_0\left(1+8\nu_0^2\right)\sin 2\chi_L - \nu_0\left(3-8\nu_0^2\right)\cos 2\chi_L\right].$$

Подставляя найденные решения предыдущих приближений в третье, можно получить систему неоднородных уравнений для определения γ_3, χ_3, z_3, которая решается аналогично предыдущим приближениям. Ввиду громоздкости получающиеся выражения не приведены. Для определения нелинейного эффекта — приповерхностного течения Стокса — достаточно двух приближений, так как оно появляется именно во втором приближении. Величина $c - \frac{\sigma}{k}$ представляет собой переносную скорость. Ее приближенное выражение имеет вид

$$\varepsilon^2 c_0 \frac{\alpha_0^2 A^2}{2\nu_0 t} e^{2z_L} \left(1 - e^{-\frac{2\nu_0}{\alpha_0}t}\right). \tag{4.3}$$

В предельном случае $\nu \to 0$ формула (4.3) переходит в известное выражение переносной скорости Стокса для идеальной жидкости [3]. Для вязкой же жидкости приповерхностное течение зависит не только от вертикального положения жидкой частицы, но и от времени. Как следует из (4.3), с течением времени переносная скорость Стокса при учете вязкой диссипации затухает.

Из полученных выражений для траекторий следует, что движение жидкой частицы состоит из двух затухающих движений: прямолинейного и вращательного. Прямолинейное в направлении оси x^* происходит тем быстрее, чем ближе частица к свободной поверхности. Оно обеспечивает разомкнутость траекторий частиц. Вращательное движение осуществляется по круговым спиралеобразным траекториям, которые со временем сходятся к центру начальной окружности. Стремление к центру тем быстрее, чем больше значение кинематической вязкой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves // Math. and Physic. Papers. — 1880. — Vol. 1. — P. 197–229.

2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977. — 816 с.

3. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. — 196 с.

4. Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.–Петерб. ун-та. — 2010. — Сер. 10. Вып. 2. — С. 18–31.

5. Баринов В. А., Басинский К. Ю. Влияние вязкости жидкости на распространение поверхностных волн // Тр. 10-ой Всеросс. конф. «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука, 2010. — С. 205–208.

6. Басинский К. Ю. Нелинейные волны на поверхности слабовязкой жидкости // Сб. тр. 3-ей Регион. конф. «Современ. проблемы математ. и информ. моделирования». Тюмень: Изд-во «Вектор Бук», 2010. — С. 32–36.

7. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейная задача о поверхностных волнах на двухфазной смеси // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 2003. —Т. 43, № 12. — С. 1870–1883.

8. Joseph D. D., Wang J. The dissipation approximation and viscous potential flow // J. Fluid Mech. — 2004. — Vol. 505. — P. 365–377.

Поступила в редакцию 27.01.11

МЕХАНИКА 2011. Вып. 2

V. A. Barinov, K. Yu. Basinsky

Nonlinear Stokes waves on the surface of low-viscosity fluid

The statements of nonlinear boundary-value problem for wave propagation over the free surface of low-viscosity fluid have been presented. Solution is found by the method of time-varying frequency, which is the Stokes' method generalized for the dissipative wave processes. The asymptotic solution up to the third-order approximation upon the wave parameter has been found. It is shown that the frequency and damping rate of the nonlinear wave tend in time to the values corresponding to a linear problem. Nonlinear trajectories of fluid particles and the expression for transfer velocity in a low-viscosity Stokes fluid have been defined.

Keywords: nonlinear surface waves, viscous dissipation, dispersion relations.

Mathematical Subject Classifications: 76D33, 35Q30

Баринов Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет. 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10. E-mail: vbarinov@utmn.ru

Басинский Константин Юрьевич, аспирант, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет. 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10. E-mail: kbasinsky@mail.ru