МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 2

УДК 517.935 + 517.938

© *Л. И. Родина*

СТАТИСТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ [1]

Для управляемых систем со случайными параметрами исследуются свойства статистической инвариантности и статистически слабой инвариантности, выполненные с вероятностью единица. Получены достаточные условия инвариантности заданного множества относительно управляемой системы, выраженные в терминах функций Ляпунова и динамической системы сдвигов. Доказано обобщение теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах и получены условия существования верхнего решения для задачи Коши с кусочно непрерывной по t правой частью без предположения единственности решения.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, статистически инвариантные множества с вероятностью единица.

Введение

Вопросам исследования инвариантных множеств управляемых систем и отвечающих им дифференциальных включений посвящено большое количество работ (см. монографию Ж.-П. Обена [1] и библиографию к ней). В работах [2–4] получены условия слабой инвариантности заданного множества M относительно потока, отвечающего дифференциальному включению. Эти утверждения формулируются в терминах функций Ляпунова, задача которых — не разрешать фазовым точкам множества M, двигающимся под действием потока g^t, покидать данное множество.

Данная работа является продолжением [5], где исследуются статистически инвариантные множества управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

параметризованной топологической динамической системой (Σ, h^t). Пусть $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа, $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. На пространстве Ω вводится поток $g^t\omega = \big(h^t\sigma, D(t,\omega)\big)$, где $D(t,\omega)$, $\omega = (\sigma, X)$ является множеством достижимости системы (1) в момент времени t из начального множества X. Инвариантность множества $M = \Sigma \times M(\sigma)$ здесь понимается в статистическом смысле, то есть множество M является *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ относительная частота поглощения множества достижимости $D\big(t, \sigma, M(\sigma)\big)$ системы (1) множеством $M(h^t\sigma)$ равна единице. Отметим также, что множество M называется *статистически слабо инвариантным* относительно системы (1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется такое решение $\varphi(t,\sigma,x)$ данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$, что верхняя относительная частота попадания данного решения в множество M равна единице.

Эта статья посвящается исследованию инвариантных множеств управляемых систем со случайными параметрами. В отличие от детерминированных систем, в системах со случайными параметрами часто возникает ситуация, когда движение $t \to g^t\omega$, $\omega = (\sigma, M(\sigma))$ находится в множестве M с относительной частотой, равной единице, причем это происходит не для всех, а для почти всех $\sigma \in \Sigma$, относительно некоторой вероятностной меры. Поэтому для таких систем необходимо рассматривать свойства статистической инвариантности и статистически

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00380).

слабой инвариантности, выполненные с вероятностью единица. В данной работе исследуются условия инвариантности (в указанном выше смысле) множества M, выраженные в терминах функций Ляпунова, динамической системы сдвигов и характеристики $\varkappa(\sigma)$, которая является относительной частотой попадания траектории верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{2}$$

в множество $(-\infty, 0]$. Получены достаточные условия, при которых равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица, а также условия существования верхнего решения и обобщение теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для задачи Коши (2) с кусочно непрерывной по t правой частью без предположения единственности решения.

§ 1. Управляемая система, параметризованная динамической системой

Топологической динамической системой называется пара (Σ, h^t), где Σ — полное метрическое пространство с метрикой ρ_Σ, h^t — *однопараметрическая группа преобразований* Σ в себя, непрерывная по (t,σ) и удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$. Пространство Σ называется *фазовым пространством* динамической системы (Σ, h^t), функция $t \to h^t\sigma$ — *движением* точки σ, функция $h^t : \Sigma \to \Sigma$ — *потоком* на Σ (см. [6, гл. 5], [7, с. 204–227]).

Метрической динамической системой называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где Σ — абстрактное пространство; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств пространства Σ; h^t — однопараметрическая группа *измеримых* преобразований фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^t A \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, ν — вероятностная мера, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\nu(h^t A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ (см. [7, с. 156], [8, с. 12]).

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; $\varrho(x, M) \doteq \min\limits_{y\in M} |x - y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$; $O_r(0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. Обозначим через $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$, где $d(A, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B : $d(A, B) \doteq \max\limits_{a\in A} \varrho(a, B)$.

В данной работе исследуются статистически инвариантные множества с вероятностью единица относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и функциями f и U.

Предполагаем, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и выполнены следующие условия: а) при всех фиксированных $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0$ функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна; б) при всех фиксированных $(\sigma, x, u) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^{n+m}$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна; в) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывна сверху.

Расширим множество допустимых управлений до множества мер Радона, для этого заданному множеству $U \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ поставим в соответствие пространство с мерой $(U, \mathfrak{F}, \eta)$. Здесь через $\mathfrak{F}$ обозначена борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — вероятностная мера Радона, сосредоточенная на множестве U. Мерой Радона с носителем U называется конечная регулярная счетно-аддитивная функция $\eta : A \to \mathbb{R}$ множеств $A \in \mathfrak{F}$ (см. [9]). Обозначим через $\operatorname{rpm}(U)$ пространство вероятностных мер Радона с носителем U.

Управляемая система задается при каждом $\sigma \in \Sigma$ множеством *допустимых процессов*, определенных следующим образом.

Определение 1. *Допустимым процессом* (см. [9]) управляемой системы при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ называется всякая функция $t \to (\varphi(t, \sigma), \eta_t)$ переменного t, определенная на полуинтервале $[0, \tau)$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) управление $t \to \eta_t$ является измеримой по Лебегу [2] мерозначной функцией со значениями в пространстве $\mathrm{rpm}(U(t))$ вероятностных мер Радона с носителем

$$U(t) \doteq U\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma)\big);$$

2) функция $t \to \varphi(t,\sigma)$ является абсолютно непрерывным решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0,\tau), \tag{3}$$

где $[0,\tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (3).

По функциям f и U построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma,x) = \mathrm{co}\, H(\sigma,x), \tag{4}$$

где $H(h^t\sigma,x)$ — множество всех предельных значений функции $f\big(h^t\sigma, x, U(h^t\sigma,x)\big)$ для фиксированного $\sigma \in \Sigma$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, $\mathrm{co}\, H(\sigma,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma,x)$. Между управляемой системой (3) и включением (4) существует следующая связь. Если $(\varphi(t,\sigma),\eta_t)$ — допустимый процесс системы (3), то $\varphi(t,\sigma)$ — решение включения (4). При некоторых дополнительных предположениях верно и обратное: если $\varphi(t,\sigma)$ — решение включения (4), то найдется такое управление $\eta_t \in \mathrm{rpm}(U(t))$, что $(\varphi(t,\sigma),\eta_t)$ является допустимым процессом системы (3) (см. [9, с. 404]).

В данной работе будем рассматривать только такую ситуацию, когда рассматриваемое дифференциальное включение имеет компактные образы, то есть будем предполагать, что при фиксированных (σ,x) множество $F(\sigma,x)$ выпукло и компактно.

Определение 2. Каждому значению $\sigma \in \Sigma$, множеству $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $D(t,\sigma,X)$, состоящее из всех значений в момент времени t решений $t \to \varphi(t,\sigma,x)$ включения (4), когда начальное условие $\varphi(0,\sigma,x) = x$ пробегает все множество X. Множество $D(t,\sigma,X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (4). Оно называется *множеством достижимости* управляемой системы (3) в момент t из начального множества X.

§ 2. Обобщение теоремы о дифференциальных неравенствах

Для изучения статистически инвариантных множеств управляемых систем нужно исследовать поведение верхнего решения скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(t_0,\sigma) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{5}$$

в предположении, что для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ функция $w(h^t\sigma,z)$ переменных (t,z) удовлетворяет *условиям Каратеодори.* Это означает, что выполнены следующие условия:

1) функция $z \to w(h^t\sigma,z)$ непрерывна при почти всех t;

2) функция $t \to w(h^t\sigma,z)$ измерима при каждом z;

3) для каждого отрезка I на числовой прямой существует локально суммируемая функция $m_I(h^t\sigma)$ такая, что для всех $(t,z) \in \mathbb{R} \times I$ выполнено неравенство $|w(h^t\sigma,z)| \leqslant m_I(h^t\sigma)$ (см. [10, с. 7]).

Решением уравнения (5) на интервале $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывная функция $z(t,\sigma)$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$z(t,\sigma) = z(t_0,\sigma) + \int_{t_0}^{t} w(h^s\sigma, z(s,\sigma))ds$$

[2]Это означает, что для всякой непрерывной функции $a(t,u)$ переменных (t,u) функция $t \to \langle \eta_t, a\rangle$, где $\langle \eta_t, a\rangle \doteq \int_{U(t)} a(t,u)\eta_t(du)$, измерима по Лебегу.

при каком-нибудь $t_0 \in \mathfrak{I}$. Отметим, что в данной статье будем рассматривать только случай, когда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to w(h^t\sigma, z)$ кусочно-непрерывна.

Напомним, что *верхним решением* задачи Коши (5) называется такое решение $z^*(t,\sigma)$, что для любого другого решения $z(t,\sigma)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t,\sigma) \geqslant z(t,\sigma)$. В работах [11, с. 38], [12] показано, что если правая часть $w(h^t\sigma, z)$ непрерывна, то верхнее решение существует на некотором интервале $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$. Аналогично определяется нижнее решение, которое тоже существует. Для дальнейшего необходимо получить условия существования верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи (5) для всех $t \in [t_0, +\infty)$ и доказать аналог теоремы С. А. Чаплыгина [13] о дифференциальных неравенствах для кусочно-непрерывной функции $w(h^t\sigma, z)$.

Лемма 1. *Пусть для некоторого* $\sigma \in \Sigma$ *функция* $(t,z) \to w(h^t\sigma, z)$ *непрерывна в области* $G \doteq \{(t,z): \ t \in [t_0, \tau_1),\, z \in \mathbb{R}\}$ *и имеет предел слева при* $t \to \tau_1$. *Если для всех* $t \in [t_0, \tau_1]$ *выполнено неравенство*
$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty, \tag{6}$$
то для любого $z_0 \in \mathbb{R}$ *верхнее решение* $z^*(t,\sigma)$ *задачи Коши* (5) *существует для всех* $t \in [t_0, \tau_1]$.

Доказательство. Из неравенства (6) следует, что любое решение задачи Коши (5) продолжаемо на весь отрезок $[t_0, \tau_1]$ (см. [14, с. 33]). Покажем, что при выполнении условий леммы верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (5) существует также на всем отрезке $[t_0, \tau_1]$.

Обозначим через $G(z_0)$ прямоугольник, содержащий все решения задачи (5) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, определенные на отрезке $[t_0, \tau_1]$. Также обозначим через $\widetilde{w}(h^t\sigma, z)$ функцию, которая получается из функции $w(h^t\sigma, z)$, если ее доопределить по непрерывности при $t = \tau_1$ в области G. Рассмотрим последовательность гладких функций $\{w_k(h^t\sigma, z)\}_{k=1}^{\infty}$, монотонно убывающих и сходящихся равномерно к функции $\widetilde{w}(h^t\sigma, z)$ в прямоугольнике $G(z_0)$. Несложно показать, что существует такое число $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для каждого $k \geqslant k_0$ решение $z_k(t,\sigma)$ задачи Коши
$$\dot{z} = w_k(h^t\sigma, z), \quad z_k(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0$$
определено на всем отрезке $[t_0, \tau_1]$.

Далее, пусть $z(t,\sigma)$ — произвольное решение задачи (5), определенное на $[t_0, \tau_1]$, тогда, в силу теоремы А. И. Перова [12], выполнены неравенства
$$z(t,\sigma) \leqslant z_{k+1}(t,\sigma) \leqslant z_k(t,\sigma), \quad t \in [t_0, \tau_1].$$
Предел монотонно убывающей компактной последовательности решений $\{z_k(t,\sigma)\}_{k=k_0}^{\infty}$ на отрезке $[t_0, \tau_1]$ обозначим $z^*(t,\sigma)$, он является решением задачи (5) и удовлетворяет неравенству $z(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$, то есть $z^*(t,\sigma)$ является верхним решением задачи (5), которое определено для всех $t \in [t_0, \tau_1]$. □

Далее получено обобщение теоремы о дифференциальных неравенствах для кусочно-непрерывной функции $w(h^t\sigma, z)$, удовлетворяющей следующему условию.

Условие 1. Существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и

1) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ существует последовательность изолированных точек числовой оси $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$, такая, что функция $w(h^t\sigma, z)$ непрерывна в каждой из областей $G_i \doteq \{(t,z): \ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),\, z \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2, \ldots$;

2) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ неравенство (6) выполнено для всех $t \geqslant t_0$.

В дальнейшем, в зависимости от вида рассматриваемого случайного процесса, будем предполагать, что множество Σ_0 либо совпадает с Σ, либо $\Sigma_0 \subset \Sigma$ и $\nu(\Sigma_0) = 1$. В последнем случае будем говорить, что условие 1 выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* 1 *и для каждого* $\sigma \in \Sigma_0$ *существует функция* $v(t,\sigma)$, *непрерывная на* $[t_0,\infty)$, *дифференцируемая для почти всех* $t \in [t_0,\infty)$ *и удовлетворяющая неравенствам* (*в тех точках* $[t_0,\infty)$, *в которых* $v(t,\sigma)$ *дифференцируема*)

$$\dot{v}(t,\sigma) \leqslant w(h^t\sigma, v(t,\sigma)), \quad v(t_0,\sigma) \leqslant z_0. \tag{7}$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ *существует верхнее решение* $z^*(t,\sigma)$ *задачи Коши* (5), *определенное для всех* $t \in [t_0,\infty)$, *и имеет место неравенство* $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Sigma_0$ фиксировано. Докажем существование верхнего решения задачи Коши (5) для всех $t \geqslant t_0$. В силу леммы 1 верхнее решение задачи Коши (5) существует на отрезке $[t_0,\tau_1]$, обозначим это решение через $z_1^*(t,\sigma)$. Далее обозначим через $z_2^*(t,\sigma)$ верхнее решение задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(\tau_1) = z_1^*(\tau_1,\sigma), \quad t \geqslant \tau_1,$$

которое существует на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$ и введем в рассмотрение функцию

$$z^*(t,\sigma) = \begin{cases} z_1^*(t,\sigma) & \text{при} \ \ t \in [t_0,\tau_1), \\ z_2^*(t,\sigma) & \text{при} \ \ t \in [\tau_1,\tau_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Отметим, что для произвольного решения $z(t,\sigma)$ задачи Коши (5) в точке τ_1 имеют место соотношения

$$z_2^*(\tau_1,\sigma) = z_1^*(\tau_1,\sigma) \geqslant z(\tau_1,\sigma),$$

тогда из результатов работы [12] следует, для всех $t \in [\tau_1,\tau_2]$ выполнены неравенства

$$z_2^*(t,\sigma) \geqslant z(t,\sigma).$$

Таким образом, функция $z^*(t,\sigma)$ является верхним решением задачи Коши (5) для всех $t \in [t_0,\tau_2]$. Аналогично можно показать, что $z^*(t,\sigma)$ является верхним решением задачи (5) для всех $t \in [t_0,\tau_n]$ для любого натурального n.

Отметим, что данное решение $z^*(t,\sigma)$ можно продолжить на весь промежуток $[t_0,\infty)$. Для этого нужно показать, что если точки разрыва функции $w(h^t\sigma,z)$ изолированы, то каждый отрезок числовой оси содержит только конечное число таких точек. Предположим, что это не так и некоторый отрезок содержит бесконечное число изолированных точек $\tau_1,\tau_2,\ldots$; тогда мы имеем бесконечное ограниченное числовое множество, которое должно содержать хотя бы одну предельную точку τ. Точка τ также является точкой разрыва функции $w(h^t\sigma,z)$ и в любой своей окрестности содержит бесконечно много других точек разрыва, то есть τ не является изолированной точкой разрыва, получили противоречие.

Из неравенств (7) в силу теоремы А. И. Перова [12] следует неравенство $v(t,\sigma) \leqslant z_1^*(t,\sigma)$, выполненное для всех $t \in [t_0,\tau_1]$. Далее, для всех $t \in [\tau_1,\tau_2]$ (для которых функция $v(t,\sigma)$ дифференцируема) имеют место неравенства

$$\dot{v}(t,\sigma) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t,\sigma)\big), \quad v(\tau_1,\sigma) \leqslant z_1^*(\tau_1,\sigma),$$

поэтому $v(t,\sigma) \leqslant z_2^*(t,\sigma)$ для всех $t \in [\tau_1,\tau_2]$. Продолжая последовательно применять теорему А. И. Перова, получаем, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (5) удовлетворяет неравенству $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$ для всех $t \geqslant t_0$.

Замечание 1. Отметим, что теорема 1 также верна, если для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ функция $(t,z) \to w(h^t\sigma,z)$ непрерывна для всех $(t,z) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}$.

§ 3. Основные определения

Пусть задано подмножество $M = \Sigma \times M(\sigma)$ пространства $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, где для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа и принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ и внешнюю r-окрестность $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ границы множества $M(\sigma)$.

В предположении, что для заданного множества $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество достижимости $D\big(t,\sigma,X\big)$ системы (3) существует при всех $t \geqslant 0$, рассмотрим подмножество числовой прямой

$$\alpha(\vartheta,\omega) = \alpha(\vartheta,\sigma,X) \doteq \{t \in [0,\vartheta] : D\big(t,\sigma,X\big) \subseteq M(h^t\sigma)\}.$$

В работе [5] показано, что если $X \subseteq M(\sigma)$, то множество $\alpha(\vartheta,\omega)$ непусто и измеримо по Лебегу при каждом $\vartheta \geqslant 0$.

Определение 3. Обозначим

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D\big(t,\omega\big) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{8}$$

где $\omega = (\sigma, X)$, mes — мера Лебега на числовой прямой. Если указанный предел существует, характеристику $\operatorname{freq}(\omega)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $D\big(t,\sigma,X\big)$ системы (3) заданным множеством M. Далее, если предел (8) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $D\big(t,\sigma,X\big)$ системы (3) множеством M.

Определение 4. Множество M называется *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (3), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1$, то есть $\nu\{\sigma \in \Sigma : \operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1\} = 1$.

Определение 5. Множество M называется *положительно инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (3), если для любого $t \geqslant 0$ выполнено равенство

$$\nu\big\{\sigma \in \Sigma : D\big(t,\sigma,M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\} = 1.$$

Для исследования статистически инвариантных множеств применяется метод функций Ляпунова. Приведем необходимые определения.

Определение 6. Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma\times\mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $M = \Sigma \times M(\sigma)$), если она локально липшицева по (σ,x) и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(\sigma,x) \leqslant 0$ для всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times M(\sigma)$;
2) $V(\sigma,x) > 0$ для всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$.

Определение 7. Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке (σ,x) по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка, см. [15, с. 17]) будем называть следующий верхний предел:

$$V^o(\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)} \frac{V(h^\varepsilon\vartheta, y+\varepsilon q) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения

$$V^o_{\min}(\sigma,x) \doteq \min_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q), \quad V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \max_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$$

— *нижней и верхней производной* функции V в силу включения (4).

Для дальнейшего необходимо следующее свойство функции Ляпунова.

Лемма 2 (лемма 6 работы [5]). *Пусть* $\varphi(t,\sigma,x)$ *— решение включения* (4). *Тогда в точках дифференцируемости функции* $v(t,\sigma)\doteq V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\min}\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)\leqslant \dot v(t,\sigma)\leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big). \tag{9}$$

§ 4. Условия статистической инвариантности и статистически слабой инвариантности с вероятностью единица

Предположим, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma,z),\quad z(0)=0,\quad t\geqslant 0 \tag{10}$$

существует для всех $t\geqslant 0,$ и введем в рассмотрение характеристику

$$\varkappa(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Если указанный предел существует, то характеристика $\varkappa(\sigma)$ является относительной частотой попадания траектории решения $z^*(t,\sigma)$ в множество $(-\infty,0]$. Если предел $\varkappa(\sigma)$ не существует, то рассматриваются характеристики

$$\begin{aligned}\varkappa^*(\sigma)&\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},\\ \varkappa_*(\sigma)&\doteq\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},\end{aligned} \tag{11}$$

которые являются верхней и нижней относительной частотой попадания траектории решения $z^*(t,\sigma)$ в множество $(-\infty,0]$.

Теорема 2. *Пусть* $\Sigma_0\subseteq\Sigma,$ $\nu(\Sigma_0)=1$ *и для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *для каждой точки* $x\in M(\sigma)$ *все решения включения* (4), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x)=x,$ *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют локально липшицева функция* $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R},$ *такие что:*

1) *для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *функция* $w(h^t\sigma,z)$ *удовлетворяет условию* 1;

2) *функция* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и для всех* $(\sigma,x)\in\Sigma_0\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big). \tag{12}$$

Тогда, если $\varkappa(\sigma)=1$ *для всех* $\sigma\in\Sigma_0,$ *то множество* M *статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $\sigma\in\Sigma_0$ и для каждого $x\in M(\sigma)$ обозначим через $\varphi(t,\sigma,x)$ некоторое решение включения (4), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию $v(t)=V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)$. В работе [5] показано, что функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех $t\geqslant 0,$ и поскольку $\varphi(0,\sigma,x)\in M(\sigma),$ то $v(0)\leqslant 0$. Далее, из неравенств (9) и (12) имеем при всех $t\geqslant 0$ неравенство $\dot v(t)\leqslant w(h^t\sigma,v(t))$. Из последнего неравенства и неравенства $v(0)\leqslant 0,$ в силу теоремы 1, следует, что для всех $\sigma\in\Sigma_0$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (10) определено и удовлетворяет неравенству $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$ при всех $t\geqslant 0$. Обозначим через $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ нижнюю относительную частоту попадания решения $\varphi(t,\sigma,x)$ в множество $M,$ тогда

$$\operatorname{freq}_*(\varphi)\doteq\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,\varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}=\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,v(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Далее, в силу (11), из неравенства $v(t) \leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство $\operatorname{freq}_*(\varphi) \geqslant \varkappa_*(\sigma)$, и, так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (4) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x \in M(\sigma)$, имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}_*(\sigma, M(\sigma)) \geqslant \varkappa_*(\sigma). \tag{13}$$

Поскольку для всех $\sigma \in \Sigma_0$ выполнено равенство $\varkappa(\sigma) = \varkappa_*(\sigma) = 1$, то из неравенства (13) следует равенство $\operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = \operatorname{freq}_*(\sigma, M(\sigma)) = 1$, выполненное для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Следовательно, $\nu\{\sigma \in \Sigma : \operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1\} = \nu(\Sigma_0) = 1$, то есть множество M статистически инвариантно с вероятностью единица.

Определение 8. Множество M называется *статистически слабо инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (3), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (4) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x$, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$, такое, что для этого решения верхняя относительная частота попадания в множество M равна единице:

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} = 1.$$

Далее, множество M называется *слабо инвариантным с вероятностью единица*, если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x \in M(\sigma)$, для которого включение $\varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma)$ выполнено при всех $t \geqslant 0$.

Отметим, что множество, слабо инвариантное с вероятностью единица, является также статистически слабо инвариантным с вероятностью единица. Кроме того, если множество статистически инвариантно с вероятностью единица, то оно статистически слабо инвариантно с вероятностью единица.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 2 работы [5].

Теорема 3. *Пусть* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\nu(\Sigma_0) = 1$ *и для всех* $\sigma \in \Sigma_0$ *для каждой точки* $x \in M(\sigma)$ *найдется решение включения* (4), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x) = x$ *и продолжаемое на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют локально липшицева функция* $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, *для которых выполнены условия:*

1) *для всех* $\sigma \in \Sigma_0$ *функция* $w(h^t\sigma,z)$ *удовлетворяет условию* 1 *и*

$$\varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1, \tag{14}$$

где $z^*(t,\sigma)$ *— верхнее решение задачи Коши* (10);

2) *функция* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и для всех* $(\sigma,x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma,x) \leqslant w\bigl(\sigma, V(\sigma,x)\bigr). \tag{15}$$

Тогда множество M *статистически слабо инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 для всех $\sigma \in \Sigma_0$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (10) определено при всех $t \geqslant 0$. Из теоремы 2 работы [5] следует, что для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (4), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$, для которого верхняя относительная частота $\operatorname{freq}^*(\varphi) = 1$. Поскольку $\nu(\Sigma_0) = 1$, это и означает, что множество M статистически слабо инвариантно с вероятностью единица.

§ 5. Управляемая система со случайными параметрами, параметризованная динамической системой

Целью данной работы является исследование статистически инвариантных множеств управляемых систем со случайными параметрами, в частности, системы вида

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{16}$$

которую мы будем отождествлять со случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr)$.

Система (16) параметризована метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, действующей на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, которое является прямым произведением двух вероятностных пространств:

$$(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu) = (\Sigma_1 \times \Sigma_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \nu_1 \times \nu_2).$$

Здесь Σ_1 означает пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in (0, \infty)$, $\mathfrak{A}_1$ — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$C_k \doteq C(I_1, \ldots, I_k) = \{\theta \in \Sigma_1 : \theta_1 \in I_1, \ldots, \theta_k \in I_k\},$$

где $I_i \doteq (t_i, s_i]$, а вероятностная мера ν_1 определена следующим образом. Для каждого полуинтервала I_i определим вероятностную меру $\widetilde{\nu}_1(I_i) = F_i(s_i) - F_i(t_i)$ с помощью функций распределения $F_i(t)$, $t \in (0, \infty)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde{\nu}_1(C_k) = \widetilde{\nu}_1(I_1)\widetilde{\nu}_1(I_2)\ldots\widetilde{\nu}_1(I_k).$$

Тогда существует единственная вероятностная мера ν_1 на измеримом пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$, которая является продолжением меры $\widetilde{\nu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$ (см. [16, с. 176]).

Далее, $\Sigma_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots), \varphi_k \in \Psi\}$, где $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$, $\ell \geqslant 2$ — конечное множество матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, A_i и B_i — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно; $\mathfrak{A}_2$ — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $G_k = G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, где G_k — совокупность всех последовательностей из Σ_2, у которых фиксированы $k+1$ первых координат. Пусть заданы неотрицательные функции $\pi_i = p_0(\psi_i)$, $p_{ij} = p\,(\psi_i, \psi_j)$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{\ell} p_{ij} = 1$. Предполагаем также, что числа $\pi_1, \ldots, \pi_\ell$ удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_k = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i p_{ik}, \quad k = 1, \ldots, \ell. \tag{17}$$

Всякое неотрицательное решение данной системы, удовлетворяющее условию $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1$, принято называть стационарным или инвариантным распределением вероятностей цепи Маркова. Меру цилиндрического множества G_k определим равенством

$$\widetilde{\nu}_2(G_k) = p_0(\varphi_0)p\,(\varphi_0, \varphi_1)\ldots p\,(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$$

и обозначим через ν_2 продолжение меры $\widetilde{\nu}_2$ с алгебры цилиндрических множеств на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_2$. На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ введем последовательность случайных величин $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots)$, где $\zeta_k(\varphi) = \varphi_k$, $\varphi_k \in \Psi$. Отметим, что последовательность ζ образует однородную цепь Маркова, которая является *стационарной в узком смысле,* то есть для любых $k \geqslant 1$ и $\Psi_0, \Psi_1, \ldots \in \mathfrak{I}$ выполнено равенство

$$\nu_2(\zeta_0 \in \Psi_0, \zeta_1 \in \Psi_1, \ldots) = \nu_2(\zeta_k \in \Psi_0, \zeta_{k+1} \in \Psi_1, \ldots),$$

где $\mathfrak{I}$ — сигма-алгебра подмножеств Ψ (см. [16, с. 131]).

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $\tau_0 = 0$, $\tau_k(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i$, где $\theta \in \Sigma_1$. Предполагаем, что $\theta_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, причем $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют одинаковое распределение $F(t)$, $t \in (0, \infty)$, с математическим ожиданием m_θ. Обозначим через $z = z(t)$ число точек последовательности $\{\tau_k\}$, расположенных левее t, то есть $z = \max\{k : \tau_k \leqslant t\}$, $t \geqslant 0$. Величина $z(t)$ называется процессом восстановления. Предполагаем, что $z(t)$ является стационарным процессом восстановления, то есть этот процесс имеет постоянную скорость восстановления; тогда распределение случайной величины θ_1 определяется следующей формулой (см. [17, с. 145–147]):

$$F_1(t) = \frac{1}{m_\theta} \int_0^t \bigl(1 - F(s)\bigr) ds, \quad t > 0. \tag{18}$$

На вероятностном пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ определим преобразование сдвига

$$h_1^t \theta = (\tau_{z+1} - t, \theta_{z+2}, \theta_{z+3}, \ldots), \quad t > 0.$$

Поскольку $z(t)$ — стационарный процесс восстановления, преобразование h_1^t сохраняет меру ν_1, то есть для любого множества $G \in \mathfrak{A}_1$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство $\nu_1(h_1^t G) = \nu_1(G)$. На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ при каждом $\theta \in \Sigma_1$ определим преобразование сдвига равенством $h_2^t(\theta)\varphi = (\varphi_z, \varphi_{z+1}, \ldots)$. Из стационарности цепи Маркова следует, что преобразование h_2^t сохраняет меру ν_2. На пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ также определим преобразование сдвига

$$h^t \sigma = h^t(\theta, \varphi) = \bigl(h_1^t \theta, h_2^t(\theta)\varphi\bigr).$$

Построенная динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ называется косым произведением динамических систем $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1, h_1^t)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2, h_2^t(\theta))$, а преобразование $h^t\sigma$ сохраняет меру $\nu = \nu_1 \times \nu_2$ (см. [8, с. 190]).

Пусть $\xi(\sigma) = \zeta_0(\sigma)$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$. Определим случайный процесс $\xi(h^t\sigma) \doteq \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr)$, порождаемый потоком $h^t\sigma$. Тогда функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ кусочно-постоянная при каждом $\sigma \in \Sigma$ и принимает значения в множестве Ψ. Отметим, что функция $\xi(h^t\sigma)$ является *стационарным в узком смысле* случайным процессом, то есть для любого цилиндрического множества $G \in \mathfrak{A}$ выполнено равенство $\nu(h^t G) = \nu(G)$ (см. [8, с. 167], [16, с. 433]).

§ 6. Равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ и сходимость случайных величин с вероятностью единица

Для эффективного применения теорем 2 и 3 к исследованию статистически инвариантных множеств системы (16) нужно ответить на следующие вопросы. Во-первых, какими должны быть функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$, чтобы они удовлетворяли неравенствам (12) или (15)? Во-вторых, как определить, что равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица?

Оказывается, что для проверки инвариантности множества M относительно управляемой системы (16) удобно рассматривать функцию $w(\sigma, z) = a(\sigma)z + b(\sigma)$ и предполагать, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ являются кусочно-постоянными и имеют точки разрыва, совпадающие с точками разрыва траекторий случайного процесса $\xi(h^t\sigma) = \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr)$. Отметим, что для функции $w(h^t\sigma, z)$ условие 1 выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$ в том случае, когда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ точки переключения случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы, а функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ ограничены.

Таким образом, нужно исследовать поведение решения $z(t, \sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{19}$$

и найти условия, при которых для почти всех $\sigma \in \Sigma$ предел

$$\varkappa(\sigma) = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

существует и равен единице.

Для параметризации задачи (19) выбираем динамическую систему $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая отличается от системы, построенной в предыдущем параграфе, только тем, что для пространства Σ_2 множество $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ содержит пары чисел $\psi_i \doteq (a_i, b_i)$. Определим случайный процесс $\eta(h^t\sigma) \doteq \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$, порождаемый потоком $h^t\sigma$, и отметим, что при каждом $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \eta(h^t\sigma)$ кусочно-постоянная и $\eta(h^t\sigma) = \varphi_k$ при всех $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, где $\varphi_k = (a_k, b_k) \in \Psi$. Точки $\tau_1, \tau_2, \ldots$ разрыва траекторий случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$ будем называть точками переключения данного процесса. Предполагаем, что случайный процесс $\eta(h^t\sigma)$ (или, что равносильно, процесс $\xi(h^t\sigma)$) удовлетворяет следующему условию.

Условие 2. Найдется множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ точки переключения случайного процесса изолированы и число таких точек бесконечно.

Если множество Σ_0 не совпадает с Σ, но $\nu(\Sigma_0) = 1$, будем говорить, что условие 2 выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Например, для случайного процесса с показательным распределением длин интервалов θ_k между точками переключения условие 2 выполнено для почти всех σ (см. [18, с. 15]). Далее, если для некоторого случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$ существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta < \infty$ такие, что $\theta_k \in [\alpha, \beta]$ для всех $k \geqslant 2$, то условие 2 выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$, то есть $\Sigma_0 = \Sigma$.

Функцию $z(t, \sigma)$ — решение задачи (19) — будем рассматривать как случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$. Определим случайную последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k \doteq z(\tau_k, \sigma)$ совпадает со значениями функции $z(t, \sigma)$ в точках переключения случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$. Обозначим через Mz_k математическое ожидание случайной величины z_k и для тех $k \in \mathbb{N}$, для которых $Mz_k \neq 0$, рассмотрим случайные величины $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k}$.

Определение 9. Последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *сходящейся с вероятностью единица* (*почти наверное*) к случайной величине ζ, если

$$\nu\{\sigma : \zeta_k \not\to \zeta\} = 0,$$

то есть если множество тех исходов σ, для которых $\zeta_k(\sigma)$ не сходятся к $\zeta(\sigma)$, имеет нулевую вероятность (см. [16, с. 270]).

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* 2, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ *и последовательность случайных величин* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k}$, *сходится к единице почти наверное.*

Тогда $\varkappa(\sigma) = 1$ *с вероятностью единица.*

Доказательство. Пусть $\varlimsup\limits_{k\to\infty} Mz_k = \alpha < 0$ и $\alpha \neq -\infty$, тогда найдется такое число k_1, что для всех $k \geqslant k_1$ математическое ожидание $Mz_k < \dfrac{\alpha}{2} < 0$. Обозначим через Σ_0 множество тех σ, для которых выполнено условие 2 и $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_k = 1$, тогда $\nu(\Sigma_0) = 1$. Пусть $\sigma \in \Sigma_0$ фиксировано, тогда найдется такое число $k_2 = k_2(\sigma)$, что

$$\Big|\frac{z(\tau_k, \sigma)}{Mz_k} - 1\Big| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_2.$$

Следовательно, для всех $k \geqslant k_0 = \max(k_1, k_2)$ выполнены неравенства

$$z(\tau_k, \sigma) \leqslant \frac{Mz_k}{2} < \frac{\alpha}{4} < 0,$$

то есть случайный процесс $z(t, \sigma)$ принимает отрицательные значения в точках переключения τ_k, $k \geqslant k_0$. Покажем, что $z(t, \sigma) < 0$ при всех $t \geqslant \tau_{k_0}$. Действительно, пусть

$\eta(h^t\sigma) = \varphi_k = (a_k, b_k) \in \Psi$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, тогда функция $z(t,\sigma)$ является решением задачи Коши

$$\dot z = a_k z + b_k, \quad z(\tau_k, \sigma) = z_k$$

при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$. Следовательно, если $a_k \neq 0$, то функция $z(t,\sigma)$ задается равенством

$$z(t,\sigma) = -\frac{b_k}{a_k} + \Big(z_k + \frac{b_k}{a_k}\Big)\exp\big(a_k(t-\tau_k)\big)$$

для всех $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ и поэтому достигает наибольшего значения на концах данного отрезка (это также верно и в случае, когда $a_k = 0$). Таким образом, поскольку $z(\tau_k, \sigma) < 0$ для всех $k \geqslant k_0$, то $z(t,\sigma) < 0$ при всех $t \geqslant \tau_{k_0}$. Отметим также, что из условия 2 следует, что $\tau_{k_0} < \infty$, поэтому для всех $\sigma \in \Sigma_0$ выполнено равенство $\varkappa(\sigma) = 1$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k = -\infty$ и $\sigma \in \Sigma_0$, то найдутся такие числа k_1, k_2, что для всех $k \geqslant k_1$ выполнено неравенство $Mz_k \leqslant -2$ и для всех $k \geqslant k_2$ — неравенство

$$\Big|\frac{z(\tau_k,\sigma)}{Mz_k} - 1\Big| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда $z(\tau_k, \sigma) \leqslant \dfrac{Mz_k}{2} \leqslant -1$ для всех $k \geqslant k_0 = \max(k_1, k_2)$. Аналогично доказанному выше, в этом случае также выполнено равенство $\varkappa(\sigma) = 1$. □

Напомним, что через Mz_k обозначено математическое ожидание случайной величины z_k, и обозначим через $Dz_k \doteq M(z_k - Mz_k)^2$ дисперсию этой случайной величины.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* 2, $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{Dz_k}{(Mz_k)^2}$ *сходится. Тогда* $\varkappa(\sigma) = 1$ *с вероятностью единица.*

Доказательство. Пусть $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k}$, $k = 1, 2\ldots$ — последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$. Обозначим через ζ случайную величину, заданную на $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ и принимающую постоянное значение $\zeta = 1$. Отметим, что если для каждого $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu\Big(\Big|\frac{z_k}{Mz_k} - \zeta\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\big(|\zeta_k - 1| \geqslant \varepsilon\big) < \infty, \tag{20}$$

то последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к случайной величине $\zeta = 1$ почти наверное (см. [16, с. 272]). Из определения ζ_k следует, что математическое ожидание этих случайных величин $M\zeta_k = 1$, поэтому, в силу неравенства Чебышева, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\nu\big(|\zeta_k - M\zeta_k| \geqslant \varepsilon\big) = \nu\big((\zeta_k - 1)^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \frac{D\zeta_k}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{Dz_k}{(Mz_k)^2}.$$

Таким образом, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{Dz_k}{(Mz_k)^2}$ следует, что выполнено условие (20) и последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к случайной величине $\zeta = 1$ почти наверное. В силу леммы 3 равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица.

Замечание 2. Если для каждого $k \in \mathbb{N}$ случайная величина z_k является суммой *независимых одинаково распределенных* случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_k$, то можно существенно ослабить предположения, сделанные в лемме 4, для сходимости последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ почти наверное. В этом случае, в силу *теоремы Колмогорова* (см. [16, с. 418]), если $M|\eta_1| < \infty$, то $\dfrac{z_k}{k} \to M\eta_1$ почти наверное. Поскольку $Mz_k = kM\eta_1$, то, в предположении, что $M\eta_1 \neq 0$, $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k} \to 1$ почти наверное.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, действующую на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu) = (\Sigma_1 \times \Sigma_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \nu_1 \times \nu_2)$, построенном в пятом параграфе. Напомним, что Σ_1 является пространством числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, и предположим, что положительные случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ независимы, $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием $m_\theta < \infty$, математическое ожидание случайной величины θ_1 равно $m_1 < \infty$.

Пусть $\Sigma_2 = \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_k, \ldots), \varphi_k \in \Psi\}$, где $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$, и если система находится в состоянии ψ_i, то движение системы удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = b_i, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Предположим, что из любого состояния $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ система переходит в состояние ψ_i с вероятностью p_i, $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$ независимо от предыдущего состояния, тогда случайные величины $b_1, b_2, \ldots$ независимы. Пусть задано начальное распределение $\pi = (p_1, \ldots, p_\ell)$, которое является решением системы (17), следовательно, является также и стационарным распределением вероятностей цепи Маркова.

Рассмотрим случайную величину $\eta(\sigma) = \varphi_0$, которая принимает значения $\psi_i = b_i$, если $\varphi_0 = \psi_i$, $i = 1, \ldots, \ell$. Обозначим через $\eta(h^t\sigma) \doteq b(h^t\sigma)$ стационарный случайный процесс, порождаемый потоком $h^t\sigma$. Процессу $\eta(h^t\sigma)$ поставим в соответствие задачу Коши

$$\dot{z} = b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{21}$$

и обозначим решение данной задачи через $z(t, \sigma)$. Рассмотрим случайную последовательность $z_k \doteq z(\tau_k, \sigma)$, совпадающую со значениями функции $z(t, \sigma)$ в точках переключения данного процесса $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Покажем, что для задачи (21) случайную величину z_k можно представить в виде суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Действительно, если $b(h^t\sigma) = \varphi_k = b_k$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, то $z_{k+1} = z(\tau_{k+1}, \sigma) = b_k\theta_k + z_k$, тогда из независимости случайных величин $\theta_1, \theta_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ следует независимость величин $\eta_k = z_k - z_{k-1} = b_k\theta_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку распределение $\pi = (p_1, \ldots, p_\ell)$ является стационарным распределением вероятностей, то для любого $k \in \mathbb{N}$ математическое ожидание $Mb_k = \sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i p_i \doteq m_b$, и из независимости случайных величин θ_k и b_k следует, что

$$M\eta_1 = M(b_1\theta_1) = Mb_1 M\theta_1 = m_b m_1,$$
$$M\eta_k = M(b_k\theta_k) = Mb_k M\theta_k = m_b m_\theta, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Случайная величина z_k равна сумме $\eta_1 + \ldots + \eta_k$, следовательно,

$$Mz_k = \sum_{i=1}^{k} M\eta_i = m_b m_1 + (k-1) m_b m_\theta.$$

Поскольку $\theta_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, то $m_1 > 0$, $m_\theta > 0$, и если $m_b < 0$, то $Mz_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Покажем, что последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k}$, сходится к единице почти наверное. Поскольку математические ожидания m_1, m_θ и $M|b_k| = \sum\limits_{i=1}^{\ell} |b_i| p_i$ конечны, то $M|\eta_k| < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу теоремы Колмогорова, последовательность $\{\gamma_k\}_{k=2}^{\infty}$, где $\gamma_k = \dfrac{\eta_2 + \ldots + \eta_k}{k-1}$, сходится к $M\eta_k = m_b m_\theta$ почти наверное. Рассмотрим случайные величины

$$\frac{z_k}{k} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k},$$

тогда последовательность $\{\frac{z_k}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ также сходится к математическому ожиданию $m_b m_\theta$ почти наверное. Далее, если $m_b \neq 0$, то

$$\zeta_k = \frac{z_k}{Mz_k} = \frac{z_k}{m_b(m_1 + (k-1)m_\theta)} = \frac{z_k}{km_b m_\theta} \cdot \frac{km_\theta}{m_1 + (k-1)m_\theta},$$

поэтому последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к единице почти наверное. Таким образом, в силу леммы 3, если математическое ожидание $m_b = \sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i p_i < 0$, то $\varkappa(\sigma) = 1$ с вероятностью единица.

§ 7. Достаточные условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ с вероятностью единица

Рассмотрим метрическую динамическую систему $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, действующую на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, построенном в пятом параграфе. Предполагаем, что $\theta_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, причем $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют одинаковое распределение $F(t)$, $t \in (0, \infty)$, а функция распределения $F_1(t)$ случайной величины θ_1 задается формулой (18). Пусть Ψ содержит конечное множество числовых пар $\{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$, где $\psi_i = (a_i, b_i)$, $a_i \neq 0$, $\ell \geqslant 2$. Каждому состоянию ψ_i поставим в соответствие линейное уравнение

$$\dot{z} = a_i z + b_i, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Предполагаем, что из любого состояния $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ система переходит в состояние ψ_i с вероятностью $p_i > 0$, $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$ и задано начальное распределение $\pi = (p_1, \ldots, p_\ell)$.

Рассмотрим случайную величину η на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, заданную равенством $\eta(\sigma) = \varphi_0$, то есть $\eta(\sigma) = \psi_i = (a_i, b_i)$, если $\varphi_0 = \psi_i$, $i = 1, \ldots, \ell$. Пусть $\eta(h^t\sigma) \doteq \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$ — стационарный случайный процесс, порождаемый потоком $h^t\sigma$ и удовлетворяющий условию 2. Процессу $\eta(h^t\sigma)$ поставим в соответствие задачу Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}, \quad z(0, \sigma) = 0, \tag{22}$$

и обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots$ точки переключения данного процесса при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$.

Пусть $C_i \doteq \dfrac{b_i}{a_i}$, $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, \ell$. В следующем примере для системы (22) в случае, когда $C_1 = \ldots = C_\ell$, получены условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$, выполненные с вероятностью единица. Эти результаты нужны для получения более общего утверждения.

Пример 2. Рассмотрим систему (22) и предположим, что $C_1 = \ldots = C_\ell \doteq C$. Обозначим через $z_1 = z(\tau_1, \sigma)$ случайную величину на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, которая совпадает с решением задачи (22) в момент времени $t = \tau_1$. Отметим, что $\tau_1 = \theta_1$ также является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t)$, а случайная величина z_1 принимает значения $C(e^{a_i\theta_1} - 1)$ с вероятностями p_i, $i = 1, \ldots, \ell$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию z_1, используя свойства условного математического ожидания. Обозначим через $M(z_1 | \, \theta_1 = t)$ *условное математическое ожидание* случайной величины z_1 относительно события $\theta_1 = t$, тогда

$$M(z_1 | \, \theta_1 = t) = C\sum_{i=1}^{\ell}(e^{a_i t} - 1)p_i = C\sum_{i=1}^{\ell} e^{a_i t}p_i - C.$$

Поскольку случайная величина θ_1 имеет функцию распределения $F_1(t)$, по формуле полного математического ожидания найдем

$$Mz_1 = M\{M(z_1 | \, \theta_1 = t)\} = C\sum_{i=1}^{\ell}\Big(p_i \int_0^{\infty} e^{a_i t} dF_1(t)\Big) - C. \tag{23}$$

Выполняя аналогичные вычисления, найдем дисперсию случайной величины z_1 :

$$Dz_1 = C^2 \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^{\infty} e^{2a_i t} dF_1(t) \Big) - C^2 \left(\sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^{\infty} e^{a_i t} dF_1(t) \Big) \right)^2. \tag{24}$$

Обозначим $\alpha_1 \doteq \sum\limits_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^{\infty} e^{a_i t} dF_1(t) \Big)$, $\beta_1 \doteq \sum\limits_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^{\infty} e^{2a_i t} dF_1(t) \Big)$, тогда

$$Mz_1 = C(\alpha_1 - 1), \quad Dz_1 = C^2(\beta_1 - \alpha_1^2).$$

Рассмотрим последовательность случайных величин ζ_k, $k = 2, 3, \ldots$, каждая из которых принимает значения $e^{a_i \theta_k}$ с вероятностями p_i, $i = 1, \ldots, \ell$. Напомним, что θ_k — независимые случайные величины с функцией распределения $F(t)$, тогда случайные величины ζ_k также независимы и одинаково распределены. Введем обозначения

$$\alpha \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^{\infty} e^{a_i t} dF(t) \Big), \quad \beta \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^{\infty} e^{2a_i t} dF(t) \Big)$$

и, аналогично изложенному выше, найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M\zeta_k = \alpha, \quad D\zeta_k = \beta - \alpha^2.$$

Напомним, что через $z_k = z(\tau_k, \sigma)$ мы обозначаем случайную величину на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, которая совпадает с решением задачи (22) в момент времени $t = \tau_k = \theta_1 + \ldots + \theta_k$. Поскольку z_{k-1} зависит только от величин $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$, а ζ_k зависит только от θ_k, из независимости случайных величин θ_k, $k \geqslant 1$, следует, что z_{k-1} и ζ_k также независимы. Кроме того, справедливо равенство

$$z_k = \zeta_k \cdot z_{k-1} + C(\zeta_k - 1), \quad k \geqslant 2. \tag{25}$$

Найдем

$$Mz_k = M\zeta_k \cdot Mz_{k-1} + C(M\zeta_k - 1) = \alpha \cdot Mz_{k-1} + C(\alpha - 1), \quad k \geqslant 2.$$

Применяя последовательно предыдущую формулу и равенство (23), получаем:

$$Mz_k = \alpha^{k-1} Mz_1 + C(\alpha - 1)(\alpha^{k-2} + \ldots + \alpha^2 + \alpha + 1) = \\ = \alpha^{k-1}(Mz_1 + C) - C = C(\alpha^{k-1}\alpha_1 - 1). \tag{26}$$

Следующая задача — выразить дисперсию Dz_k через Dz_{k-1}, $k \geqslant 2$. Сначала, используя равенство (25) и свойство дисперсии суммы, найдем

$$Dz_k = D(\zeta_k z_{k-1}) + 2C \cdot \mathrm{Cov}(\zeta_k z_{k-1}, \zeta_k - 1) + C^2 D(\zeta_k - 1),$$

где $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) \doteq M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta$ — ковариация случайных величин ξ и η. Поскольку случайные величины z_{k-1} и ζ_k независимы, то

$$D(\zeta_k z_{k-1}) = M(\zeta_k z_{k-1})^2 - \big(M(\zeta_k z_{k-1})\big)^2 = M\zeta_k^2 M z_{k-1}^2 - (M\zeta_k)^2 (Mz_{k-1})^2 = \\ = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + M\zeta_k^2 (Mz_{k-1})^2 - (M\zeta_k)^2 (Mz_{k-1})^2 = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + (Mz_{k-1})^2 D\zeta_k,$$

$$\mathrm{Cov}(\zeta_k z_{k-1}, \zeta_k - 1) = M(\zeta_k z_{k-1}(\zeta_k - 1)) - M(\zeta_k z_{k-1}) \cdot M(\zeta_k - 1) = \\ = Mz_{k-1}\big(M(\zeta_k(\zeta_k - 1)) - M(\zeta_k) \cdot M(\zeta_k - 1)\big) = Mz_{k-1}\mathrm{Cov}(\zeta_k, \zeta_k - 1) = Mz_{k-1} D\zeta_k.$$

Таким образом,

$$Dz_k = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + (Mz_{k-1})^2 D\zeta_k + 2CMz_{k-1}D\zeta_k + C^2 D\zeta_k = \\ = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + (Mz_{k-1} + C)^2 D\zeta_k. \tag{27}$$

Далее, из (24), (26) и (27) получаем

$$Dz_k = \beta^{k-1}Dz_1 + (Mz_1 + C)^2(\beta^{k-1} - \alpha^{2(k-1)}) = C^2\beta_1\beta^{k-1} - C^2\alpha_1^2\alpha^{2(k-1)}.$$

Поскольку случайный процесс $\eta(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию 2, то, согласно лемме 4, равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица, если $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{Dz_k}{(Mz_k)^2}$. Из (26) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ в случае, когда $\alpha < 1$ и $C > 0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ также и в некоторых других случаях, но там не будет сходимости ряда).

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Dz_k}{(Mz_k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_1\beta^{k-1} - \alpha_1^2\alpha^{2(k-1)}}{(\alpha^{k-1}\alpha_1 - 1)^2}$$

сходится, если выполнено неравенство $\beta < 1$. Действительно, поскольку $D\zeta_k = \beta - \alpha^2 \geqslant 0$ и $\alpha > 0$, то из неравенства $\alpha^2 \leqslant \beta < 1$ следует неравенство $0 < \alpha < 1$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha^{k-1} = 0$, поэтому найдется такое натуральное число k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ выполнено неравенство $\alpha^{k-1} < \dfrac{1}{2\alpha_1}$ (из определения α_1 следует, что $\alpha_1 > 0$). Из последнего неравенства после некоторых преобразований получаем неравенство

$$\frac{1}{(\alpha^{k-1}\alpha_1 - 1)^2} < 4,$$

из которого, в свою очередь, следует оценка для суммы ряда:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{Dz_k}{(Mz_k)^2} < 4\sum_{k=k_0}^{\infty} \bigl(\beta_1\beta^{k-1} - \alpha_1^2\alpha^{2(k-1)}\bigr).$$

Последний ряд является разностью двух сходящихся рядов, поэтому исходный ряд сходится, если $\beta < 1$. Таким образом, если

$$C = \frac{b_1}{a_1} = \ldots = \frac{b_\ell}{a_\ell} > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\ell}\Bigl(p_i\int_0^{\infty} e^{2a_it}dF(t)\Bigr) < 1,$$

то $\varkappa(\sigma) = \lim\limits_{\vartheta\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1$ с вероятностью единица.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* 2, $a_i \neq 0$ *для всех* $i = 1,\ldots,\ell$, $\ell \geqslant 2$, *и найдется такое* $j \in \{1,\ldots,\ell\}$, *что* $a_j > 0$. *Далее, если имеют место неравенства*

$$\min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} \geqslant \max_{\{i:\, a_i>0\}} \frac{b_i}{a_i}, \qquad \min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} > 0, \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Bigl(p_i\int_0^{\infty} e^{2a_it}dF(t)\Bigr) < 1, \tag{29}$$

то для задачи Коши (22) *равенство* $\varkappa(\sigma) = 1$ *выполнено с вероятностью единица.*

Замечание 3. Из неравенства (29) следует, что обязательно найдется такое число $j \in \{1,\ldots,\ell\}$, что $a_j < 0$. Предположим, что это не так, то есть $a_i > 0$ для всех $i = 1,\ldots,\ell$, тогда

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Bigl(p_i\int_0^{\infty} e^{2a_it}dF(t)\Bigr) > \sum_{i=1}^{\ell}\Bigl(p_i\int_0^{\infty} dF(t)\Bigr) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1,$$

что противоречит (29).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Рассмотрим вспомогательный случайный процесс $\widetilde{\eta}(h^t\sigma) = \big(a(h^t\sigma), \widetilde{b}(h^t\sigma)\big)$ и соответствующую ему задачу Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + \widetilde{b}(h^t\sigma), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}, \quad z(0, \sigma) = 0. \tag{30}$$

Предполагаем, что случайный процесс $\widetilde{\eta}(h^t\sigma)$ определен на том же вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, что и процесс $\eta(h^t\sigma) = \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$, и отличается от данного процесса только постоянными $\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_\ell$, которые удовлетворяют соотношениям

$$b_1 \leqslant \widetilde{b}_1, \,\ldots,\, b_\ell \leqslant \widetilde{b}_\ell, \quad \frac{\widetilde{b}_1}{a_1} = \ldots = \frac{\widetilde{b}_\ell}{a_\ell} > 0.$$

Покажем, что если выполнены неравенства (28), то такие постоянные $\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_\ell$ существуют. Пусть $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ — такое число (или любое из таких чисел), что $\min\limits_{\{i:\, a_i<0\}} \dfrac{b_i}{a_i} = \dfrac{b_j}{a_j} > 0$, тогда положим $\widetilde{b}_j = b_j$. Для всех $i \neq j$ определим $\widetilde{b}_i = \dfrac{a_i}{a_j}\widetilde{b}_j$, тогда для всех $a_i < 0$ выполнено неравенство $b_i \leqslant \dfrac{a_i}{a_j}\widetilde{b}_j$, то есть $b_i \leqslant \widetilde{b}_i$. Рассмотрим множество тех $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, для которых $a_i > 0$. Из неравенств (28) и определения $\widetilde{b}_j$ следует, что

$$\frac{b_i}{a_i} \leqslant \max_{\{i:\, a_i>0\}} \frac{b_i}{a_i} \leqslant \min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j} = \frac{\widetilde{b}_j}{a_j},$$

то есть $b_i \leqslant \dfrac{a_i}{a_j}\widetilde{b}_j = \widetilde{b}_i$. Отметим, что из неравенства $\dfrac{\widetilde{b}_j}{a_j} > 0$ и определения $\widetilde{b}_i$ для любых значений a_i следует соотношение $\dfrac{\widetilde{b}_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{\widetilde{b}_\ell}{a_\ell} > 0$.

Пусть $\widetilde{z}(t, \sigma)$ — решение задачи Коши (30) при некотором фиксированном $\sigma \in \Sigma$, определим характеристику

$$\widetilde{\varkappa}(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \widetilde{z}(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

— относительную частоту попадания траектории решения $\widetilde{z}(t, \sigma)$ в множество $(-\infty, 0]$. Обозначим через Σ_0 множество тех $\sigma \in \Sigma$, для которых выполнено условие 2, и одновременно равенство $\widetilde{\varkappa}(\sigma) = 1$. Из условий

$$\sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF(t)\Big) < 1 \quad \text{и} \quad \frac{\widetilde{b}_1}{a_1} = \ldots = \frac{\widetilde{b}_\ell}{a_\ell} > 0$$

следует, что $\widetilde{\varkappa}(\sigma) = 1$ с вероятностью единица (см. пример 2), тогда $\nu(\Sigma_0) = 1$. Пусть $z(t, \sigma)$ — решение задачи (22) при некотором фиксированном $\sigma \in \Sigma_0$, тогда из неравенств $b_1 \leqslant \widetilde{b}_1, \ldots, b_\ell \leqslant \widetilde{b}_\ell$ следует, что в точках дифференцируемости функция $z(t, \sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{z} \leqslant a(h^t\sigma)z + \widetilde{b}(h^t\sigma), \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому, в силу теоремы 1, для заданного $\sigma \in \Sigma_0$ для всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство $z(t, \sigma) \leqslant \widetilde{z}(t, \sigma)$, где $\widetilde{z}(t, \sigma)$ — решение задачи Коши (30) при том же значении $\sigma \in \Sigma_0$.

Далее, для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ из неравенства $z(t, \sigma) \leqslant \widetilde{z}(t, \sigma)$ следует неравенство для относительных частот:

$$\varkappa(\sigma) \geqslant \widetilde{\varkappa}(\sigma) = 1.$$

Таким образом, $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$ и $\nu(\Sigma_0) = 1$, то есть равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица.

Замечание 4. Пусть $\eta\big(h^t\sigma\big) \doteq \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$ — стационарный случайный процесс, соответствующий задаче Коши (22) и удовлетворяющий условию 2. Несложно показать, что если $b_i \leqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$, то для любых значений a_i и любого распределения случайных величин $\theta_2, \theta_3, \ldots$ равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица. Далее, если $b_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, \ell$, и условие 2 выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$, то $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$.

Действительно, пусть Σ_0 — множество тех $\sigma \in \Sigma$, для которых выполнено условие 2. Покажем, что в случае, когда $b_i \leqslant 0$, $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, \ell$, траектория системы (22), выходящая из точки $z_0 = 0$, для всех $\sigma \in \Sigma_0$ при всех $t \geqslant 0$ будет находиться в множестве $(-\infty, 0]$, поэтому равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma_0$. Предположим, что на промежутке $[0, \tau_1)$ система (22) находится в состоянии ψ_i, $i = 1, \ldots, \ell$, тогда движение данной системы задается уравнением $z(t, \sigma) = \dfrac{b_i}{a_i}\big(e^{a_i t} - 1\big)$, где $b_i \leqslant 0$, $a_i \neq 0$. Следовательно, $z(t, \sigma) \leqslant 0$ при всех $t \in [0, \tau_1]$. Далее, если при $t \in [\tau_1, \tau_2)$ система (22) находится в одном из состояний ψ_j, $j = 1, \ldots, \ell$, то решением системы является функция

$$z(t, \sigma) = \frac{b_j}{a_j}\big(e^{a_j(t-\tau_1)} - 1\big) + z(\tau_1, \sigma) e^{a_j(t-\tau_1)},$$

где $b_j \leqslant 0$. Здесь из неравенств $b_j \leqslant 0$, $z(\tau_1, \sigma) \leqslant 0$ получаем, что $z(t, \sigma) \leqslant 0$ при всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Понятно также, что если $b_i \leqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$, то неравенство $z(t, \sigma) \leqslant 0$ выполнено при всех $\sigma \in \Sigma_0$ и всех $t \in [0, \infty)$. Аналогично рассматривается случай, когда $b_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, \ell$, и среди значений a_i существуют равные нулю.

Пример 3. Рассмотрим управляемую систему (16), которую мы отождествляем со случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$. Предполагаем, что $\xi(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию 2 и множество Ψ содержит два состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Системе (16) и множеству $U = [0{,}5; 1]$ поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{31}$$

где $H(h^t\sigma, x)$ — множество всех предельных значений функции

$$f\big(h^t\sigma, x, U\big) = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)U$$

для фиксированного $\sigma \in \Sigma$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$, $\operatorname{co} H(\sigma, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$.

Рассмотрим следующую задачу: выяснить, при каких $r > 0$ замкнутый шар $O_r(0)$ является статистически слабо инвариантным множеством с вероятностью единица относительно управляемой системы (16).

Обозначим через S_{1i} подмножество пространства Σ_1, которое является множеством последовательностей $\{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots), \varphi_0 = \psi_i, \varphi_k \in \Psi\}$ с фиксированой первой координатой: $\varphi_0 = \psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$. Поскольку множество Ψ содержит два состояния ψ_1, ψ_2, то $\Sigma_1 = S_{11} \bigcup S_{12}$ и пространство Σ можно представить в виде суммы непересекающихся множеств S_1 и S_2, где $S_1 = S_{11} \times \Sigma_2$, $S_2 = S_{12} \times \Sigma_2$. Таким образом, если $\sigma \in S_i$, то $f(\sigma, x, u) = A_i x + B_i u$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - r^2, \quad x = (x_1, x_2)$$

относительно множества $O_r(0)$ и найдем нижние производные данной функции в силу включения (31). Если $\sigma \in S_1$, то

$$V^o_{\min}(\sigma, x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 + \dfrac{1}{2}x_2, & x_2 \geqslant 0, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_2, & x_2 < 0, \end{cases}$$

если $\sigma \in S_2$, то

$$V^o_{\min}(\sigma,x)=\begin{cases} -2x_1^2-2x_2^2+\dfrac{1}{2}(x_1-x_2), & x_1\geqslant x_2,\\ -2x_1^2-2x_2^2+x_1-x_2, & x_1<x_2.\end{cases}$$

Несложно проверить, что для функции

$$w(\sigma,z)=\begin{cases} -2z+\dfrac{\sqrt{2}}{8}-2r^2, & \sigma\in S_1,\\ -2z+\dfrac{1}{2}-2r^2, & \sigma\in S_2,\end{cases}$$

для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).$$

Функция $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно множества $O_r(0)$, поэтому из последнего неравенства и результатов работы [19] следует, что для всех $\sigma\in\Sigma$ для каждой точки $x\in O_r(0)$ существует решение включения (31), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$.

Далее, поскольку при $r\geqslant 1/2$ имеют место неравенства

$$b_1=\frac{\sqrt{2}}{8}-2r^2\leqslant 0,\quad b_2=\frac{1}{2}-2r^2\leqslant 0,$$

то (см. замечание 4) для любого распределения случайных величин $\theta_2,\theta_3,\ldots$ равенство $\varkappa(\sigma)=1$ выполнено с вероятностью единица. Следовательно, в силу теоремы 3, множество $O_r(0)$, где $r\geqslant 1/2$, статистически слабо инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы (16).

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что при $r\geqslant\sqrt{2}/2$ множество $O_r(0)$ статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы (16).

Автор выражает благодарность за содержательное обсуждение результатов работы и ценные замечания Е. Л. Тонкову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aubin J.-P. Viability Theory. — Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 1991. — 543 p.

2. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 859–860.

3. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений и функции Ляпунова // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2008. — Т. 262. — С. 202–221.

4. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 185–201.

5. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, № 2. — С. 265–288.

6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

7. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Арнольд В. И., Бронштейн И. У., Гринес В. З., Ильяшенко Ю. С. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 1. — М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. — 244 с.

8. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

9. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 623 с.

10. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 223 с.

11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

12. Перов А. И. Несколько замечаний относительно дифференциальных неравенств // Известия вузов. Математика. — 1965. — № 4(47). — С. 104–112.

13. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. — М.: Наука, 1976. — С. 307–362.

14. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240 с.

15. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 300 с.

16. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 640 с.

17. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. — М.: Наука, 1985. — 640 с.

18. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1975. — 320 с.

19. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Вып. 1. — С. 67–86.

Поступила в редакцию 25.12.10

L. I. Rodina

The statistically invariant sets of control systems with random parameters

We investigate the properties of statistical invariance and statistically weak invariance with probability one for control systems with random parameters. We obtain the sufficient conditions for the invariance of the given set with respect to the control system formulated in terms of Lyapunov functions and the dynamical system of shifts. We prove the extension for the theorem of S. A. Chaplygin about differential inequalities and obtain the conditions of existence for the upper solution of Cauchy problem with piecewise continuous on t right-hand part without assumption of uniqueness of solution.

Keywords: controllable systems, dynamical systems, differential inclusions, statistically invariant sets with probability one.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

Родина Людмила Ивановна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет. 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: rdl@uni.udm.ru