МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 2

УДК 517.958 : 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

КВАЗИУРОВНИ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА

Для дискретного оператора Шредингера, отвечающего квантовому волноводу, с экспоненциально убывающим потенциалом вида εV доказано, что в окрестности особенностей невозмущенной функции Грина для малых ε существуют квазиуровни (собственные значения или резонансы), для которых найдены асимптотические формулы.

Ключевые слова: дискретное уравнение Шредингера, собственное значение, резонанс.

Введение

Положим $\Gamma = \mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\} \subset \mathbb{Z}^2$, $N > 1$. Множество Γ будем отождествлять с вершинами неориентируемого графа (вершины располагаем в $\mathbb{Z}^2$ лишь для удобства обозначений). Обозначим через $l^2(\Gamma)$ гильбертово пространство функций $\varphi(n,m)$, где $(n,m) \in \Gamma$, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{l^2(\Gamma)} = \sum_{(n,m)\in\Gamma} \varphi(n,m)\overline{\psi(n,m)}.$$

Введем в рассмотрение оператор $H_0 = (H_{01} \otimes 1) + (1 \otimes H_{02})$, действующий в $l^2(\Gamma)$. Здесь оператор $H_{01} : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ действует по правилу

$$\big(H_{01}\varphi\big)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор H_{02} действует в $l^2\big(\{1, \dots, N\}\big) \cong \mathbb{C}^N$ и определяется равенствами

$$\big(H_{02}\varphi\big)(m) = \varphi(m-1) + \varphi(m+1), \quad m = 2, \dots, N-1,$$

$$\big(H_{02}\varphi\big)(1) = \varphi(2),$$
$$\big(H_{02}\varphi\big)(N) = \varphi(N-1).$$

Положим $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $\varepsilon > 0$, а $V \neq 0$ является оператором умножения на вещественную функцию $V(n,m)$, заданную на Γ и удовлетворяющую условию

$$|V(n,m)| \leqslant \beta e^{-\alpha|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \{1, \dots, N\}$$

для некоторых $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Подобные функции в дальнейшем называем экспоненциально убывающими.

Операторы такого вида являются гамильтонианами (операторами энергии) электрона в квантовой проволоке (квантовом волноводе) в приближении сильной связи (см., например, [1]). Через $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ обозначим спектр и существенный спектр оператора A соответственно.

§ 1. Спектральные свойства оператора H_0

Теорема 1. *Оператор H_0 самосопряжен и ограничен.*

Легко проверяется непосредственно. В дальнейшем понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Существует ровно* N *различных собственных значений оператора* H_{02} :

$$\lambda_j = 2\cos\frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \ldots, N$$

с соответствующими собственными функциями

$$\varphi_j(m) = a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right), \quad j = 1, \ldots, N,$$

образующими ортонормированный базис в $\mathbb{C}^N$, *где* a_j, $j = 1, \ldots, N$ *— нормировочные коэффициенты.*

Доказательство. Уравнение на собственные значения $H_{02}\varphi = \lambda\varphi$ перепишем в виде

$$\begin{gathered} \varphi(m-1) + \varphi(m+1) = \lambda\varphi(m), \quad m = 2, \ldots, N-1, \\ \varphi(2) = \lambda\varphi(1), \\ \varphi(N-1) = \lambda\varphi(N). \end{gathered} \tag{1}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\varphi(m) = c_1 e^{ikm} + c_2 e^{-ikm}, \quad m = 1, \ldots, N.$$

Для $m \in \{2, \ldots, N-1\}$ имеем

$$c_1 e^{ikm}(e^{-ik} + e^{ik}) + c_2 e^{-ikm}(e^{-ik} + e^{ik}) = \lambda(c_1 e^{ikm} + c_2 e^{-ikm}).$$

Следовательно, $\lambda = e^{-ik} + e^{ik} = 2\cos k$. Второе уравнение (1) примет вид:

$$c_1 e^{2ik} + c_2 e^{-2ik} = (e^{-ik} + e^{ik})(c_1 e^{ik} + c_2 e^{-ik}),$$

откуда $c_1 = -c_2 = c$. Подставим $\varphi(m) = c\big(e^{ikm} - e^{-ikm}\big)$ в третье уравнение (1):

$$ce^{ik(N-1)} - ce^{-ik(N-1)} = (e^{-ik} + e^{ik})(ce^{ikN} - ce^{-ikN}).$$

Следовательно, $\sin k(N+1) = 0$, откуда

$$k = \frac{j\pi}{N+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, существует ровно N различных собственных значений оператора H_{02} :

$$\lambda_j = 2\cos\frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

которым соответствуют N собственных функций

$$\sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны, а их количество совпадает с размерностью пространства. Следовательно, функции $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ образуют ортонормированный базис. □

Спектр оператора H_{01} совпадает с отрезком $[-2, 2]$ (см. [2], раздел VII.2). Обозначим через $R_{01}(\lambda)$ резольвенту этого оператора, $R_{01}(\lambda) = (H_{01} - \lambda)^{-1}$. Ядро резольвенты (функция Грина) оператора H_{01} имеет вид (см., например, [3])

$$G_{01}(n-m, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^{|n-m|}. \tag{2}$$

Заметим, что функция

$$g(\lambda) = \lambda/2 - \sqrt{\left(\lambda/2\right)^2 - 1}$$

является обратной к функции Жуковского $w = (z + z^{-1})/2$ для $z = \lambda/2$. Риманова поверхность ν функции g двулистна, причем листы склеиваются вдоль интервала $(-2, 2)$, а точки ± 2 являются точками ветвления. Функция Грина G_{01} аналитически продолжается на второй лист поверхности ν. Выбор знака перед (арифметическим для $\lambda > 2$) корнем в (2) отвечает экспоненциальному убыванию функции G_{01} при $|n - m| \to \infty$ для $\lambda > 2$.

Ядро (являющееся матрицей) $\{G_0(n, m, n', m', \lambda)\}_{(n,m),(n',m')\in\Gamma}$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 назовем функцией Грина этого оператора.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} \mu_j = \lambda - 2\cos\frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \ldots, N, \\ \cos k_j = \mu_j/2, \quad j = 1, \ldots, N, \\ \sin k_j = -\sqrt{1 - (\mu_j/2)^2}, \quad j = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{3}$$

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$G_0(n, m, n', m', \lambda) = \sum_{j=1}^{N} a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}\big(n - n', \mu_j\big), \tag{4}$$

где

$$\lambda \notin \bigcup_{j=1}^{N} \left[-2 + 2\cos\frac{j\pi}{N+1}, 2 + 2\cos\frac{j\pi}{N+1}\right] = \left[-2 + 2\cos\frac{N\pi}{N+1}, 2 + 2\cos\frac{\pi}{N+1}\right].$$

Доказательство. Покажем справедливость равенства

$$(H_0 - \lambda) R_0(\lambda)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma) \tag{5}$$

при условии, что оператору $R_0(\lambda)$ отвечает ядро (4). Используя лемму (1), получим

$$\begin{aligned} &(H_0 - \lambda) R_0(\lambda)\varphi(n, m) = \\ &= \big((H_{01} \otimes 1) - \lambda\big) \sum_{j=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{(n',m')\in\Gamma} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}\big(n - n', \mu_j\big)\varphi(n', m') + \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{(n',m')\in\Gamma} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}\big(n - n', \mu_j\big)\varphi(n', m') = \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{m'=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) \big((H_{01} \otimes 1) - \mu_j\big) \sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_{01}\big(n - n', \mu_j\big)\varphi(n', m') = \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{m'=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) \varphi(n, m'). \end{aligned} \tag{6}$$

Считая n константой, разложим $\varphi(n, m)$ по базису $\left\{a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\right\}_{j=1}^{N}$:

$$\varphi(n, m) = \sum_{j=1}^{N} c_j(n) a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right),$$

где

$$c_j(n) = \left(\varphi(n,m), a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\right)_{l^2(\{1,\ldots,N\})} = \sum_{m'=1}^{N} \varphi(n,m') a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right).$$

Имеем

$$\varphi(n,m) = \sum_{j=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{m'=1}^{N} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)\varphi(n,m'). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует справедливость (5).

Осталось показать, что

$$R_0(\lambda)(H_0-\lambda)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma).$$

Имеем

$$R_0(\lambda)(H_0-\lambda)\varphi(n,m) = \sum_{(n',m')\in\Gamma} G_0(n,m,n',m',\lambda)\big((H_0-\lambda)\varphi\big)(n',m') =$$

$$= \sum_{m'=2}^{N-1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m',\lambda)\big(\varphi(n'+1,m')+\varphi(n'-1,m')+\varphi(n',m'+1)+\varphi(n',m'-1)-\lambda\varphi(n',m')\big)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',1,\lambda)\big(\varphi(n'+1,1)+\varphi(n'-1,1)+\varphi(n',2)-\lambda\varphi(n',1)\big)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',N,\lambda)\big(\varphi(n'+1,N)+\varphi(n'-1,N)+\varphi(n',N-1)-\lambda\varphi(n',N)\big)=$$

$$= \sum_{m'=2}^{N-1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \big(G_0(n,m,n'-1,m',\lambda)+G_0(n,m,n'+1,m',\lambda)-\lambda G_0(n,m,n',m',\lambda)\big)\varphi(n',m')+$$

$$+\sum_{m'=3}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'-1,\lambda)\varphi(n',m') + \sum_{m'=1}^{N-2}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'+1,\lambda)\varphi(n',m')+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \big(G_0(n,m,n'-1,1,\lambda)+G_0(n,m,n'+1,1,\lambda)\big)\varphi(n',1)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',1,\lambda)\varphi(n',2) - \sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',1,\lambda)\lambda\varphi(n',1)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} \big(G_0(n,m,n'-1,N,\lambda)+G_0(n,m,n'+1,N,\lambda)\big)\varphi(n',N)+$$

$$+\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',N,\lambda)\varphi(n',N-1) - \sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',N,\lambda)\lambda\varphi(n',N) =$$

$$= \sum_{(n',m')\in\Gamma} \big(G_0(n,m,n'-1,m',\lambda)+G_0(n,m,n'+1,m',\lambda)-\lambda G_0(n,m,n',m',\lambda)\big)\varphi(n',m')+$$

$$+\sum_{m'=2}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'-1,\lambda)\varphi(n',m') + \sum_{m'=1}^{N-1}\sum_{n'\in\mathbb{Z}} G_0(n,m,n',m'+1,\lambda)\varphi(n',m') =$$

$$= \sum_{(n',m')\in\Gamma} \big(H_0G_0(n,m,n',m',\lambda)-\lambda G_0(n,m,n',m',\lambda)\big)\varphi(n',m').$$

Справедливо равенство

$$(H_0-\lambda)G_0(n,m,n',m',\lambda) = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Действительно,

$$(H_0-\lambda)G_0(n,m,n',m',\lambda) =$$

$$= \big((H_{01}\otimes 1)-\lambda\big)\sum_{j=1}^{N} a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)G_0(n-n',\mu_j)+$$

$$+\big(1\otimes H_{02}\big)\sum_{j=1}^{N} a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)G_0(n-n',\mu_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\big((H_{01}\otimes 1)-\lambda_j\big)a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)G_0(n-n',\lambda_j)=$$

$$=\delta_{nn'}\sum_{j=1}^{N} a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)=\delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Теорема 2.

$$\sigma(H_0)=\bigcup_{j=1}^{N}\left[-2+2\cos\frac{j\pi}{N+1},2+2\cos\frac{j\pi}{N+1}\right]=\left[-2+2\cos\frac{N\pi}{N+1},2+2\cos\frac{\pi}{N+1}\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$A=\bigcup_{j=1}^{N}\left[-2+2\cos\frac{j\pi}{N+1},2+2\cos\frac{j\pi}{N+1}\right].$$

Пусть $\lambda\notin A$. Покажем, что $\lambda\notin\sigma(H_0)$, то есть $R_0(\lambda)$ — ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$. Действительно, тогда $\mu_j=\lambda-\lambda_j\notin[-2,2]$, $j=1,\ldots,N$. Поэтому ядра $G_{01}(n-n',\mu_j)$ определяют ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$, и, следовательно, ядро G_0 оператора $R_0(\lambda)$ определяет ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$ в силу (4).

Пусть теперь $\lambda\in A$, то есть найдется такое $j_0\in\{1,\ldots,N\}$, что

$$\lambda\in\left[-2+2\cos\frac{j_0\pi}{N+1},2+2\cos\frac{j_0\pi}{N+1}\right].$$

Покажем, что найдется последовательность $\{\varphi_r\}_{r=1}^{\infty}\subset l^2(\Gamma)$ такая, что $\|\varphi_r\|=1$, $(H_0-$ $-\lambda)\varphi_r\to 0$ при $r\to\infty$. Это, в силу критерия Вейля (см., например, [2, с. 262]), будет означать, что $\lambda\in\sigma(H_0)$.

Рассмотрим последовательность

$$\varphi_r(n,m)=\frac{a_{j_0}}{\hat c}e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right),$$

где

$$\chi_{[-r,r]}(n)=\begin{cases}1, & n\in[-r,r],\\ 0, & n\notin[-r,r].\end{cases}$$

Имеем

$$\hat c=\hat c(r)=\sum_{n=-r}^{r}\left|e^{ik_{j_0}n}\right|^2=2r+1,$$

$$\|\varphi_r(n,m)\|^2_{l^2(\Gamma)}=\sum_{(n,m)\in\Gamma}\left|\frac{a_{j_0}}{\hat c(r)}\cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right)\right|^2=$$

$$=\left\|\frac{1}{\hat c(r)}\cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\right\|^2_{l^2(\mathbb{Z})}\cdot\left\|a_{j_0}\sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right)\right\|^2_{l^2(\{1,\ldots,N\})}=\left\|\frac{1}{\hat c(r)}\cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\right\|^2_{l^2(\mathbb{Z})}=1.$$

Далее,

$$\big((H_0-\lambda)\varphi_r\big)(n,m)=\big((H_0^1\otimes 1)-\mu_{j_0}\big)\left(\frac{1}{\hat{c}(r)}\cdot e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\right)\sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\hat{c}(r)}\big(e^{ik_{j_0}(n+1)}\chi_{[-r,r]}(n+1)+e^{ik_{j_0}(n-1)}\chi_{[-r,r]}(n-1)-\lambda_{j_0}e^{ik_{j_0}n}\chi_{[-r,r]}(n)\big)=$$

$$=\begin{cases}0, & n\neq\pm r, n\neq\pm(r+1),\\ \dfrac{1}{\hat{c}(r)}\big(e^{\pm ik_{j_0}(r-1)}-\lambda_{j_0}e^{\pm ik_{j_0}r}\big), & n=\pm r,\\ \dfrac{1}{\hat{c}(r)}e^{\pm ik_{j_0}r}, & n=\pm(r+1).\end{cases}$$

Так как $|e^{ik_{j_0}}|=1$ и $\hat{c}(r)\to\infty$ при $r\to\infty,$ то очевидно, что

$$|(H_0-\lambda)\varphi_r(n,m)|\to 0,\quad r\to\infty.$$

§ 2. Квазиуровни слабо возмущенного оператора

Рассмотрим оператор H_ε (см. введение). Резольвенту оператора H_ε обозначим через $R_\varepsilon(\lambda)$. В дальнейшем будем использовать обозначение $\sqrt{V}=\sqrt{|V|}$ sign V (только для $\sqrt{V}$), тогда $V=\sqrt{V}\sqrt{|V|}$.

Уравнение на собственные значения оператора H_ε в области, где существует резольвента $R_0(\lambda)$, можно записать в виде

$$\psi=-\varepsilon R_0(\lambda)(V\psi), \tag{8}$$

где функция $\psi\in l^2(\Gamma)$ и отлична от нуля. Для того чтобы, оставаясь в рамках пространства $l^2(\Gamma)$, исследовать также резонансы, переходим к новой функции $\varphi=\sqrt{|V|}\psi\in l^2(\Gamma)$.

Обозначим через $L(\lambda)=\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}$ оператор с ядром

$$l(n,m,n',m',\lambda)=\sqrt{|V(n,m)|}\sum_{j=1}^{N}a_j^2\sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)G_{01}\big(n-n',\mu_j\big)\sqrt{V(n',m')} \tag{9}$$

(аналитическое продолжение операторнозначной функции, осуществляемое ее ядром, обозначаем тем же символом).

Определение 1. Назовем *резонансом* оператора H_ε значение λ, принадлежащее второму листу римановой поверхности $\nu_j=\nu-\lambda_j$ одного из слагаемых в выражении (9), для которого существует ненулевое решение уравнения

$$\varphi=-\varepsilon\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}\varphi \tag{10}$$

(предполагается, что $\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}$ существует как оператор в $l^2(\Gamma)$).

Определение 2. Назовем *квазиуровнем* оператора H_ε его собственное значение или резонанс.

В силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [2]) и равенства

$$\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}=(1+\varepsilon\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V})^{-1}\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V} \tag{11}$$

λ является квазиуровнем тогда и только тогда, когда в этой точке существует полюс операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}$.

Лемма 3. *Оператор* $\bigl(1 - L(\lambda)\bigr)^{-1}$ *существует для всех* $\lambda \in D \setminus S$, *где*

$$D = \left\{a + bi \middle| a \in \left(-2 + 2\cos\frac{N\pi}{N+1}, 2 + 2\cos\frac{\pi}{N+1}\right) \setminus \left\{\pm 2 + 2\cos\frac{j\pi}{N+1}\right\}, b \in (-\delta, +\infty)\right\},$$

$j = 1, \ldots, N$, $\delta > 0$ *достаточно мало,* S *— некоторое дискретное подмножество в* D (*то есть множество, не имеющее предельных точек в* D).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, покажем компактность оператора $L(\lambda)$ для каждого $\lambda \in D$. Для этого достаточно, чтобы он являлся оператором Гильберта–Шмидта, то есть достаточно выполнения условия

$$\sum_{(n,m)\in\Gamma} \sum_{(n',m')\in\Gamma} |l(n, m, n', m', \lambda)|^2 < +\infty$$

для фиксированного $\lambda \in D$.

Пусть $\lambda \in D$, тогда

$$\sum_{(n,m)\in\Gamma} \sum_{(n',m')\in\Gamma} |l(n, m, n', m', \lambda)|^2 =$$

$$= \sum_{(n,m)\in\Gamma} \sum_{(n',m')\in\Gamma} \left| \sqrt{|V(n,m)|} \sum_{j=1}^{N} \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}\bigl(n - n', \mu_j\bigr) \sqrt{V(n',m')} \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha|n|} e^{-\alpha|n'|} \sum_{j=1}^{N} \bigl|G_{01}\bigl(n - n', \mu_j\bigr)\bigr|^2. \tag{12}$$

Имеем

$$\bigl|G_{01}\bigl(n - n', \mu_j\bigr)\bigr| \leqslant \frac{e^{\sigma|n-n'|}}{\bigl|\sqrt{\mu_j^2 - 4}\bigr|}$$

для всех j, где $\sigma > 0$. Следовательно, полученная в (12) сумма для $\sigma < \alpha$, то есть для достаточно малых σ, не превосходит

$$C \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\bigl|\sqrt{\mu_j^2 - 4}\bigr|^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{n'\in\mathbb{Z}} e^{-(\alpha-\sigma)|n|} e^{-(\alpha-\sigma)|n'|} < \infty. \tag{13}$$

Во-вторых, покажем, что отображение $\lambda \in D \to L(\lambda) \in \mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ является аналитической операторнозначной функцией в области D (под $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ понимаем множество линейных ограниченных операторов, действующих в $l^2(\Gamma)$).

Неравенства (12) и (13) показывают, что ряд (9) сходится равномерно на компактах из $D \setminus S$. В силу (векторнозначного варианта) теоремы Вейерштрасса об аналитичности ряда из аналитических функций функция $l(n, m, n', m', \lambda)$ определяет аналитическую функцию в $D \setminus S$ со значениями в $l^2(\Gamma^2)$. Следовательно и $L(\lambda)$ является аналитической функцией в $D \setminus S$ со значениями в $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$.

Вследствие оценок (12) и (13) $\|L(\lambda)\| < 1$ для достаточно больших $|\lambda|$. Отсюда вытекает существование обратного оператора $(1 - L(\lambda))^{-1}$ для таких λ. В силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [2]) это доказывает лемму. □

Замечание 1. В комплексной окрестности произвольной точки $\lambda_0 \in \sigma(H_0)$ может быть лишь конечное число квазиуровней.

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\sigma_{ess}(H_\varepsilon) = \sigma(H_0).$$

Доказательство. Покажем, что V — относительно компактное возмущение оператора H_0, то есть что оператор $VR_0(\lambda)$ компактен для некоторого $\lambda \notin \sigma(H_0)$. Имеем

$$\sum_{(n,m)\in\Gamma}\sum_{(n',m')\in\Gamma}|V(n,m)G_0(n,m,n',m',\lambda)|^2 \le C\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-2\alpha|n|}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{N}|q_j|^{|n-n'|} =$$

$$= C\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-2\alpha|n|}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n'\in\mathbb{Z}}|q_j|^{|n'|} < +\infty,$$

где $|q_j|<1$, $j=1,\ldots,N$, $C=\mathrm{const}$. Следовательно, оператор $VR_0(\lambda)$ является оператором Гильберта–Шмидта, а значит, компактен. Утверждение теоремы вытекает из [4, с. 130].

Теорема 4. *Предположим, что*

$$v = \sum_{(n',m')\in\Gamma}\sin^2\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)V(n',m') \ne 0.$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки $\lambda_{j_0}^{\pm} = \pm 2 + 2\cos\dfrac{j_0\pi}{N+1}$, *где* $j_0 \in \{1,\ldots,N\}$, *для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует единственный квазиуровень* $\lambda^{\pm} = \lambda^{\pm}(\varepsilon)$ *оператора* H_ε, *аналитически зависящий от* ε, *для которого справедлива формула*

$$\lambda^{\pm}(\varepsilon) = \pm 2 + 2\cos\frac{j_0\pi}{N+1} \pm \frac{a_{j_0}^4\varepsilon^2 v^2}{4} + O(\varepsilon^4).$$

Доказательство. Зафиксируем $j_0 \in \{1,\ldots,N\}$. Введем обозначение

$$\eta_{j_0} = \eta_{j_0}(\lambda) = \sqrt{\mu_{j_0}^2 - 4}.$$

Заметим, что μ_{j_0} вблизи точки 2 (вблизи точки -2) отвечает $\mathrm{Re}\,\mu_{j_0} > 0$ (соответственно $\mathrm{Re}\,\mu_{j_0} < 0$). В достаточно малой окрестности $\mu_{j_0} = 0$ (то есть λ достаточно близки к $\lambda_{j_0}^{\pm}$) для функции Грина оператора H_{01} имеем

$$G_{01}(n-n',\mu_{j_0}) = -\frac{(\pm 1)^{|n-n'|}}{\eta_{j_0}} + g(n-n',\eta_{j_0}),$$

где $g(n-n',\eta_{j_0}) = \dfrac{(\pm 1)^{|n-n'|}}{\eta_{j_0}} - \dfrac{1}{\eta_{j_0}}\left(\dfrac{\sqrt{\eta_{j_0}^2+4}-\eta_{j_0}}{2}\right)^{|n-n'|}$ аналитическая по η_{j_0} в данной окрестности функция.

Нетрудно видеть, что для $j \ne j_0$ функции

$$G_{01}(n-n',\mu_j) = G_{01}\left(n-n', 2\cos\frac{j_0\pi}{N+1} - 2\cos\frac{j\pi}{N+1} + \sqrt{\eta_{j_0}^2+4}\right)$$

также являются аналитическими по η_{j_0} в этой окрестности.

Таким образом, уравнение (10), определяющее квазиуровни, можно переписать в виде:

$$\varphi(n,m) = \frac{\varepsilon a_{j_0}^2}{\eta_{j_0}}\sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{|V(n,m)|}\sum_{(n',m')\in\Gamma}(\pm 1)^{|n-n'|}\sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{V(n',m')}\varphi(n',m') -$$

$$-\varepsilon\sqrt{|V(n,m)|}K(\eta_{j_0})(\sqrt{V}\varphi)(n,m),$$

где $K(\eta_{j_0})$ — оператор с ядром

$$k(n,m,n',m',\eta_{j_0}) = a_{j_0}^2\sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)g(n-n',\eta_{j_0}) +$$

$$+\sum_{j=1,j\neq j_0}^{N} a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right)G_{01}(n-n',\mu_j), \quad \mu_j=\mu_j(\eta_{j_0}).$$

Легко видеть, что $K(\eta_{j_0})$ — аналитическая функция в окрестности нуля со значениями во множестве компактных операторов (см. доказательство леммы (3)).

Положим $\xi(n,m)=(1+\varepsilon\sqrt{|V|}K(\eta_{j_0})\sqrt{V})\varphi(n,m)$. Предположим, что ε и η_{j_0} достаточно малы, тогда оператор $(1+\varepsilon\sqrt{|V|}K\sqrt{V})^{-1}$ существует. Имеем

$$\xi(n,m)=\frac{\varepsilon a_{j_0}^2(\pm1)^n}{\eta_{j_0}}\sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{|V(n,m)|}\times$$

$$\times\sum_{(n',m')\in\Gamma}(\pm1)^{n'}\sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{V(n',m')}(1+\varepsilon\sqrt{|V|}K\sqrt{V})^{-1}\xi(n',m'), \tag{14}$$

откуда

$$\xi(n,m)=C(\pm1)^n\sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{|V(n,m)|},$$

где

$$C=\frac{\varepsilon a_{j_0}^2}{\eta_{j_0}}\left((\pm1)^n\sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right),\sqrt{V(n,m)}(1+\varepsilon\sqrt{|V|}K\sqrt{V})^{-1}\xi(n,m)\right)_{l^2(\Gamma)}.$$

Подставив выражение для $\xi(n,m)$ в (14), получим

$$\eta_{j_0}=\varepsilon a_{j_0}^2\sum_{(n',m')\in\Gamma}\sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{V(n',m')}\times$$

$$\times\left(1+\varepsilon\sqrt{|V|}K\sqrt{V}\right)^{-1}\sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)\sqrt{|V(n',m')|}.$$

Правая часть полученного уравнения, очевидно, аналитически зависит от η_{j_0},ε. В силу теоремы о неявной функции для аналитических функций (см. [5]) данное уравнение имеет единственное решение $\eta_{j_0}=\eta_{j_0}(\varepsilon)$, аналитически зависящее от ε. Разлагая $(1+\varepsilon\sqrt{|V|}K\sqrt{V})^{-1}$ в ряд по степеням ε, получаем равенство

$$\eta_{j_0}=\varepsilon a_{j_0}^2\sum_{(n',m')\in\Gamma}\sin^2\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right)V(n',m')+o(\varepsilon)=\varepsilon a_{j_0}^2 v+o(\varepsilon). \tag{15}$$

Вернемся к переменной λ, тогда в окрестности $\lambda_{j_0}^{\pm}$ при достаточно малых ε справедливо равенство:

$$\lambda=\pm2+2\cos\frac{j_0\pi}{N+1}\pm\frac{a_{j_0}^4\varepsilon^2v^2}{4}+O(\varepsilon^4).$$

Замечание 2. В силу равенства $\eta_{j_0}=-2i\sin k_{j_0}$ (см. (3)) бесконечно малые η_{j_0} и $-2ik_{j_0}$ эквивалентны. Вблизи границы существенного спектра $\lambda_1^+=2+2\cos\dfrac{\pi}{N+1}$ и $\lambda_N^-=-2+2\cos\dfrac{N\pi}{N+1}$ экспоненциальное убывание функции из уравнения (8) обеспечивается условием (см. вид (4) функции Грина) $\mathrm{Im}\,k_{j_0}=\dfrac{\mathrm{Re}\mu_{j_0}}{2}>0$, $j_0=1,\ldots,N$. Поэтому, с учетом знака корня у функций $G_{01}(n-n',\mu_1)$ и $G_{01}(n-n',\mu_N)$ вблизи точек $\mu_1=-2$ и $\mu_N=2$ соответственно, согласно (15), получаем, что квазиуровень $k_{j_0}\approx\dfrac{i}{2}\eta_{j_0}$ вблизи точки -2 является собственным значением при $v<0$, вблизи точки 2 — при $v>0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mireles F., Kirczenow G. Ballistic spin–polarized transport and Rashba spin precession in semiconductor nanowires // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 64, 024426 (13 p).
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 360 с.
3. Baranova L. Y., Chuburin Y. P. Quasi–levels of the two–particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential // J. Phys. A.: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 435205 (11 p).
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов — М.: Мир, 1982. — 432 с.
5. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969. — 396 с.

Поступила в редакцию 25.04.11

T. S. Tinyukova
Quasi-levels of the discrete Schrödinger operator for a quantum waveguide

We proved that the discrete Schrödinger operator corresponding to a quantum waveguide with a small exponentially decreasing potential of the form εV has quasi-levels (eigenvalues or resonances). The asymptotic formulas for these quasi-levels are obtained.

Keywords: discrete Schrödinger equation, eigenvalue, resonance.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

Тинюкова Татьяна Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет. 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: TAshih@mail.ru