ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 2

УДК 517.977.1

© *В. Н. Ушаков, А. А. Зимовец*

ДЕФЕКТ ИНВАРИАНТНОСТИ МНОЖЕСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

Рассматривается дифференциальное включение, порожденное управляемой системой на конечном промежутке времени. Исследуется свойство инвариантности множеств, содержащихся в пространстве позиций системы, относительно дифференциального включения. Введено понятие дефекта инвариантности относительно дифференциального включения для множества, не обладающего свойством инвариантности. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, гамильтониан, инвариантность, дефект инвариантности.

Введение

Работа посвящена исследованию свойства инвариантности множеств в пространстве позиций относительно дифференциального включения. Исследование свойства инвариантности (в различных его вариантах) — одна из ключевых тем в теории управления; ей посвящено значительное число работ (см., например, [1–11]). Оно тесно связано с понятиями множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем и дифференциальных включений. Интегральные воронки управляемых систем, выраженные в обратном времени (рассматриваем системы на конечном промежутке времени), представляют собой множества управляемости этих систем, записанных в обратном времени. Поскольку множества управляемости слабо инвариантны относительно систем, записанных в обратном времени, то видим, что свойство инвариантности находится в тесной связи со свойством слабой инвариантности и, следовательно, — с весьма важными задачами о наведении управляемой системы на целевое множество.

Настоящая работа посвящена некоторому расширению понятия инвариантности, связанному с рассмотрением в пространстве позиций динамической системы не только инвариантных множеств, но и множеств, не обладающих свойством инвариантности. Для осуществления такого расширения оказалось удобным применение инфинитезимальных представлений свойства инвариантности; эти представления выражены в работе в виде производных множеств многозначных отображений. Суть расширения заключается в том, что для заданного замкнутого множества в пространстве позиций динамической системы вводится некоторая числовая характеристика — неотрицательная функция, заданная на границе этого множества. Эта функция оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности.

Работа дополняет исследования по дефекту стабильности в позиционных дифференциальных играх [12–15].

§ 1. Инвариантные множества относительно дифференциального включения

Пусть задана управляемая система на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in P. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11–01–00427, программы президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» регионального гранта РФФИ/ПСО № 07–0196085.

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — вектор управляющих воздействий, P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагается, что выполнены следующие условия

Условие 1. Функция $f(t,x,u)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t,x,u), и для любой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ существует такая постоянная $L=L(\mathcal{D})\in(0,\infty)$, что

$$\begin{gathered}\left\|f\left(t,x^{(1)},u\right)-f\left(t,x^{(2)},u\right)\right\|\leqslant L\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,\\ \left(t,x^{(i)},u\right)\in\mathcal{D}\times P,\quad i=1,2.\end{gathered}\tag{1.2}$$

Условие 2. Существует такая постоянная $\mu\in(0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u)\|\leqslant\mu(1+\|x\|),\quad(t,x,u)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P.\tag{1.3}$$

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Поставим в соответствие системе (1.1) дифференциальное включение (д. в.) на $[t_0,\vartheta]$

$$\dot{x}\in F(t,x),\quad x[t_0]=x_0,\tag{1.4}$$

где $F(t,x)=\operatorname{co}\bigl\{f(t,x,u)\colon u\in P\bigr\}$, $(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$; $\operatorname{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

Множества достижимости $X(t;t_0,x_0)$ системы (1.1) и $Y(t;t_0,x_0)$ д. в. (1.4), как известно, связаны соотношением

$$Y(t;t_0,x_0)=\operatorname{cl}X(t;t_0,x_0),\quad t\in[t_0,\vartheta],\tag{1.5}$$

где $\operatorname{cl}X$ — замыкание множества X в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим некоторый компакт $W\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, для которого $W(t)=\bigl\{x\in\mathbb{R}^m\colon(t,x)\in W\bigr\}\neq\varnothing$, $t\in[t_0,\vartheta]$. Исследуем его на предмет инвариантности относительно д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$. Поскольку компакт W выбран достаточно произвольно, то может оказаться, что W неинвариантен относительно д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$. В таком случае введем неотрицательную числовую характеристику, представляющую собой некоторую меру неинвариантности W относительно д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$.

Проведем предварительные построения.

Полагаем $Z=[t_0,\vartheta]\times B(0;\gamma)$ — цилиндр в $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ такой, что $W\subset Z$; здесь $B(0;\gamma)=\{b\in\mathbb{R}^m\colon\|b\|\leqslant\gamma\}$.

Погрузим Z в замкнутую область $D=\bigl\{(t,x)\colon t\in[t_0,\vartheta],x\in B(0;\gamma(t))\bigr\}$, $\gamma(t)=\bigl(\gamma+\mu(t-t_0)\bigr)e^{\mu(t-t_0)}$. D есть интегральная воронка д. в. $\dot{x}\in U(x)$ с начальным множеством $D(t_0)=B(0;\gamma)$; здесь $U(x)=B\bigl(0;\mu\bigl(1+\|x\|\bigr)\bigr)$.

Так как по условию 2 справедливо $F(x)\subset U(x)$ при $(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, то все решения $x(t)$ д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$, $x(t_*)=x_*\in Z(t_*)$ удовлетворяют включению $\bigl(t,x(t)\bigr)\in D$ на $[t_*,\vartheta]$.

Поскольку $W\subset Z$, то и все решения $x(t)$ д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$, $x(t_*)=x_*\in W(t_*)$, удовлетворяют включению $\bigl(t,x(t)\bigr)\in D$ на $[t_*,\vartheta]$.

Полагаем $Z(t_*,x_*)$ — интегральная воронка д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$, $x(t_*)=x_*$ на $[t_*,\vartheta]$. Уточним определение множества $Z(t_*,x_*)$.

Определение 1. $Z(t_*,x_*)$ есть множество всех точек $(t^*,x^*)\in D$, $t_*\leqslant t^*\leqslant\vartheta$, для которых существуют решения $x(t)$ д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$, $x\left(t_*\right)=x_*$, удовлетворяющие равенству $x(t^*)=x^*$.

Приведем определение инвариантности множества $\mathcal{W}\subset D$ относительно д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$.

Определение 2. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, если

$$Z(t_*,x_*) \subset \mathcal{W}, \quad (t_*,x_*) \in \mathcal{W}. \tag{1.6}$$

Приведем инфинитезимальную формулировку инвариантности множества $\mathcal{W}$, предварительно введя обозначение $\overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*,x_*) = \Big\{ d \in \mathbb{R}^m \colon d = \lim\limits_{k\to\infty} (t_k - t)^{-1}(w_k - x_*), \ \big\{(t_k,w_k)\big\}$ — последовательность в $\mathcal{W}$, где $t_k \downarrow t_*$ при $k \to \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = x_* \Big\}$, $(t_*,x_*) \in \mathcal{W}$, $t_* \in [t_0,\vartheta)$.

Обозначив $\mathcal{Z} = Z(t_*,x_*)$, $(t_*,x_*) \in D$, $t_* \in [t_0,\vartheta)$, получим $\overrightarrow{D}\mathcal{Z}(t_*,x_*) = F(t_*,x_*)$.

Теперь определение 2 представим в виде

Определение 3. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, если

$$\overrightarrow{D}\mathcal{Z}(t_*,x_*) \subset \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*,x_*), \quad (t_*,x_*) \in \mathcal{W}, \quad t_* \in [t_0,\vartheta). \tag{1.7}$$

Включение (1.7) представимо в виде

$$F(t_*,x_*) \subset \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*,x_*). \tag{1.8}$$

Полагаем $G = B(0;R)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в 0 и радиуса R, для которого $F(t,x) \subset G$, $(t,x) \in D$.

В случае, если $\mathcal{W}$ инвариантно относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, то из (1.8) следует

$$G \cap \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*,x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*,x_*) \in \mathcal{W}, \quad t_* \in [t_0,\vartheta). \tag{1.9}$$

§ 2. Дефект инвариантности множества относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$

В этом параграфе рассматриваем множество W из параграфа 1. Для него приведем определение дефекта инвариантности относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$.

Предполагаем, что в дополнение к условию $W(t) \neq \varnothing$, $t \in [t_0,\vartheta]$, выполнено

Условие 3. $d\big(W(t_*),W(t^*)\big) \leqslant R(t^* - t_*), \quad (t_*,t^*) \in \Delta.$

Здесь $d\big(W(t_*),W(t^*)\big)$ — хаусдорфово расстояние между компактами W_* и W^* в $\mathbb{R}^m$, $\Delta = \big\{(t_*,t^*) \colon t_0 \leqslant t_* \leqslant t^* \leqslant \vartheta\big\} \subset [t_0,\vartheta] \times [t_0,\vartheta]$.

Считаем, не нарушая общности, что R — та же самая константа, что и в параграфе 1. Условие 3, означающее, что отображение $t \mapsto W(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$ — липшицево с константой Липшица R, не слишком ограничительно для W. Из него выводится, что W удовлетворяет соотношению

$$G \cap \overrightarrow{D}W(t_*,x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*,x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0,\vartheta]. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) аналогично условию (1.9), которому удовлетворяет инвариантное множество $\mathcal{W}$.

Представляет интерес вопрос о том, в какой степени множество W не является инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$. Иными словами, спрашивается: в какой степени W не удовлетворяет определению 3?

Для аккуратной формализации этого вопроса и ответа на него введем понятие дефекта инвариантности множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$.

А именно, сопоставим каждой точке $(t_*,x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0,\vartheta)$ число

$$\varepsilon(t_*,x_*) = h\Big(F(t_*,x_*), \overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\Big) \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где

$$h\big(F(t_*,x_*),\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\big)=\max_{f\in F(t_*,x_*)}\rho\big(f,\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\big),\quad \rho\big(f,\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\big)=\min_{d\in\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)}\|f-d\|$$

есть расстояние от f до замкнутого множества $\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)$.

Заметим, что множество $\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)$, входящее в выражение (2.2), далеко не для всякой точки $(t_*,x_*)\in\partial W$ является компактом в $\mathbb{R}^m$. Однако для последующих рассуждений желательно и удобно, чтобы это множество было компактом. В связи с этим мы подменим $\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)$ более узким множеством — компактом в $\mathbb{R}^m$, сохраняя при этом значение $\varepsilon(t_*,x_*)$. А именно, введем множество (см. рис. 1)

$$\overrightarrow{D}^cW(t_*,x_*)=\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\cap B(0;3R).$$

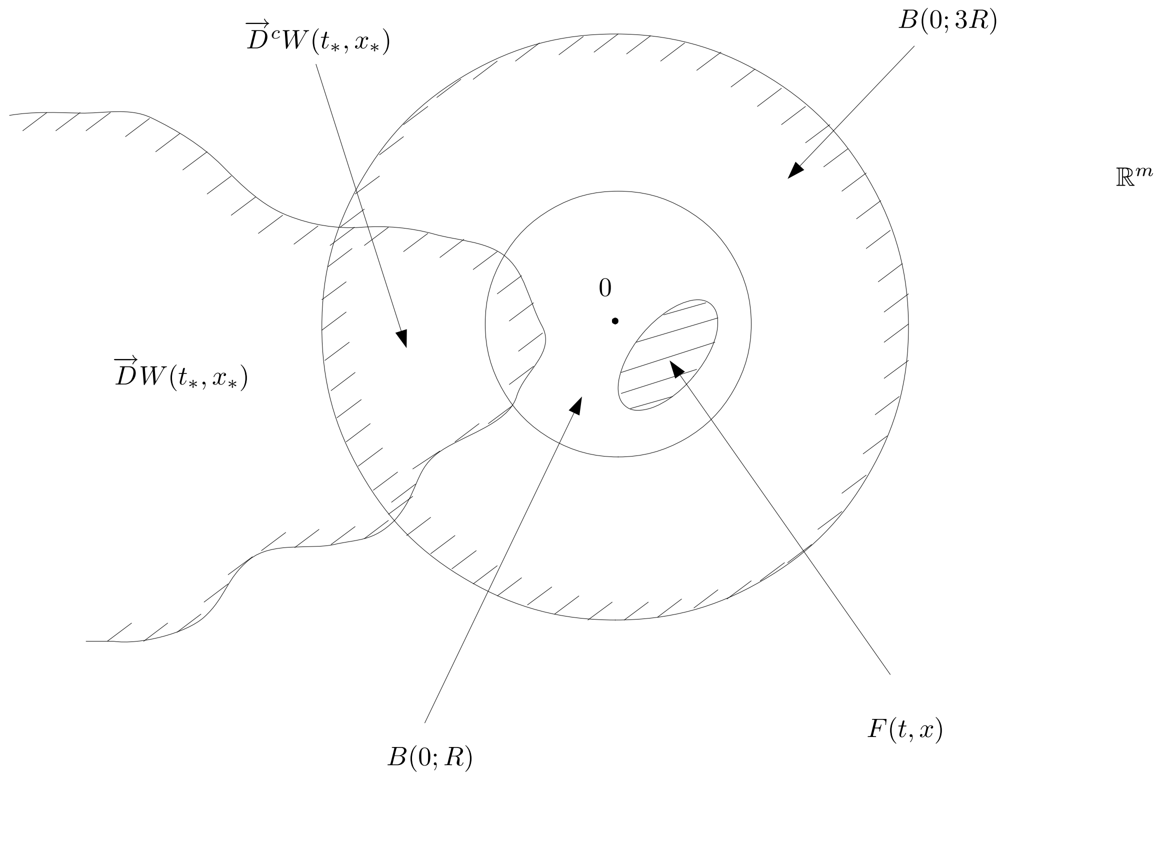

Рис. 1.

По определению числа R имеем, что $F(t_*,x_*)\subset B(0;R)$ удовлетворяет соотношению (2.1). Отсюда следует, что для любого $f\in F(t_*,x_*)$, $(t_*,x_*)\in\partial W$, $t_*\in[t_0,\vartheta)$ выполняется

$$\rho\big(f,\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\big)\leqslant 2R. \tag{2.3}$$

Обозначим $\operatorname{int}B(0;3R)$ — внутренность шара $B(0;3R)$ в $\mathbb{R}^m$.

Учитывая (2.3) и неравенство

$$\rho\big(f,\overrightarrow{D}W(t_*,x_*)\setminus\operatorname{int}B(0;3R)\big)\geqslant 2R,$$

получаем для любого $f \in F(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$,

$$\rho\big(f, \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)\big) = \rho\big(f, \overrightarrow{D}^c W(t_*, x_*).$$

Значит, справедливо равенство

$$h\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)\big) = h\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}^c W(t_*, x_*)\big); \tag{2.4}$$

здесь $h\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}^c W(t_*, x_*)\big)$ — хаусдорфово отклонение компакта $F(t_*, x_*)$ от компакта $\overrightarrow{D}^c W(t_*, x_*)$.

Тем самым показали, что величину $\varepsilon(t_*, x_*)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}\varepsilon(t_*, x_*) = h\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}^c W(t_*, x_*)\big) \geqslant 0,\\ (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Будем говорить, что в этом смысле мы компактифицировали множество $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$.

Далее полагаем при $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*); \tag{2.6}$$

здесь $\Lambda(t_*) = \partial W \cap \Gamma_{t_*}$, $\Gamma_{t_*} = \big\{(t, x)\colon t = t_*\big\}$.

Величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом инвариантности* множества W в момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$ относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. Функцию $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta)$ доопределим значением $\varepsilon(\vartheta) = 0$. Функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ представляет собой некоторую характеристику неинвариантности множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Если оказалось, что множество W инвариантно относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, то

$$F(t_*, x_*) \subset \overrightarrow{D}^c W(t_*, x_*), \quad (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует равенство $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, и вместе с ним равенство $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$. Обратно, из равенства $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$ следует (2.7).

Вместе с тем мы показали, что инвариантность множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$ эквивалентна равенству $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$.

Этот факт подводит нас к предположению о том, что в случае, когда множеству W соответствует малая на промежутке $[t_0, \vartheta]$ функция $\varepsilon(t)$, это множество можно погрузить в некоторое множество $\mathcal{W}$, обладающее свойством инвариантности относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$ и не сильно отличающееся от W (в хаусдорфовой метрике).

Ниже мы приводим обоснование этого предположения при дополнительных условиях на W.

Условие 4. Существует такая функция $\varphi^*(\delta) \geqslant 0$ на $(0, \vartheta - t_0)$ ($\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$\begin{gathered}h\big(x_* + \delta \overrightarrow{D}^c(t_*, x_*), W(t_* + \delta)\big) \leqslant \delta \varphi^*(\delta),\\ (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta), \quad \delta \in (0, \vartheta - t_*).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Условие 5. Функция $\varepsilon(t)$ измерима по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{W} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m\colon \mathcal{W}(t) = W(t) + B\big(0; \varkappa(t)\big)$, $\varkappa(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau$, $t \in [t_0, \vartheta]$, где $\varkappa(t)$ — интеграл Лебега.

Здесь и выше обозначено: $x_* + \delta \overrightarrow{D}^c(t_*, x_*) = \big\{x_* + \delta d\colon d \in \overrightarrow{D}^c(t_*, x_*)\big\}$, $W(t) + B\big(0, \varkappa(t)\big)$ — замкнутая $\varkappa(t)$-окрестность множества $W(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Величину $\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(t-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau$ назовем дефектом инвариантности множества W.

Замечание 1. В формуле для дефекта инвариантности ε_W вместо константы Липшица L можно взять константу Липшица $L(\tau)$ ($L(\tau) \leqslant L$ при $\tau \in [t_0, \vartheta]$) по переменной x вектор-функции $f(t,x,u)$ в множестве $\mathcal{D}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon (\tau, x) \in \mathcal{D}\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$. Считаем при этом, что $L(\tau)$ — интегрируемая функция на $[t_0, \vartheta]$. Так что с учетом этого замечания дефект инвариантности множества W примет вид

$$\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(\tau)(t-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

В ряде случаев подмена в формуле для ε_W константы L функцией $L(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ значительно улучшает величину ε_W.

Сформулируем и докажем основное утверждение этой работы.

Теорема 1. *Пусть замкнутое множество $W \subset D$ таково, что $W(t) \neq \varnothing$ при $t \in [t_0, \vartheta]$ и выполнены условия 3, 4, 5. Тогда $\mathcal{W}$ — инвариантное множество относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$ на $[t_0, \vartheta]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное утверждению теоремы 1: для некоторых $(\tau_*, t^*) \in \Delta$, $(\tau_*, w_*) \in \partial\mathcal{W}$ выполняется соотношение (см. рис. 2)

$$Y(t^*; \tau_*, w_*) \not\subset \mathcal{W}(t^*). \tag{2.9}$$

По определению пары (τ_*, t^*) следует, что $[\tau_*, t^*]$ — невырожденный отрезок, то есть $\tau_* < t^*$.

Соотношение (2.9) означает, что для некоторого решения $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $t \in [\tau_*, t^*]$, $x(\tau_*) = w_*$ выполняется соотношение

$$x(t^*) \notin \mathcal{W}(t^*). \tag{2.10}$$

Положив $H = \{(t, x(t)) \colon t \in [\tau_*, t^*]\}$, получаем, что $\mathcal{W} \cap H$ — непустой компакт в D. Множество $\Omega = \mathrm{pr_t}(\mathcal{W} \cap H)$ — ортогональная проекция множества $\mathcal{W} \cap H$ на ось t — компакт, содержащийся в $[\tau_*, t^*]$. Учитывая (2.10), получаем $t_* = \max\limits_{t \in \Omega} t < t^*$.

Рассмотрим отрезок $[t_*, t^*]$, для которого имеем

$$\begin{gathered} x_* = x(t_*) \in \mathcal{W}(t_*), \\ x(t) \notin \mathcal{W}(t), \quad t \in (t_*, t^*]. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Из (2.11) и непрерывности вектор-функции $x(t)$ на $[t_*, t^*]$ следует, что точка x_* удовлетворяет включению $x_* \in \partial\mathcal{W}(t_*)$.

Итак, предположив противное утверждению теоремы 1, получаем, что найдутся такие $(t_*, t^*) \in \Delta$, $(t_*, x_*) \in \partial\mathcal{W}$, для которых

$$x(t) \notin \mathcal{W}(t), \quad t \in (t_*, t^*]. \tag{2.12}$$

Введем функцию расстояния $\rho(t) = \rho\big(x(t), W(t)\big)$ от точки $x(t)$ до множества $W(t)$ на промежутке $[t_*, t^*]$. Для нее имеем в силу (2.12) $\rho(t_*) = \varkappa(t_*)$, $\rho(t) > \varkappa(t)$ при $t \in (t_*, t^*]$.

Так как отображения $t \mapsto \{x(t)\}$ и $t \mapsto W(t)$ липшицевы на $[t_*, t^*]$ (в хаусдорфовой метрике), то функция $\rho(t)$ липшицева, и, значит, существует почти всюду на $[t_*, t^*]$ производная $\dot{\rho}(t)$.

Пусть η_* — произвольная точка из (t_*, t^*), в которой существует производная $\dot{\rho}(\eta_*)$, а y_* — ближайшая к $z_* = x(\eta_*)$ точка на множестве $W(\eta_*)$.

Так как $\eta_* \in (t_*, t^*)$ и $z_* \notin W(\eta_*)$, то $y_* \in \partial W(\eta_*)$ (см. рис. 3).

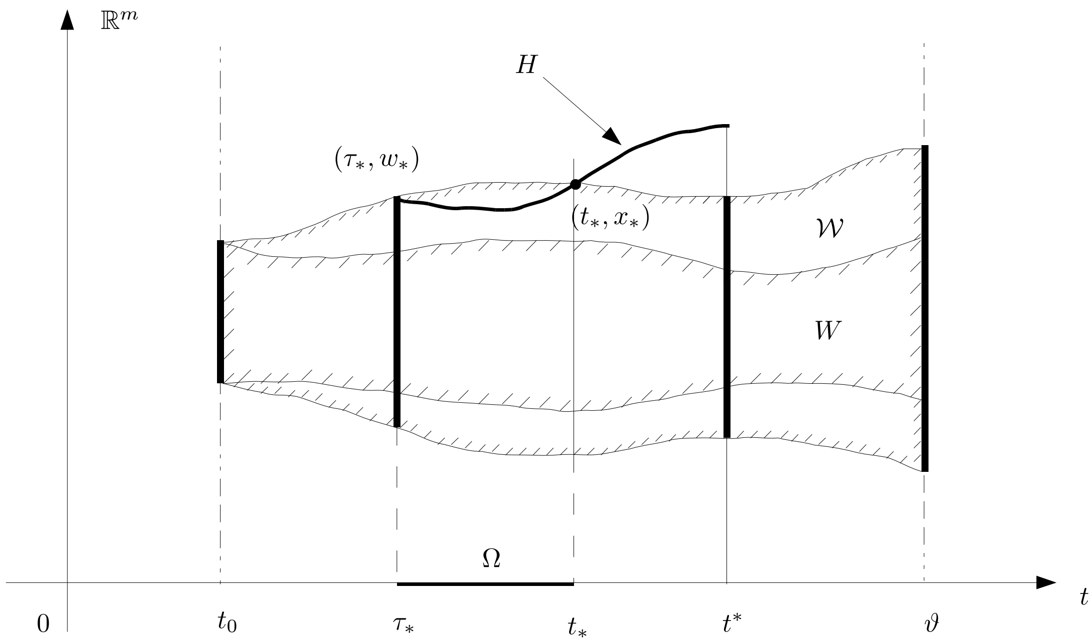
$\mathbb{R}^m$
H
(τ_*, w_*)
(t_*, x_*)
$\mathcal{W}$
W
Ω
0
t_0
τ_*
t_*
t^*
ϑ
t

Рис. 2.

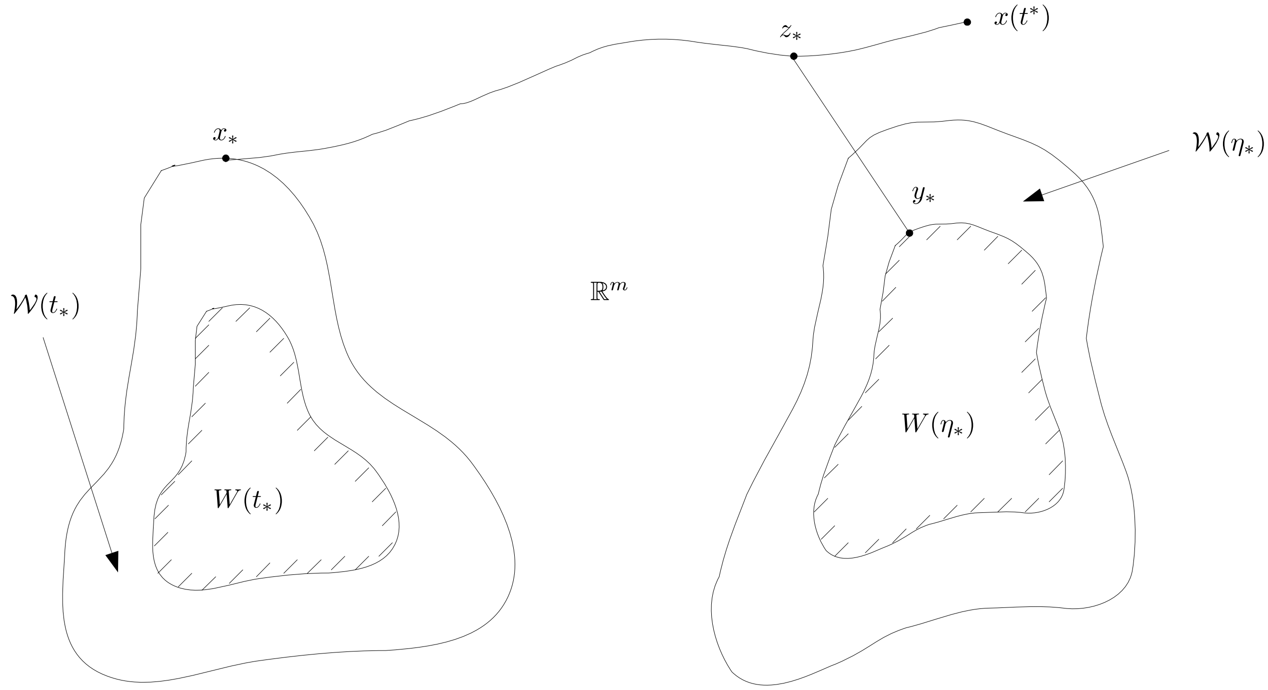
z_*
$x(t^*)$
x_*
$\mathcal{W}(\eta_*)$
y_*
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{W}(t_*)$
$W(\eta_*)$
$W(t_*)$

Рис. 3.

Рассмотрим точку $(\eta_*, y_*) \in \partial W.$ Очевидно, что многозначное отображение $(t,x) \mapsto F(t,x)$ на выделенной нами в параграфе 1 области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ имеет ту же константу Липшица $L = L(D),$ что и вектор-функция $f(t,x,u)$:

$$d\big(F(t,x^{(1)}), F(t,x^{(2)})\big) \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t,x^{(1)}) \text{ и } (t,x^{(2)}) \text{ из } D. \tag{2.13}$$

Полагаем $f_* = \dot{x}(\eta_*) \in F(\eta_*, z_*).$ Так как выполняется $d\big(F(\eta_*, z_*), F(\eta_*, y_*)\big) \leqslant L\|z_* - y_*\|,$ то для вектора f_* найдется вектор $f \in F(\eta_*, y_*)$ такой, что

$$\|f - f_*\| \leqslant L\|y_* - z_*\|. \tag{2.14}$$

Согласно определению дефекта множества W в точке $(\eta_*, y_*) \in \partial W,$ вектор $f \in F(\eta_*, y_*)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho\big(f, \overrightarrow{D}^c W(\eta_*, y_*)\big) \leqslant h\big(F(\eta_*, y_*), \overrightarrow{D}^c W(\eta_*, y_*)\big) = \varepsilon(\eta_*, y_*). \tag{2.15}$$

Пусть $d \in \overrightarrow{D}^c W(\eta_*, y_*)$ — один из векторов, на которых

$$\|f - d\| \leqslant \varepsilon(\eta_*, y_*). \tag{2.16}$$

Так как $d \in \overrightarrow{D}^c W(\eta_*, y_*),$ то найдутся такие последовательности $\{\delta_k\}$ ($\delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$) и $\big\{y^*(\eta_* + \delta_k)\big\},$ $y^*(\eta_* + \delta_k) \in W(\eta_* + \delta_k),$ $k = 1, 2, \ldots,$ которые удовлетворяет равенству

$$y^*(\eta_* + \delta_k) = y_* + \delta_k d + \delta_k \varphi^*(\delta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.17}$$

где функция $\varphi^*(\delta_k)$ определяется в условии 4.

Последовательность $\{\delta_k\}$ порождает последовательность $\big\{z_* + \delta_k f_*\big\}$ (см. рис. 4).

По определению вектора f_* имеем

$$x(\eta_* + \delta_k) = x(\eta_*) + \delta_k f_* + h(\delta_k), \tag{2.18}$$

где $\|h(\delta_k)\| = \omega(\delta_k)$ удовлетворяет предельному соотношению $\delta_k^{-1}\omega(\delta_k) \to 0$ при $\delta_k \downarrow 0.$

Из соотношений (2.14)–(2.18) следуют неравенства

$$\begin{gathered}
\big\|x(\eta_* + \delta_k) - (z_* + \delta_k f_*)\big\| \leqslant \omega(\delta_k), \\
\big\|(z_* + \delta_k f_*) - (y_* + \delta_k f)\big\| \leqslant (1 + L\delta_k)\|z_* - y_*\|, \\
\big\|(y_* + \delta_k f) - (y_* + \delta_k d)\big\| \leqslant \delta_k \varepsilon(\eta_*, y_*), \\
\big\|(y_* + \delta_k d) - y^*(\eta_* + \delta_k)\big\| \leqslant \delta_k \varphi^*(\delta_k).
\end{gathered} \tag{2.19}$$

Суммируя неравенства (2.19), приходим к следующей оценке для функции $\rho(t)$:

$$\begin{gathered}
\rho(\eta_* + \delta_k) = \rho\big(x(\eta_* + \delta_k), W(\eta_* + \delta_k)\big) \\
\leqslant \big\|x(\eta_* + \delta_k) - y^*(\eta_* + \delta_k)\big\| \\
\leqslant \omega(\delta_k) + (1 + \delta_k L)\|z_* - y_*\| + \delta_k \varepsilon(\eta_*) + \delta_k \varphi^*(\delta_k), \\
k = 1, 2, \ldots\ .
\end{gathered} \tag{2.20}$$

Принимая во внимание (2.20) и равенство $\rho(\eta_*) = \|z_* - y_*\|,$ получаем

$$\delta_k^{-1}\big(\rho(\eta_* + \delta_k) - \rho(\eta_*)\big) \leqslant L\rho(\eta_*) + \varepsilon(\eta_*) + \delta_k^{-1}\omega(\delta_k) + \varphi^*(\delta_k), \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

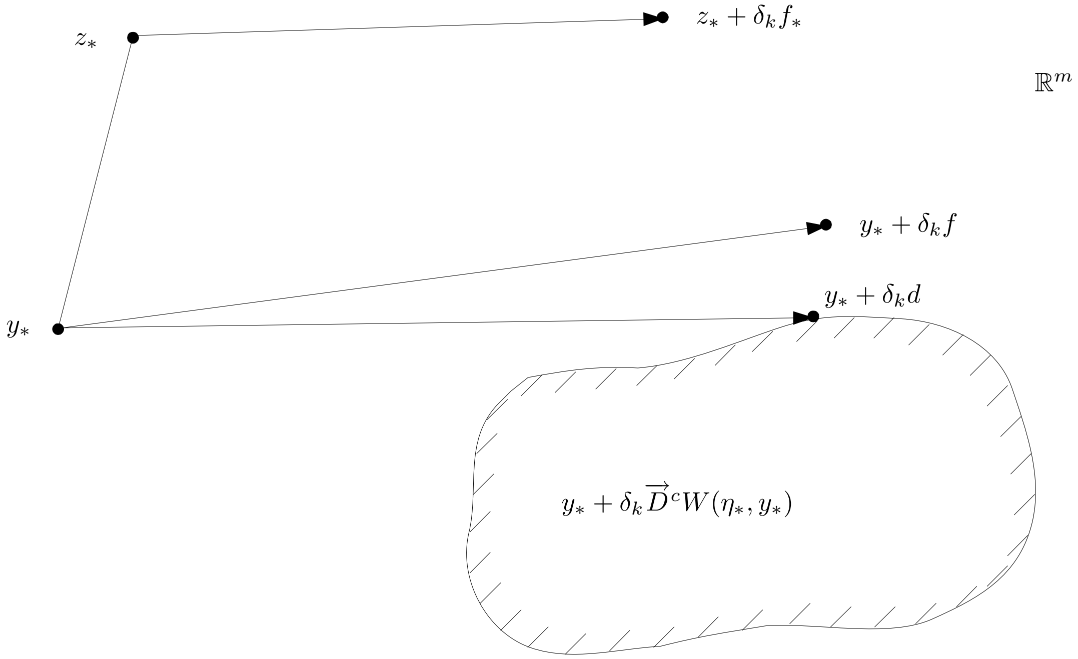

Рис. 4.

Из этого неравенства вытекает, что для любой точки $\eta_* \in (t_*, t^*)$, в которой существует производная $\dot{\rho}(\eta_*)$ функции $\rho(t)$, справедлива оценка

$$\dot{\rho}(\eta_*) \leqslant L\rho(\eta_*) + \varepsilon(\eta_*). \tag{2.21}$$

Из оценки (2.21), имеющей место при почти всех $\eta_* \in [t_*, t^*]$, вытекает неравенство

$$\rho(t) \leqslant e^{L(t-t_*)}\rho(t_*) + \int_{t_*}^{t} e^{L(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\,d\tau, \quad t \in [t_*, t^*]. \tag{2.22}$$

Подставив в (2.22) величину $\rho(t_*) = \varkappa(t_*) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_*} e^{L(t_*-\tau)}\varepsilon(\tau)\,d\tau$, получаем, что $\rho(t) \leqslant \varkappa(t)$ при $t \in [t_*, t^*]$. Это неравенство противоречит неравенству $\rho(t) > \varkappa(t)$, $t \in (t_*, t^*]$, вытекающему из предположения от противного.

Теорема 1 доказана. □

§ 3. Примеры множеств W, удовлетворяющих условиям 3, 4, 5

Пусть в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ задан компакт

$$W = \big\{(t, x) \in D \colon \varphi(t, x) \leqslant 0\big\}, \tag{3.1}$$

где функция $\varphi(t, x)$ определена и непрерывна вместе с производными $\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$. Предполагаем, что $W \subset \operatorname{int} D$ и выполняется

$$\begin{gathered} h(t_*, x_*) = \mathrm{grad_x}\,\varphi(t_*, x_*) \neq 0, \\ (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $\operatorname{grad}_x \varphi(t_*, x_*) = \left(\dfrac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial x_m}\right)$, $\partial W = \big\{(t_*, x_*) \in D\colon \varphi(t_*, x_*) = 0\big\}$.

В работе [15] было установлено, что множество W при таких условиях удовлетворяет условиям 3, 4.

Докажем выполнение в рассматриваемом случае условия 5, налагаемого на функцию $\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Выпишем аналитическое выражение для функции $\varepsilon(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$.

Учитывая, что множество W имеет гладкую границу ∂W, получаем, что $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$ есть замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^m$:

$$\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) = \left\{d \in \mathbb{R}^m\colon \langle h(t_*, x_*), d\rangle \leqslant -\frac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial t}\right\}.$$

Граница $\Gamma_* = \partial\overrightarrow{W}(t_*, x_*)$ множества $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$ имеет вид

$$\Gamma_* = \left\{d \in \mathbb{R}^m\colon \langle h(t_*, x_*), d\rangle = -\frac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial t}\right\}.$$

Γ_* есть гиперплоскость в $\mathbb{R}^m$ с вектором нормали $h(t_*, x_*)$.

Принимая во внимание, что $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$ имеет хорошую геометрическую структуру, воспользуемся в формуле для $\varepsilon(t_*, x_*)$ представлением через $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$, а не через $\overrightarrow{D}^cW(t_*, x_*)$:

$$\varepsilon(t_*, x_*) = h\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)\big). \tag{3.3}$$

Для каждой точки $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ возможны два случая: 1. $\varepsilon(t_*, x_*) > 0$; 2. $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$.

Допустим, что реализовался случай 1. Это означает, что $F(t_*, x_*) \not\subset \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$. При этом возможны два варианта взаимного расположения $F(t_*, x_*)$ и $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$ (см. рис. 5)

В любом из этих вариантов справедливо равенство

$$\varepsilon(t_*, x_*) = h_{F(t_*, x_*)}(l_*) - h_{\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)}(l_*);$$

здесь $l_* = \|h(t_*, x_*)\|^{-1} h(t_*, x_*)$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^m$; $h_\Phi(l) = \sup\limits_{f \in \Phi}\langle l, f\rangle$, $l \in \mathbb{R}^m$ — опорная функция выпуклого и замкнутого множества Φ в $\mathbb{R}^m$.

Тогда, согласно определению $F(t_*, x_*)$ и $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$, имеем

$$\varepsilon(t_*, x_*) = H(t_*, x_*, l_*) + \|h(t_*, x_*)\|^{-1}\frac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial t},$$

где $H(t_*, x_*, l_*) = \max\limits_{u \in P}\langle l_*, f(t_*, x_*, u)\rangle$ — гамильтониан управляемой системы (1.1), порождающей д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. Таким образом, случай 1 характеризуется неравенством

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \|h(t_*, x_*)\|^{-1}\left\{H\big(t_*, x_*, h(t_*, x_*)\big) + \frac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial t}\right\} > 0. \tag{3.4}$$

В случае 2 выполняется включение $F(t_*, x_*) \subset \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$, которое эквивалентно соотношению

$$\|h(t_*, x_*)\|^{-1}\left\{H\big(t_*, x_*, h(t_*, x_*)\big) + \frac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial t}\right\} \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma(t_*, x_*) = \|h(t_*, x_*)\|^{-1}\left\{H\big(t_*, x_*, h(t_*, x_*)\big) + \frac{\partial\varphi(t_*, x_*)}{\partial t}\right\}.$$

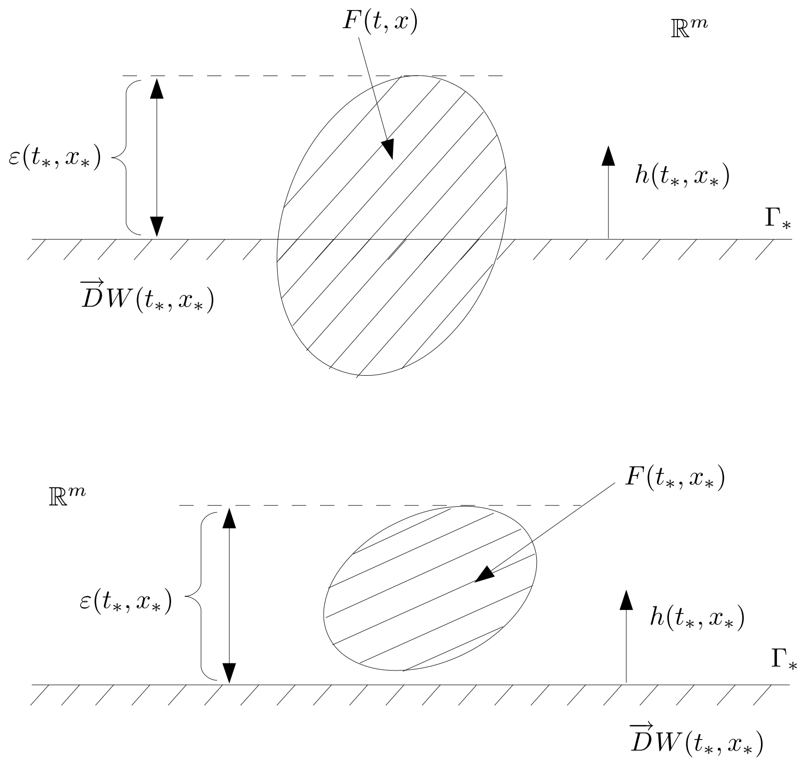

Рис. 5.

В итоге получаем, что в рассматриваемом примере дефект инвариантности множества W в точке $(t_*,x_*)\in\partial W$ относительно д. в. $\dot{x}\in F(t,x)$ определяется равенством

$$\varepsilon(t_*,x_*)=\max\bigl\{0,\gamma(t_*,x_*)\bigr\}. \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что при $t_*\in[t_0,\vartheta)$ справедливо представление

$$\begin{aligned}\varepsilon(t_*)&=\max_{(t_*,x_*)\in\Lambda(t_*)}\varepsilon(t_*,x_*)=\max\bigl\{0,\gamma(t_*)\bigr\},\\ \gamma(t_*)&=\max_{(t_*,x_*)\in\Lambda(t_*)}\gamma(t_*,x_*).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Принимая во внимание условия, наложенные на функцию $\gamma(t,x)$, получаем, что функция $\gamma(t_*,x_*)$ непрерывна на ∂W. Кроме того, множество $\Lambda(t_*)$ непрерывно зависит в хаусдорфовой метрике от t_* на $[t_0,\vartheta)$. Поэтому функция $\gamma(t)$, а значит, и функция $\varepsilon(t)$ непрерывны на $[t_0,\vartheta)$. Следовательно, выполняется условие 5 в рассматриваемом случае.

Проиллюстрируем изложенную выше теорию на следующем примере управляемой системы на плоскости.

Управляемая система имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x_1}=-0.25x_2+0.5u_1+\varepsilon\frac{x_1}{\|x\|}|\sin 5t|\sin x_1\sin x_2,\\ \dot{x_2}=0.25x_1+0.5u_2+\varepsilon\frac{x_2}{\|x\|}|\sin 5t|\sin x_1\sin x_2,\end{cases} \tag{3.8}$$

$$u\in P=\bigl\{u=(u_1,u_2)\colon\|u\|\leqslant 1\bigr\};$$

здесь $[t_0,\vartheta]=[0,10]$, $\varepsilon=0.2$.

Наряду с системой (3.8) рассмотрим на промежутке $[0,10]$ огрубленную систему

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -0.25x_2 + 0.5u_1, \\ \dot{x_2} = 0.25x_1 + 0.5u_2. \end{cases} \tag{3.9}$$

Нас интересуют интегральные воронки $Z = Z(t_0, X_0)$ и $W = \mathcal{Z}(t_0, X_0)$ систем (3.8) и (3.9) соответственно на промежутке $[0,10]$ с начальным множеством $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\| \leqslant 1\}$.

Нас интересует вопрос о том, насколько сильно может выступать интегральная воронка Z за пределы интегральной воронки W. Иными словами, спрашивается, насколько велико значение $h\big(Z(t), W(t)\big)$ на $[t_0, \vartheta] = [0,10]$?

Здесь $Z(t)$ и $W(t)$ — сечения (множества в $\mathbb{R}^2$) интегральных воронок Z и W в момент $t \in [0,10]$, $h\big(Z(t), W(t)\big)$ — хаусдорфово отклонение множества $Z(t)$ от $W(t)$.

Очевидно, что множество $W \subset [0,10] \times \mathbb{R}^2$ описывается неравенством

$$W = \big\{(t,x) \in [0,10] \times \mathbb{R}^2\colon \varphi(t,x) \leqslant 0\big\},$$

где $\varphi(t,x) = \|x\| - \frac{1}{2}t - 1$, $(t,x) \in \mathbb{R}^3$.

Для получения оценки сверху величины $h\big(Z(t), W(t)\big)$ вычислим величину $\varkappa(t)$ на $[0,10]$. Для этого вычислим сначала $\varepsilon(t,x)$ в точках (t,x) множества $\partial W = \big\{(t,x) \in [0,10) \times \mathbb{R}^2\colon \varphi(t,x) = 0\big\}$.

Для функции $\varphi(t,x)$ имеем при $\|x\| \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\|x\|}, \quad \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\|x\|}, \quad \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{1}{2},$$

так что $h(t,x) = \|x\|^{-1}x$ и $\|h(t,x)\| = 1$ для точек $(t,x) \in \partial W$, при этом $\overrightarrow{D}W(t,x) = \big\{d \in \mathbb{R}^2\colon \langle h(t,x), d\rangle \leqslant -\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}$.

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\varepsilon(t,x) = H\big(t,x,h(t,x)\big) + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}$$

в тех точках $(t,x) \in \partial W$, в которых $H\big(t,x,h(t,x)\big) + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} > 0$; здесь $H\big(t,x,h(t,x)\big) = \max\limits_{u \in P}\langle h(t,x), f(t,x,u)\rangle = \frac{1}{2} + \varepsilon|\sin 5t|\sin x_1 \sin x_2$, вектор-функция $f(t,x,u)$ — правая часть системы (3.8).

В тех точках $(t,x) \in \partial W$, в которых $H\big(t,x,h(t,x)\big) + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} \leqslant 0$, полагаем $\varepsilon(t,x) = 0$.

Таким образом, справедливо представление

$$\varepsilon(t,x) = \max\left(0, H\big(t,x,h(t,x)\big) + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}\right) = \max\big(0, \varepsilon|\sin 5t|\sin x_1 \sin x_2\big).$$

Введя обозначения $\gamma(t,x) = \varepsilon|\sin 5t|\sin x_1 \sin x_2$ и $\gamma(t) = \max\limits_{(t,x)\in\Lambda(t)} \gamma(t,x)$, где $\Lambda(t) = \big\{(t,x)\colon \varphi(t,x) = 0\big\}$, $t \in [0,10)$, получаем

$$\varepsilon(t) = \max\big(0, \gamma(t)\big), \quad t \in [0,10)$$

и функцию

$$\varkappa(t) = \int_0^t e^{L(\tau)(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,10]. \tag{3.10}$$

Этот интеграл мы вычисляем приближенно. На рисунках 6 и 7 представлены графики функций $\varepsilon(t)$ и $\varkappa(t)$ на $[0,10]$.

Согласно теории имеем $Z(t) \subset W(t) + B\big(0; \varkappa(t)\big)$, $t \in [0,10]$, то есть $h\big(Z(t), W(t)\big) \leqslant \varkappa(t)$ на $[0,10]$.

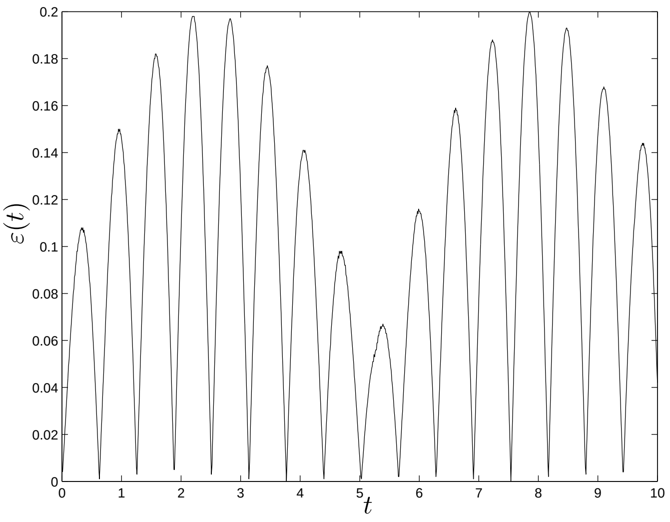

Рис. 6.

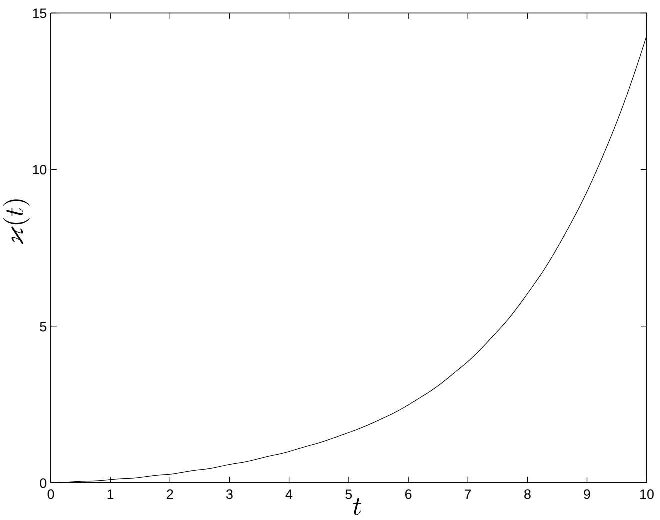

Рис. 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzhanski A. B., Filippova T. F. On the set-valued calculus in problems of viability and control for dynamic processes: the evolution equation // Les Annales de l'Institut Henry Poincare. Analyse non-lineare. — 1989. — P. 339–363.
2. Kurzhanski A. B., Filippova T. F. Perturbation techniques for viability and control // Lect. Notes in Control, Inform. Sci. — 1992. — Vol. 180. — P. 394–403.
3. Kurzhanski A. B., Filippova T. F. On the Theory of Trajectory Tubes — A Mathematical Formalism for Uncertain Dynamics, Viability and Control // The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences. — June 15, 1993. — P. 1–67.
4. Filippova T. F. A Note on the Evolution Property of the Assembly of Viable Solutions to a Differential Inclusion // Computers Math. Applic. — 1993. — Vol. 25. — P. 115–121.
5. Aubin J-P., Frankowska H. The Viability Kernel Algorithm for Computing Value Functions of Infinite Horizon Optimal Control Problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 15 July 1996. — Vol. 201, № 8. — P. 555–576.
6. Тонков Е. Л., Панасенко Е. А. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 859–860.
7. Тонков Е. Л., Панасенко Е. А. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова — 2008. — Т. 262. — С. 202–221.

8. Quincampoix M., Buckdahn R., Rainer C. and Teichman J. Another proof for the equivalence between invariance of closed sets with respect to stochastic and deterministic systems // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2010. — Vol. 134. — P. 207–214.
9. Subbotina N. N., Ushakov V. N. On characteristic differential inclusions to unified differential games // Proceedings of the IX-th International Symposium on Dynamic Games and Applications (December, 18–21, 2000) Australia, Adelaide, University of South Australia. — P. 464–467.
10. Ушаков В. Н., Заварин А. Б. О выделении ядра выживаемости для дифференциального включения // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 65. Вып. 5. — С. 831–842.
11. Ушаков В. Н., Незнахин А. А. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. выч. мат. и мат. физики. — 2001. — Т. 41. Вып. 6. — С. 895–908.
12. Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 178–194.
13. Ushakov V. N., Brykalov S. A., Latushkin Y. A. Stable and unstable sets in problems of conflict control // Functional Differential Equations. — 2008. — Vol. 15, № 3–4. — P. 309–338.
14. Ушаков В. Н., Матвийчук А. Р., Лебедев П. Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 87–103.
15. Ушаков В. Н., Малёв А. Г. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 199–222.

Поступила в редакцию 24.05.11

V. N. Ushakov, A. A. Zimovets
Invariance defect of sets with respect to differential inclusion

A differential inclusion generated by a control system on a finite time interval is considered. The invariance of sets with respect to differential inclusion is investigated. The invariance defect of non-invariant sets with respect to differential inclusion is introduced. An example is presented.

Keywords: control system, differential inclusion, Hamiltonian, invariance, invariance defect.

Mathematical Subject Classifications: 37C99

Ушаков Владимир Николаевич, чл-корр. РАН, д. ф.-м. н., зав. отделом динамических систем, ИММ УрО РАН. 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru,
Зимовец Артем Анатольевич, аспирант кафедры автоматики и информационных технологий УрФУ. 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: aazimovets@gmail.com