МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 2

УДК 517.95

© *И. В. Лисаченко, В. И. Сумин*

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА–ДАРБУ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМОЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ[1]

Доказывается принцип максимума для терминальной задачи оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения при общих условиях, позволяющих искать решения системы в классе функций с суммируемой в некоторой степени смешанной производной.

Ключевые слова: нелинейная система Гурса–Дарбу, решения с суммируемой смешанной производной, терминальная задача оптимизации, принцип максимума.

Введение

Управляемая система Гурса–Дарбу — одна из тех управляемых систем, с обстоятельного изучения оптимизационных задач для которых начиналось в свое время создание математической теории оптимального управления распределенными системами. Для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу А. И. Егоровым (см., например, [1]) была получена одна из первых в классе распределенных систем достаточно общих формулировок необходимых условий оптимальности типа принципа максимума (см. [2, с. 333–345, с. 449–450], [3, с. 442–450]). Впоследствии вопросы вывода и анализа принципа максимума для задач оптимального управления системой Гурса–Дарбу, являющейся своего рода пробным камнем теории оптимизации распределенных систем, рассматривали многие авторы (см., например, краткие обзоры [4, с. 5], [5, с. 5–6], [6], а также работу [7]).

В последнее время наблюдается устойчивый интерес (см., например, [8–11]) к задачам оптимизации систем типа Гурса–Дарбу, рассматриваемых в классах абсолютно непрерывных функций с суммируемой в некоторой степени p смешанной производной. В этом случае, по сравнению с преимущественно изучавшимся до недавнего времени случаем решений с ограниченной смешанной производной (см., например, [4, 12–16] и др.), принцип максимума исследован еще мало.

В данной статье доказывается поточечный принцип максимума для терминальной задачи оптимизации нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения при достаточно общих условиях, позволяющих искать решения системы в классе функций с суммируемой в степени $p > 1$ смешанной производной (видимо, при столь общих условиях принцип максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу, рассматриваемой в классе функций с суммируемой в некоторой степени смешанной производной, ранее доказан не был). Для вывода принципа максимума применяется традиционное игольчатое варьирование. При вычислении вариаций функционалов существенно используется эквивалентная запись управляемой системы Гурса–Дарбу в виде вольтеррова функционального уравнения второго рода в лебеговом пространстве ([17–19]). Нетривиальное отличие этой процедуры от подобной, относящейся к случаю решений с ограниченной смешанной производной (см., например, [14, 20]) связано с тем, что здесь семейство линейных операторов правых частей линеаризованных функциональных уравнений, получающихся при разных параметрах

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 годы) (проект НК-13П-13) и АЦВП «Развитие потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/3927).

варьирования, не обладает, вообще говоря, общей квазинильпотентной мажорантой. Поэтому при вычислении вариаций функционалов используется введенное в [18] и описанное ниже в § 3 понятие равностепенно квазинильпотентного семейства операторов.

Статья состоит из шести параграфов. Сначала рассматривается поставленная в § 1 простейшая терминальная оптимизационная задача — оптимизационная задача без ограничений на максимум терминального функционала. Принцип максимума для нее следует непосредственно из формулы для вариации целевого функционала, отвечающей одноточечной игольчатой варианте управления. Теорема об этой формуле (теорема 2), сформулированная в § 1, — опорное утверждение статьи. Её доказательству посвящены §§ 2–5. В § 6 описано получение принципа максимума для общей терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу с ограничениями типа равенства и неравенства. Применяется схема учета ограничений при выводе необходимых условий оптимальности, предложенная В. И. Плотниковым (см., например, общее описание схемы в [21, 22]). В данном случае она опирается на многоточечное игольчатое варьирование управлений, соответствующая формула вариации терминального функционала — простой аналог формулы из теоремы 2.

Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\mathbf{R}^n$ — пространство n-векторов-столбцов $a \equiv \{a^1,\ldots,a^n\}$; если $a_1,\ldots,a_k \in \mathbf{R}^n$, то $\{a_1,\ldots,a_k\} \equiv \{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1^1,\ldots,a_1^n,\ldots,a_k^1,\ldots,a_k^n\} \in \mathbf{R}^{kn}$; модуль вектора равен сумме модулей его компонент; если X, Y — нормированные пространства, то $\mathfrak{L}(X,Y)$ — класс линейных ограниченных операторов из X в Y, а норма в прямом произведении $X\times Y$ определяется формулой $\|\{x,y\}\|_{X\times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$; если X — функциональное пространство, то X^n — пространство n-вектор-функций, а $X^{n\times n}$ — $(n\times n)$-матриц-функций, составленных из функций пространства X; I — тождественный оператор; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; * — знак транспонирования (для векторов и матриц) и сопряжения (для пространств и операторов); $p\in(1,\infty)$ — заданное число, $q\equiv p/(p-1)$.

§ 1. Простейшая терминальная задача. Теорема о вариации

Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)),\ t\equiv\{t^1,t^2\}\in\Pi\equiv[0,1]^2, \tag{1}$$

$$x(t^1,0)=\varphi_1(t^1),\ x(0,t^2)=\varphi_2(t^2),\ t^1\in[0,1],\ t^2\in[0,1], \tag{2}$$

где $g(t,l_0,l_1,l_2,v)\equiv g(t,l,v)\colon \Pi\times\mathbf{R}^{3n}\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ $(l=\{l_0,l_1,l_2\})$ и $\varphi_i(t^i)\colon[0,1]\to\mathbf{R}^n$, $i=1,2$ заданы, $u(t)\colon\Pi\to\mathbf{R}^m$ — управление. Считаем: $g(t,l,v)$ дифференцируема по l при каждом v для почти всех t и вместе с $g'_l(t,l,v)$ измерима по t при любых $\{l,v\}$ и непрерывна по $\{l,v\}$ для почти каждого t; $\varphi'_i\in L_p^n([0,1])$, $\varphi_i(0)=0$, $i\in\{1,2\}$; допустимы $u(\cdot)$, принимающие значения из ограниченного множества $V\subset\mathbf{R}^m$ (класс допустимых управлений обозначим D). Чтобы сформулировать необходимые нам дополнительные требования к функции g, положим

$$f(t,l,v)\equiv f(t,l_0,l_1,l_2,v)\equiv g(t,l_0+\varphi_1(t^1)+\varphi_2(t^2),l_1+\varphi'_1(t^1),l_2+\varphi'_2(t^2),v). \tag{3}$$

Для сокращения записи введем обозначения[2]

$$\mathfrak{M}\equiv L_\infty^n\times L_p^n\times L_p^n,\quad \mathfrak{N}_0\equiv L_p^{n\times n},\quad \mathfrak{N}_1\equiv L_\infty^{n\times n},\quad \mathfrak{N}\equiv\mathfrak{N}_0\times\mathfrak{N}_1\times\mathfrak{N}_1,$$

элементы $\mathfrak{M}$ нам удобно считать $3n$-вектор–функциями, а элементы $\mathfrak{N}$ — $(n\times 3n)$-матрица-ми–функциями[3]. Пусть функция g такова, что выполняются следующие условия a), b), c).

a) Формула $\mathfrak{F}[y,u](t)\equiv f(t,y(t),u(t))$ задаёт ограниченный оператор $\mathfrak{F}[\cdot,\cdot]\colon\mathfrak{M}\times D\to L_p^n$.

b) Формула $\Phi[y,u](t)\equiv f'_l(t,y(t),u(t))$ задаёт ограниченный оператор $\Phi[\cdot,\cdot]\colon\ \mathfrak{M}\times D\to\mathfrak{N}$.

[2]Значок Π в обозначениях, как правило, опускаем; в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность. Например, вместо $AC_p^n(\Pi)$, $L_p^n(\Pi)$, $L_p^1(\Pi)$ пишем AC_p^n, L_p^n, L_p соответственно.

[3]Наряду с этим для пространств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, соответствующих случаю $n=1$, нам будет удобно использовать также специальные обозначения $\mathfrak{M}_{sc}$, $\mathfrak{N}_{sc}$.

c) Для любого $u \in D$ оператор $\Phi[\cdot, u] \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ непрерывен.

Условия a), b) означают существование функции $N(\cdot) \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такой, что для любого $M > 0$

$$\|\mathfrak{F}[y,u]\|_{\mathfrak{M}},\ \|\Phi[y,u]\|_{\mathfrak{N}} \leqslant N(M) \quad \text{при} \quad \|y\|_{\mathfrak{M}} \leqslant M,\ u \in D. \tag{4}$$

Без ограничения общности считаем $N(\cdot)$ неубывающей.

Обозначим через AC_p множество абсолютно непрерывных на Π функций с суммируемыми в степени p смешанной и первыми производными. При сформулированных выше условиях естественно рассматривать решения задачи (1)–(2) из класса $W \equiv W(\Pi)$ функций $x(\cdot) \in AC_p^n$, удовлетворяющих условиям (2). Функцию $x \in W$ назовем отвечающим управлению $u \in D$ глобальным решением задачи (1)–(2), если пара x, u обращает (1) в тождество почти всюду на Π. Как показано в [23], управлению $u \in D$ не может отвечать более одного такого решения. Множество тех $u \in D$, каждому из которых отвечает глобальное решение $x \in W$ задачи (1)–(2), обозначим Ω.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации: найти управление, дающее на Ω максимум функционалу

$$J[u] \equiv G(x_u(1,1)),$$

где $G(\cdot) \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция, $x_u(\cdot)$ — решение задачи (1)–(2), отвечающее управлению $u \in \Omega$. Выведем для этой задачи необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума. С этой целью применим игольчатое варьирование управления. Пусть $\{u_h \colon \varepsilon > 0\}$ — игольчатая варианта некоторого управления $u_0 \in \Omega$, зависящая от параметров $(\tau, v) \in \Pi \times V$ и определяемая формулой

$$u_h(t) \equiv \Big\{v,\ t \in \Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \Pi \cap \{\tau^i - \varepsilon \leqslant t^i \leqslant \tau^i,\ i = 1,2\};\ u_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\Big\}, \tag{5}$$

$t \in \Pi$, где $h \equiv \{\tau, v, \varepsilon\}$. Формулой $E[x](t) \equiv \big\{x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t)\big\}$, $x \in AC_p^n$, $t \in \Pi$ определим на AC_p^n оператор E. Очевидно, $E\big[AC_p^n\big] \subset \mathfrak{M}$. Справедливо следующее свойство замкнутости Ω относительно игольчатых возмущений управления, вытекающее непосредственно из результатов [23, 24] (см. теоремы 2.3 и 2.4 работы [23]).

Теорема 1. *Пусть u_0 — некоторый элемент Ω, а x_0 — отвечающее ему решение* (1)–(2). *Существует такое $C > 0$ и для каждой пары $(\tau, v) \in \Pi \times V$ найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau, v) > 0$, что любое управление u_h, задаваемое набором параметров $h \equiv \{\tau, v, \varepsilon\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, также принадлежит Ω и справедлива оценка*

$$\|E[x_h - x_0]\|_{\mathfrak{M}} \leqslant C\nu(h), \tag{6}$$

где $x_h \in W$ — отвечающее u_h глобальное решение (1)-(2), $\nu(h) \equiv \|\Delta_v g\|_{L_p^n(\Pi_\varepsilon(\tau))}$, $\Delta_v g = \Delta_v g(t) \equiv g(t, x_0(t), x'_{0t^1}(t), x'_{0t^2}(t), v) - g(t, x_0(t), x'_{0t^1}(t), x'_{0t^2}(t), u_0(t))$.

Первую вариацию δJ функционала J на варианте $\{u_h \colon \varepsilon > 0\}$, задаваемой набором параметров $(\tau, v) \in \Pi \times V$, как мы убедимся, естественно определить равенством

$$\delta J = \delta J(\tau, v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2}\big(J[u_h] - J[u_0]\big). \tag{7}$$

Чтобы сформулировать теорему о формуле вариации δJ, введем обозначения для интегральных операторов:

$$A_0[z](t) \equiv \int_0^{t^1}\!\!\int_0^{t^2} z(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2,\ A_1[z](t) \equiv \int_0^{t^2} z(t^1, \xi)\, d\xi,\ A_2[z](t) \equiv \int_0^{t^1} z(\xi, t^2)\, d\xi, \tag{8}$$

$$A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\},\ t \in \Pi. \tag{9}$$

Очевидно, что оператор A принадлежит классу $\mathfrak{L}\left(L_p^n, \mathfrak{M}\right)$, а сопряженный к нему оператор A^* на подпространстве $L_1^n \times L_q^n \times L_q^n$ пространства $\mathfrak{M}^*$ определяется формулой

$$A^*[z]\,(t) \equiv A_0^*[z^0]\,(t) + A_1^*[z^1]\,(t) + A_2^*[z^2]\,(t)\,,\ t \in \Pi,\ z = \left\{z^0, z^1, z^2\right\} \in L_1^n \times L_q^n \times L_q^n, \tag{10}$$

где

$$A_0^*[z^0](t) \equiv \int_{t^1}^1 \int_{t^2}^1 z^0(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2,\ A_1^*[z^1](t) \equiv \int_{t^2}^1 z^1(t^1, \xi)\, d\xi,\ A_2^*[z^2](t) \equiv \int_{t^1}^1 z^2(\xi, t^2)\, d\xi. \tag{11}$$

Для каждого $v \in V$ обозначим через Π_v множество точек $\tau \in \Pi$, являющихся точками Лебега функций $\big(\Psi_0(\cdot), \Delta_v g(\cdot)\big)$ и $\big|\Delta_v g(\cdot)\big|$.

Теорема 2. *Предел* (7) *для каждого* $v \in V$ *при всех* $\tau \in \Pi_v$ *имеет вид*

$$\delta J(\tau, v) = \big(\Psi_0(\tau), \Delta_v g(\tau)\big), \tag{12}$$

где $\Psi_0 \in L_\infty^n$ *— решение сопряженного уравнения*

$$\Psi(t) - A^*\left[\left\{g_l'(t, x_0, x_{0t^1}', x_{0t^2}', u_0)\right\}^* \Psi\right](t) = \mathfrak{X}_0,\ t \in \Pi, \tag{13}$$

в котором $\mathfrak{X}_0 = G'(x_0(1,1))^*$.

Доказательству теоремы 2, опорной теоремы статьи, посвящены параграфы со второго по пятый. Из формулы (12) получаем следующие необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума.

Теорема 3. *Если* u_0 *— оптимальное управление, а* $x_0 \in W$ *— соответствующее ему решение* (1)–(2), *то для почти всех* $\tau \in \Pi$

$$\Big(\Psi_0(\tau), g\big(\tau, x_0(\tau), x_{0t^1}'(\tau), x_{0t^2}'(\tau), u_0(\tau)\big)\Big) = \max_{v \in V}\Big(\Psi_0(\tau), g\big(\tau, x_0(\tau), x_{0t^1}'(\tau), x_{0t^2}'(\tau), v\big)\Big),$$

где $\Psi_0 \in L_\infty^n$ *— решение сопряженного уравнения* (13).

Чтобы вывести из теоремы 2 теорему 3, выделим в множестве V некоторое счетное всюду плотное подмножество U. Множество $\pi \equiv \bigcap\limits_{w \in U} \Pi_w$ имеет полную меру в Π и для любых $\tau \in \pi,\ v \in U$ справедливо (12). Из оптимальности управления u_0 следует, что $\delta J(\tau, v) \leqslant 0$ при $\tau \in \pi,\ v \in U$. В силу непрерывности функции $g(t, x_0(t), x_{0t^1}'(t), x_{0t^2}'(t), v)$ по переменной v, из формулы (12) получаем: $\big(\Psi_0(\tau), \Delta_v g(\tau)\big) \leqslant 0$ при $\tau \in \pi,\ v \in V$. Последнее эквивалентно условию максимума теоремы 3.

§ 2. Эквивалентные формулировки

Для доказательства теоремы 2 нам удобно переписать сформулированную выше оптимизационную задачу в терминах эквивалентного задаче Гурса–Дарбу интегрального уравнения. Формула

$$x(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z](t), \quad t \in \Pi, \tag{14}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом L_p^n функций z и классом W функций x. Тем самым устанавливается эквивалентность задачи (1)–(2) интегральному уравнению

$$z(t) = f(t, A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi \tag{15}$$

в том смысле, что если $x \in W$ — решение (1)–(2), отвечающее $u \in \Omega$, то функция $z \in L_p^n$, соответствующая x по формуле (14), — решение в смысле «почти всюду» на Π уравнения (15) при данном u, и наоборот, если $z \in L_p^n$ — решение (15) на Π при некотором $u \in D$ (таких z

не может быть больше одного, см. [23]), то связанная с z формулой (14) функция $x \in W$ есть глобальное решение (1)–(2), отвечающее тому же u. Класс тех $u \in D$, каждому из которых отвечает глобальное решение $z \in L_p^n$ уравнения (15), совпадает с Ω.

В терминах уравнения (15) нашу задачу оптимизации можно записать в виде

$$J[u] = F[z_u] \to \max, \; u \in \Omega, \tag{16}$$

где $F[z] = G\left(\varphi_1(1) + \varphi_2(1) + \iint_{\Pi} z(t)\, dt\right)$, z_u — решение уравнения (15), отвечающее управлению u, формулу (12) — в виде

$$\delta J(\tau, v) = \big(\Psi_0(\tau), \Delta_v f(\tau)\big), \tag{17}$$

где $\Delta_v f(\tau) \equiv f(\tau, A[z_0](\tau), v) - f(\tau, A[z_0](\tau), u_0(\tau))$, а уравнение (13) — в виде

$$\Psi(t) - A^*\Big[\big\{f_l'(t, A[z_0](t), u_0)\big\}^* \Psi\Big](t) = \mathfrak{X}_0, \quad t \in \Pi. \tag{18}$$

В терминах (15) величина $\nu(h)$ имеет вид $\|\Delta_v f\|_{L_p^n(\Pi_\varepsilon(\tau))}$, а оценка (6) — вид

$$\big\|A\,[z_h - z_0]\big\|_{\mathfrak{M}} \leqslant C\nu(h), \tag{19}$$

где $z_h \in L_p^n$ — отвечающее $u_h \in \Omega$ глобальное решение (15). Из оценки (19) следует, в частности, существование такого $C_0 > 0$, что

$$\big\|A\,[z_h - z_0]\big\|_{\mathfrak{M}} \leqslant C_0, \quad \tau \in \Pi, \quad v \in V, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v), \tag{20}$$

где $\varepsilon_0(\tau, v)\colon \Pi \times V \to \mathbf{R}_+$ — функция из теоремы 1.

Для того, чтобы доказать сформулированную выше теорему 2 о вариации, достаточно доказать, что предел (7) при каждом $v \in V$ для всех $\tau \in \Pi_v$ имеет вид (17) , где $\Psi_0(\cdot)$ — решение сопряженного уравнения (18).

§ 3. Вспомогательные утверждения. Равностепенная квазинильпотентность

Пусть $\mathbf{B}$ — банахово пространство. Следующее утверждение, частный случай теоремы 1.9.3 из [25], можно назвать обобщенной леммой Гронуолла.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{B}$ полуупорядочено по конусу $K \subset \mathbf{B}$*[4]; *$G \in \mathfrak{L}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ — квазинильпотентный оператор, для которого K инвариантен. Если для некоторых $x, y \in \mathbf{B}$ выполняется неравенство $x \leqslant G[x] + y$, то $x \leqslant R(G)[y]$, где $R(G) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} G^i$.*

Пусть $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathfrak{L}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ — семейство квазинильпотентных операторов, зависящих от параметра γ из некоторого множества Γ[5]. Следуя [18], назовем это семейство *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sqrt[i]{\sup\limits_{\gamma \in \Gamma} \|G^i(\gamma)\|_{\mathbf{B} \to \mathbf{B}}} \to 0$ при $i \to \infty$.

Сформулируем конкретный признак равностепенной квазинильпотентности. Пусть $r \in [1, \infty]$. Следуя [17, с. 15], будем называть оператор $\mathcal{F}$, действующий из L_r в пространство измеримых на Π функций, *вольтерровым на системе T подмножеств множества* Π, если для любого $H \in T$ сужение $\mathcal{F}[z]\Big|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \setminus H$. Обозначим через P_H оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \subset \Pi$. Пусть $\delta > 0$ — некоторое число, T_* — система множеств $\{H_0, \; H_1, \dots, \; H_k\}$ такая, что $\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{k-1} \subset H_k = \Pi$ (такие системы множеств будем называть *цепочками*); положим $h_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$. Если некоторый оператор $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_r, L_r)$ вольтерров на цепочке T_* и $\|P_{h_i} \mathcal{F} P_{h_j}\|_{L_r \to L_r} \leqslant \delta$ при $k \geqslant i \geqslant j \geqslant 1$, то, следуя [18], назовем T_* *вольтерровой сильной δ-цепочкой оператора $\mathcal{F}$*.

[4]Множество K считаем конусом в пространстве $\mathbf{B}$, если K выпукло, замкнуто и для любого отличного от нуля элемента $x \in K$ весь луч $\{\lambda x\colon \lambda \geqslant 0\}$ принадлежит K, но $(-x) \notin K$.

[5]Напомним, что квазинильпотентность $G(\gamma)$ означает: $\sqrt[i]{\|G^i(\gamma)\|_{\mathbf{B} \to \mathbf{B}}} \to 0$, $i \to \infty$.

Лемма 2 (см. [19, 18]). *Пусть* $\{G(\gamma)[\cdot]\}_{\gamma\in\Gamma}$ *— некоторое семейство операторов из класса* $\mathfrak{L}(L_r, L_r)$. *Если при каком-то* $\delta > 0$ *существует общая для всех операторов семейства вольтеррова сильная* δ*-цепочка, состоящая из* $(k+1)$*-го элемента, то для любого* $\gamma \in \Gamma$

$$\sqrt[i]{\|G^i(\gamma)\|} \leqslant \delta \left(\sqrt[i]{1+i}\right)^{k-1}. \tag{21}$$

Если при любом $\delta > 0$ *существует общая для всех операторов семейства вольтеррова сильная* δ*-цепочка, то семейство равностепенно квазинильпотентно.*

Введем некоторые обозначения. Для любых $z_1, z_2 \in L_p^n$, $u \in D$ положим

$$\alpha_i[z_1, z_2, u](t) \equiv \int_0^1 f'_{l_i}(t, A[z_2](t) + \theta A[z_1 - z_2](t), u(t))\, d\theta, \qquad i = 0, 1, 2,$$

и пусть $\alpha[z_1, z_2, u](t)$ — $(n \times 3n)$-матрица, состоящая из $(n \times n)$-блоков $\alpha_0[z_1, z_2, u](t)$, $\alpha_1[z_1, z_2, u](t)$, $\alpha_2[z_1, z_2, u](t)$, $t \in \Pi$ [6].

Из условия b) следует, что при любых $z_1, z_2 \in L_p^n$, $u \in D$ определяемые формулами[7]

$$B_{\alpha[z_1,z_2,u]}[y](t) \equiv \sum_{i=0}^{2} \bigl|\alpha_i[z_1, z_2, u](t)\bigr| A_i[y](t), \quad t \in \Pi, \quad y \in L_p,$$

$$B^0_{\alpha[z_1,z_2,u]}[y](t) \equiv \sum_{i=0}^{2} A_i^*\bigl[|\alpha_i[z_1, z_2, u](\cdot)| y(\cdot)\bigr](t), \quad t \in \Pi, \quad y \in L_\infty$$

операторы $B_{\alpha[z_1,z_2,u]}[\cdot]$, $B^0_{\alpha[z_1,z_2,u]}[\cdot]$ принадлежат классам $\mathfrak{L}(L_p, L_p)$, $\mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$ соответственно.

Пусть $M_0 \in \mathbf{R}_+$, $\widehat{z} \in L_p^n$. Положим $U_{M_0}A(\widehat{z}) \equiv \Bigl\{z \in L_p^n \colon \bigl\|A[z - \widehat{z}]\bigr\|_{\mathfrak{M}} \leqslant M_0\Bigr\}$ и выделим в классах $\mathfrak{L}(L_p, L_p)$, $\mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$ семейства

$$w(M_0, \widehat{z}) \equiv \{B_{\alpha[z_1,z_2,u]}[\cdot] \colon z_1, z_2 \in U_{M_0}A(\widehat{z}),\ u \in D\},$$

$$w^0(M_0, \widehat{z}) \equiv \{B^0_{\alpha[z_1,z_2,u]}[\cdot] \colon z_1, z_2 \in U_{M_0}A(\widehat{z}),\ u \in D\}.$$

Для любых $M \in \mathbf{R}_+$, $z \in L_p^n$ положим $\lambda(M, z) \equiv N\left(\|A[z]\|_{\mathfrak{M}} + M\right)$. Используя лемму 2, докажем следующий результат.

Лемма 3. *Семейства* $w(M_0, \widehat{z})$, $w^0(M_0, \widehat{z})$ *равностепенно квазинильпотентны.*

Доказательство. Обозначим через H_c множество $\{t \in \Pi \colon t^1 + t^2 \leqslant c\}$, $c \in (0,\ 2]$. Докажем сначала равностепенную квазинильпотентность семейства $w(M_0, \widehat{z})$. В силу леммы 2 достаточно показать, что при любом $\delta > 0$ для операторов семейства $w(M_0, \widehat{z})$ найдется общая вольтеррова сильная δ-цепочка. Фиксируем произвольно $\delta > 0$. Для любого $B_\alpha \in w(M_0, \widehat{z})$ и любой цепочки $T_* = \{H_{c_0}, \ldots, H_{c_k}\}$ имеем при $i \geqslant j$ [8]:

$$\|P_{h_i} B_\alpha P_{h_j}\|_{L_p \to L_p} \leqslant \sum_{s=0}^{2} \|P_{h_i} |\alpha_s| A_s P_{h_j}\|_{L_p \to L_p} \equiv \sum_{s=0}^{2} I_s. \tag{22}$$

[6] Если из контекста понятно, какие функции z_1, z_2 или u имеются в виду, то соответствующие значки в выражениях $\alpha_i[z_1, z_2, u](t)$, $\alpha[z_1, z_2, u](t)$ будем опускать. Будем писать, например, $\alpha[z_1, z_2](t)$ или просто $\alpha(t)$, α и т. п.

[7] В § 3 интегральные операторы A_i, A и A_i^*, определяемые формулами (8), (9) и (11) для вектор-функций, иногда формально применяются к скалярным функциям; точно так же интегральный оператор A^*, определенный формулой (10), иногда применяется как оператор, действующий из пространства $\mathfrak{N}_{sc}$. Из контекста всегда ясно, какой случай рассматривается.

[8] Здесь и далее через $|\alpha_v|$ обозначается как сама функция $|\alpha_v(t)|$, $t \in \Pi$, так и оператор умножения на нее.

Оценим первое слагаемое правой части (22):

$$I_0 = \sup_{\|z\|_{L_p}=1} \|P_{h_i}\big|\alpha_0[z_1,z_2,u]\big|A_0P_{h_j}[z]\|_{L_p} =$$

$$= \sup_{\|z\|_{L_p}=1}\left(\iint_\Pi \chi_{h_i}(t)\,|\alpha_0(t)|^p\left|\int_0^{t^1}\int_0^{t^2}\chi_{h_j}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|z\|_{L_p}=1}\sup_{t\in\Pi}\left|\int_0^{t^1}\int_0^{t^2}\chi_{h_j}(\xi)z(\xi)\,d\xi\right|\left(\iint_\Pi \chi_{h_i}(\eta)\,|\alpha_0(\eta)|^p\,d\eta\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha_0\|_{\mathfrak{N}_0}\sup_{\|z\|_{L_p}=1}\iint_\Pi \chi_{h_j}(\xi)|z(\xi)|\,d\xi.$$

С учетом (4) и неравенства Гельдера получаем, что при любых $z_1,z_2\in U_{M_0}A(\widehat{z})$ и любых $u\in D$

$$I_0 \leqslant \sqrt[q]{mes\ h_j}\ \lambda(M_0,\widehat{z}).$$

Положим $\Delta c_j \equiv c_j - c_{j-1}$. Для второго слагаемого правой части (22) получаем:

$$I_1 \leqslant \sup_{\|z\|_{L_p}=1}\left(\iint_\Pi \chi_{h_i}(t)\,|\alpha_1(t)|^p\left(\int_0^{t^2}\chi_{h_j}(t^1,\xi)|z(t^1,\xi)|\,d\xi\right)^p dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha_1\|_{\mathfrak{N}_1}\sup_{\|z\|_{L_p}=1}\left(\iint_\Pi \left(\int_0^{t^2}\chi_{h_j}(t^1,\xi)\,d\xi\right)^{p/q}\left(\int_0^{t^2}|z(t^1,\xi)|^p\,d\xi\right)dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[q]{\Delta c_j}\|\alpha_1\|_{\mathfrak{N}_1}\sup_{\|z\|_{L_p}=1}\left(\int_0^1 dt^1\int_0^1|z(t^1,\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} \leqslant \sqrt[q]{\Delta c_j}\|\alpha_1\|_{\mathfrak{N}_1}.$$

Таким образом, при любых $z_1,z_2\in U_{M_0}A(\widehat{z})$ и любых $u\in D$

$$I_1 \leqslant \sqrt[q]{\Delta c_j}\ \lambda(M_0,\widehat{z}).$$

Аналогично оценивается третье слагаемое правой части неравенства (22):

$$I_2 \leqslant \sqrt[q]{\Delta c_j}\ \lambda(M_0,\widehat{z}).$$

Собирая вместе полученные оценки, находим из (22), что при $i\geqslant j$

$$\|P_{h_i}B_\alpha P_{h_j}\|_{L_p\to L_p} \leqslant \left(\sqrt[q]{mes\ h_j} + 2\sqrt[q]{\Delta c_j}\right)\lambda(M_0,\widehat{z}),$$

каковы бы ни были оператор $B_\alpha\in w(M_0,\widehat{z})$ и цепочка T_*.

Пусть $\{c_i\}_{i=0}^k$ — равномерное разбиение отрезка $[0,2]$. Тогда

$$\sqrt[q]{mes\ h_j} + 2\sqrt[q]{\Delta c_j} \leqslant (2+\sqrt[2q]{2})\sqrt[q]{\Delta c_j} \leqslant 4\sqrt[q]{2/k}$$

и

$$\|P_{h_i}B_\alpha P_{h_j}\|_{L_p\to L_p} \leqslant 4\sqrt[q]{2/k}\lambda(M_0,\widehat{z}),\ i\geqslant j,\ j=1,\ldots,k.$$

При выполнении неравенства $4\sqrt[q]{2/k}\ \lambda(M_0,\widehat{z}) < \delta$ цепочка T_* будет общей вольтерровой сильной δ-цепочкой для всех операторов семейства $w(M_0,\widehat{z})$. По лемме 2 это семейство операторов равностепенно квазинильпотентно.

Чтобы доказать равностепенную квазинильпотентность семейства $w^0(M_0,\widehat{z})$, заметим, что для любого $B^0_\alpha\in w^0(M_0,\widehat{z})$ и любой цепочки $T_*=\{H_{c_0},\dots,H_{c_k}\}$ при $i\geqslant j$

$$\|P_{h_i}B^0_\alpha P_{h_j}\|_{L_\infty\to L_\infty}\leqslant\Big\|\sum_{v=0}^{2}P_{h_i}A^*_v\big[|\alpha_v[z_1,z_2,u]|P_{h_j}\big]\Big\|_{L_\infty\to L_\infty}. \tag{23}$$

Аналогично предыдущему показывается, что правая часть неравенства (23) не превосходит величины $\big(\sqrt[q]{mes\ h_j}+2\Delta c_j\big)\lambda(M_0,\widehat{z})$. Используя, как и выше, равномерное разбиение $\{c_i\}_{i=0}^k$, завершаем доказательство равностепенной квазинильпотентности семейства $w^0(M_0,\widehat{z})$, опираясь на лемму 2. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Норма любого оператора* $R\big(B_\alpha\big)\equiv\sum\limits_{i=0}^{\infty}\big(B_\alpha\big)^i$, $B_\alpha\in w(M_0,\widehat{z})$, *не превосходит величины* $\gamma(M_0,\widehat{z})\equiv\ 2\sum\limits_{i=0}^{K}\Big(\lambda(M_0,\widehat{z})\|A\|_{L_p\to\mathfrak{M}_{sc}}\Big)^i$, *где* K *— число, зависящее лишь от* $M_0,\widehat{z}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем некоторое $\varepsilon>0$. По лемме 3 существует номер $j=j(\varepsilon,M_0,\widehat{z})$ такой, что для каждого $B_\alpha\in w(M_0,\widehat{z})$ имеем $\|B^i_\alpha\|_{L_p\to L_p}\leqslant\varepsilon^i$ при всех $i\geqslant j$. В силу (4) норма такого B_α не больше величины $\nu(M_0,\widehat{z})\equiv\lambda(M_0,\widehat{z})\|A\|_{L_p\to\mathfrak{M}_{sc}}$, то есть $\|R(B_\alpha)\|_{L_p\to L_p}\leqslant\sum\limits_{i=0}^{K}\big(\nu(M_0,\widehat{z})\big)^i+\sum\limits_{i=K+1}^{\infty}\varepsilon^i$ для каждого $K>j$. Так как $\sum\limits_{i=0}^{K}\big(\nu(M_0,\widehat{z})\big)^i\geqslant\sum\limits_{i=K+1}^{\infty}\varepsilon^i$ при любом достаточно большом K, то существует $K>j(\varepsilon,M_0,\widehat{z})$ такое, что справедлива указанная в лемме 4 оценка. Лемма 4 доказана.

Совершенно аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. *Норма любого оператора* $R\big(B^0_\alpha\big)\equiv\sum\limits_{i=0}^{\infty}\big(B^0_\alpha\big)^i$, $B^0_\alpha\in w^0(M_0,\widehat{z})$ *не превосходит величины* $\gamma^0(M_0,\widehat{z})\equiv\ 2\sum\limits_{i=0}^{K}\Big(\lambda(M_0,\widehat{z})\|A^*\|_{\mathfrak{N}_{sc}\to L_\infty}\Big)^i$, *где* K *— число, зависящее лишь от* $M_0,\widehat{z}$.

Лемма 6. *Пусть* u_0, $u_h\in\Omega$, а z_0, z_h *— отвечающие управлениям* u_0, u_h *глобальные решения уравнения* (13). *Тогда*

$$|z_h(t)-z_0(t)|\leqslant R\big(B_{\alpha[z_h,z_0,u_h]}\big)\big[|\Delta_{u_h(\cdot)}f(\cdot)|\big](t),\quad t\in\Pi. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим разность $\Delta_h z(t)\equiv z_h(t)-z_0(t)$, $t\in\Pi$. По теореме о конечных приращениях в интегральной форме (см., например, [26, с. 150])

$$\Delta_h z(t)=\sum_{i=0}^{2}\alpha_i[z_h,z_0,u_h](t)A_i[\Delta z_h](t)+\Delta_{u_h(t)}f(t),\quad t\in\Pi. \tag{25}$$

Получаем неравенство $|\Delta_h z(t)|\leqslant B_{\alpha[z_h,z_0,u_h]}\big[|\Delta_h z|\big](t)+|\Delta_{u_h(t)}f(t)|$, $t\in\Pi$, применяя к которому лемму 1, приходим к (24). Лемма 6 доказана.

§ 4. Начало доказательства теоремы о вариации. Линейное интегральное представление приращения функционала

Пусть $h=\{\tau,v,\varepsilon\}$, где $\tau\in\Pi$, $v\in V$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0(\tau,v)$, и $z_0,z_h\in L_p$ — глобальные решения (15), отвечающие управлениям $u_0,u_h\in\Omega$ соответственно. Положим

$$\Delta_h z\equiv z_h-z_0,\quad \Delta_h f\equiv f(t,A[z_h],u_h)-f(t,A[z_h],u_0),\quad b_h(t)\equiv\alpha[z_h,z_0,u_0](t).$$

В силу условия b) матрица–функция b_h принадлежит классу $\mathfrak{N}$, причем при $\varepsilon = 0$ она совпадает с $b_0(t) \equiv f_l'(t, A[z_0](t), u_0(t))$. Для любой матрицы–функции $b(\cdot) \equiv \{b^0(\cdot), b^1(\cdot), b^2(\cdot)\}^* \in \mathfrak{N}$ оператор $bA[\cdot]$, задаваемый формулой

$$bA[y](t) \equiv b(t)A[y](t) \equiv \sum_{i=0}^{2} b^i(t)A_i[y](t), \quad y \in L_p^n, \quad t \in \Pi,$$

принадлежит классу $\mathfrak{L}(L_p^n, L_p^n)$. Рассмотрим операторы вида $S_h \equiv I - b_hA \in \mathfrak{L}(L_p^n, L_p^n)$.

Лемма 7. *Оператор* $S_h \in \mathfrak{L}(L_p^n, L_p^n)$ *имеет ограниченный обратный* S_h^{-1}, *причем* $S_h^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(b_hA)^i$ *и для любого набора* $h = \{\tau, v, \varepsilon\}$, *в котором* $\tau \in \Pi$, $v \in V$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v)$, *справедлива оценка* $\|S_h^{-1}\|_{L_p^n \to L_p^n} \leqslant \gamma(C_0, z_0)$, *где функция* γ *взята из леммы* 4, *а число* C_0 *из оценки* (20).

Доказательство. Оператор $B_{\alpha[z_h, z_0, u_0]}$, принадлежащий в силу (20) равностепенно квазинильпотентному семейству $w(C_0, z_0)$, является мажорирующим для оператора b_hA. Следовательно, b_hA квазинильпотентен. Последнее означает существование линейного ограниченного оператора $S_h^{-1}\colon L_p^n \to L_p^n$, причем $S_h^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(b_hA)^i$. Оценку нормы $\|S_h^{-1}\|_{L_p^n \to L_p^n}$ получаем из леммы 4. Лемма 7 доказана.

Обратимся к приращению $\Delta J \equiv J[u_h] - J[u_0] = F[z_h] - F[z_0]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\Delta J = \big(\mathfrak{X}_h, A_0[\Delta_h z](1,1)\big), \tag{26}$$

где $\mathfrak{X}_h \equiv \Big\{\int\limits_0^1 G'\big(\varphi_1(1) + \varphi_2(1) + A_0[z_0 + \theta\Delta_h z](1,1)\big)\, d\theta\Big\}^*$, или, по-другому,

$$\Delta J = T_h[\Delta_h z], \tag{27}$$

где $T_h \in (L_p^n)^*$ — функционал, задаваемый формулой $T_h[z] \equiv \iint_\Pi \big(\mathfrak{X}_h, z(t)\big)\, dt$, $z \in L_p^n$.

Лианеризация уравнения (15) дает

$$S_h[\Delta_h z] = \Delta_h f,$$

откуда в силу леммы 7

$$\Delta_h z = S_h^{-1}[\Delta_h f]. \tag{28}$$

Пусть $Q_h \in (L_p^n)^*$ — линейный функционал, определяемый формулой

$$Q_h = \big(S_h^{-1}\big)^*[T_h], \tag{29}$$

а $\Psi_h \in L_q^n$ — функция, соответствующая функционалу $Q_h \in (L_p^n)^*$ по теореме Рисса. Из соотношений (28), (29) получаем

$$\Delta J = Q_h[\Delta_h f],$$

или, что то же самое,

$$\Delta J = \iint_\Pi \big(\Psi_h(t), \Delta_h f\big)\, dt = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big(\Psi_h(t), \Delta_h f\big)\, dt. \tag{30}$$

Это и есть искомое интегральное представление для ΔJ.

Постоянная $\mathfrak{X}_h$ — функция, соответствующая по теореме Рисса функционалу $T_h \in (L_p^n)^*$. Отождествляя $(L_p^n)^*$ с L_q^n, перепишем (29) как

$$(S_h^{-1})^*[\mathfrak{X}_h] = \Psi_h. \tag{31}$$

Так как оператор $S_h \in \mathfrak{L}(L_p^n, L_p^n)$ имеет ограниченный обратный S_h^{-1}, то существует ограниченный оператор $(S_h^*)^{-1}\colon L_q^n \to L_q^n$, причем $(S_h^*)^{-1} = (S_h^{-1})^*$ (см. [27, с. 516]). Следовательно, (31) можно переписать в виде

$$S_h^*[\Psi_h] = \mathfrak{X}_h, \tag{32}$$

и функция Ψ_h является решением уравнения

$$S_h^*[\Psi] = \mathfrak{X}_h, \tag{33}$$

где $S_h^* = I - (b_h A)^*$.

Оператор $(b_h A)^*\colon L_q^n \to L_q^n$, сопряженный к оператору $b_h A\colon L_p^n \to L_p^n$, задается формулой

$$(b_h A)^*[\Psi](t) = A^*[b_h^*\Psi](t) = \int_{t^1}^1\int_{t^2}^1 b_h^0(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi + \int_{t^2}^1 b_h^1(t^1,\xi)\Psi(t^1,\xi)\,d\xi + \int_{t^1}^1 b_h^2(\xi,t^2)\Psi(\xi,t^2)\,d\xi$$

и в силу условия b) принадлежит классу $\mathfrak{L}(L_\infty^n, L_\infty^n)$. Ввиду того, что этот оператор, как легко проверить, квазинильпотентен, оператор $\big(S_h^*\big)^{-1}$ тоже принадлежит классу $\mathfrak{L}(L_\infty^n, L_\infty^n)$. Отсюда следует, в силу (31), что функция Ψ_h принадлежит пространству L_∞^n. При $\varepsilon = 0$ постоянная $\mathfrak{X}_h$ совпадает с $\mathfrak{X}_0$, уравнение (33) превращается в сопряженное уравнение (18), а Ψ_h — в Ψ_0.

§ 5. Завершение доказательства теоремы о вариации

Для непосредственного вычисления предела (7) представим приращение $\Delta J \equiv J[u_h] - J[u_0]$ в виде $\Delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2 + \Delta J_3 + \Delta J_4$, где

$$\Delta J_1 = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big(\Psi_0,\, \Delta_v f\big)\,dt, \quad \Delta J_2 = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \Big(\Psi_h,\, f\big(t, A[z_0](t), u_0(t)\big) - f\big(t, A[z_h](t), u_0(t)\big)\Big)\,dt,$$

$$\Delta J_3 = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \Big(\Psi_h,\, f\big(t, A[z_h](t), v\big) - f\big(t, A[z_0](t), v\big)\Big)\,dt, \quad \Delta J_4 = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \Big(\Psi_h - \Psi_0,\, \Delta_v f\Big)\,dt.$$

Поочередно найдем каждый из пределов $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}\Delta J_s$, $s = 1, \ldots, 4$. По теореме Лебега о правильных точках для каждого $v \in V$ при всех $\tau \in \Pi_v$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}\Delta J_1 = \big(\Psi_0(\tau), \Delta_v f(\tau)\big). \tag{34}$$

Ниже доказано, что для каждого $v \in V$ при всех $\tau \in \Pi_v$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}\Delta J_s = 0, \quad s = 2, 3, 4. \tag{35}$$

Соотношения (34), (35) доказывают формулу (17) для первой вариации.

Первые две формулы (35) ($s = 2, 3$) доказываются одинаково. Докажем, например, первую из них. Для этого нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 8. *Норма оператора* $\big(S_h^*\big)^{-1}$ *как оператора класса* $\mathfrak{L}(L_\infty^n, L_\infty^n)$ *при любом* $h = \{\tau, v, \varepsilon\}$, $\tau \in \Pi$, $v \in V$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v)$, *не превосходит величины* $\gamma^0(C_0, z_0)$, *где функция* γ^0 *взята из леммы* 5, *а число* C_0 *— из оценки* (20).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор $B^0_{\alpha[z_h,z_0,u_0]}$, принадлежащий в силу (20) равностепенно квазинильпотентному семейству $w^0(C_0, z_0)$, является мажорирующим для оператора $(b_h A)^*$. Следовательно, $(b_h A)^*$ квазинильпотентен. Последнее означает существование линейного ограниченного оператора $\big(S_h^*\big)^{-1}\colon L_\infty^n \to L_\infty^n$, причем $\big(S_h^*\big)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\big((b_h A)^*\big)^i$. Оценку нормы $\big\|\big(S_h^*\big)^{-1}\big\|_{L_\infty^n \to L_\infty^n}$ получаем из леммы 5. Лемма 8 доказана.

Произвольно фиксируем $h \equiv \{\tau, v, \varepsilon\}$, $\tau \in \Pi$, $v \in V$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v)$. Используя теорему о конечных приращениях в интегральной форме, находим

$$|\Delta J_2| \leqslant \|\Psi_h\|_{L^n_\infty} \iint_\Pi \chi_{\Pi_\varepsilon(\tau)} B_{\alpha[z_h, z_0, u_0]}\big[|\Delta_h z|\big]\, dt = \|\Psi_h\|_{L^n_\infty} \iint_\Pi B^0_{\alpha[z_h, z_0, u_0]}[\chi_{\Pi_\varepsilon(\tau)}]|\Delta_h z|\, dt. \quad (36)$$

В силу оценки (24) леммы 6 правая часть неравенства (36) не превосходит величины

$$\|\Psi_h\|_{L^n_\infty} \iint_\Pi B^0_{\alpha[z_h, z_0, u_0]}[\chi_{\Pi_\varepsilon(\tau)}](t)\ R\big(B_{\alpha[z_h, z_0, u_h]}\big)\big[|\Delta_{u_h} f|\big](t)\, dt.$$

Поэтому

$$|\Delta J_2| \leqslant \|\Psi_h\|_{L^n_\infty} \Gamma_1(h)\Gamma_2(h), \quad (37)$$

где

$$\Gamma_1(h) \equiv \big\|B^0_{\alpha[z_h, z_0, u_0]}[\chi_{\Pi_\varepsilon(\tau)}]\big\|_{L_\infty}, \quad \Gamma_2(h) \equiv \iint_\Pi R\big(B_{\alpha[z_h, z_0, u_h]}\big)[|\Delta_{u_h} f(\cdot)|](t)\, dt.$$

Так как $\|\Psi_h\|_{L^n_\infty} \leqslant |\mathfrak{X}_h|\big\|\big(S_h^{-1}\big)^*\big\|_{L^n_\infty \to L^n_\infty}$, то в силу непрерывности производной G', оценки (20) и леммы 8 существует зависящая лишь от z_0 и C_0 и не зависящая от h постоянная $K_1 = K_1(C_0, z_0)$ такая, что

$$\|\Psi_h\|_{L^n_\infty} \leqslant K_1, \quad \tau \in \Pi, \quad v \in V, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v). \quad (38)$$

Используя неравенство Гельдера, условие b) и оценку (20), получаем

$$\Gamma_1(h) \leqslant \lambda(C_0, z_0)(2\varepsilon + \sqrt[q]{\varepsilon^2}). \quad (39)$$

Преобразовав $\Gamma_2(h)$ к виду (здесь $\mathbf{1}$ — функция, равная тождественно единице)

$$\Gamma_2(h) = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big|\Delta_v f(t)\big|\, R\big(B^0_{\alpha[z_h, z_0, u_h]}\big)[\mathbf{1}](t)\, dt,$$

находим, пользуясь леммой 5 и неравенством (20), что

$$\Gamma_2(h) \leqslant \gamma^0(C_0, z_0) \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big|\Delta_v f(t)\big|\, dt. \quad (40)$$

Из (37)–(40) получаем, что при любом $h \equiv \{\tau, v, \varepsilon\}$, $\tau \in \Pi$, $v \in V$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v)$ справедлива оценка

$$|\Delta J_2| \leqslant K_2(2\varepsilon + \sqrt[q]{\varepsilon^2}) \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big|\Delta_v f(t)\big|\, dt,$$

в которой K_2 — постоянная, зависящая лишь от C_0 и z_0. Из этой оценки с учетом теоремы Лебега о правильных точках и следует доказываемая формула (35) ($s = 2$).

Справедливость последней из формул (35) ($s = 4$) вытекает непосредственно из следующей леммы.

Лемма 9. *Для каждого* $v \in V$ *при всех* $\tau \in \Pi_v$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2} \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big|\Psi_h(t) - \Psi_0(t)\big|\, \big|\Delta_v f(t)\big|\, dt = 0,$$

$h \equiv \{\tau, v, \varepsilon\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим $|\Psi_h - \Psi_0|$. Воспользовавшись равенством (32), запишем

$$\Psi_h - \Psi_0 = A^* b_0^* \big[(\Psi_h - \Psi_0)\big] + A^*\big[(b_h - b_0)^* \Psi_h\big] + (\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0),$$

откуда находим, что

$$|\Psi_h - \Psi_0| \leqslant B_0^0 \big[|\Psi_h - \Psi_0|\big] + \sigma_h + |\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0|,$$

где $B_0^0 \equiv B^0_{\alpha[z_0, z_0, u_0]}$, $\sigma_h \equiv \sum\limits_{i=0}^{2} A_i^*\big[|b_h^i - b_0^i||\Psi_h|\big]$. Применяя лемму 1, получим

$$|\Psi_h - \Psi_0| \leqslant R\big(B_0^0\big)\big[\sigma_h + |\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0|\big].$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{-2} \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} |\Psi_h - \Psi_0|\, |\Delta_v f(t)|\, dt \leqslant \Gamma_3(h) + \Gamma_4(h), \tag{41}$$

где

$$\Gamma_3(h) \equiv \varepsilon^{-2} \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} R\big(B_0^0\big)[\sigma_h]\, |\Delta_v f(t)|\, dt, \quad \Gamma_4(h) \equiv \varepsilon^{-2} |\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0| \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} R\big(B_0^0\big)[\mathbf{1}] |\Delta_v f(t)|\, dt.$$

Оценим $\Gamma_3(h)$, $\Gamma_4(h)$. Из оценки (38) получим

$$\Gamma_3(h) \leqslant \varepsilon^{-2} K_1(C_0, z_0) \big\|R(B_0^0)\big\|_{L_\infty \to L_\infty} \|A^*\|_{\mathfrak{N}_{sc} \to L_\infty} \|b_h - b_0\|_{\mathfrak{N}} \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} |\Delta_v f(t)|\, dt.$$

Очевидно, что

$$\Gamma_4(h) \leqslant \varepsilon^{-2} \big\|R(B_0^0)\big\|_{L_\infty \to L_\infty} |\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0| \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} |\Delta_v f(t)|\, dt.$$

Из оценки (19) следует, что $\|A[\Delta_h z]\|_{\mathfrak{M}} \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$, для каждого $v \in V$ при всех $\tau \in \Pi$. Следовательно, величины $\|b_h - b_0\|_{\mathfrak{N}}$ (в силу условия c)) и $|\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0|$ (в силу непрерывности производной G') также стремятся к нулю, когда $\varepsilon \to 0$, для каждого $v \in V$ при всех $\tau \in \Pi$. Применяя теорему Лебега о правильных точках, получаем что $\Gamma_3(h) \to 0$ и $\Gamma_4(h) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для каждого $v \in V$ при всех $\tau \in \Pi_v$, то есть из неравенства (41) следует утверждение доказываемой леммы. Лемма 9 доказана.

Замечание 1. Анализ проведенных в § 5 доказательств позволяет выписать для приращения $\Delta J \equiv J[u_h] - J[u_0]$, $h = \{\tau, v, \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\tau, v)$ формулу

$$\Delta J = \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big(\Psi_0(t), \Delta_v f(t)\big)\, dt + K_3\, \eta(h) \iint_{\Pi_\varepsilon(\tau)} \big|\Delta_v f(t)\big|\, dt,$$

где K_3 — неотрицательная постоянная, зависящая лишь от u_0, а величина $\eta(h)$ подчиняется неравенству

$$\big|\eta(h)\big| \leqslant \varepsilon + \sqrt[q]{\varepsilon^2} + \big|\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_0\big| + \|b_h - b_0\|_{\mathfrak{N}},$$

правая часть которого для каждого $v \in V$ при всех $\tau \in \Pi$ стремится к нулю вместе с ε.

§ 6. Терминальная задача общего вида

Пусть $r \geqslant 1$ и $s \in \{0, 1, \ldots, r\}$ — целые числа, $G_k \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(k = \overline{0, r})$ — непрерывно дифференцируемые функции, $J_k[u] \equiv G_k\big(x_u(1,1)\big)$ $(k = \overline{0, r})$ — набор функционалов, определенных на множестве Ω. Рассмотрим для системы Гурса–Дарбу (1)–(2) терминальную задачу оптимизации общего вида: в множестве управлений $u \in D$, удовлетворяющих условиям

$$u \in \Omega, \quad J_k[u] \geqslant 0 \quad (k = \overline{1, s}), \quad J_k[u] = 0 \quad (k = \overline{s+1, r}),$$

найти управление, дающее максимум функционалу $J_0[u]$. Для этой задачи оптимизации справедливы следующие необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума.

Теорема 4. *Если u_0 — оптимальное управление, а x_0 — соответствующее ему решение задачи (1)–(2), то существует нетривиальный набор чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$, среди которых числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ неотрицательны, такой, что для почти всех $\tau \in \Pi$*

$$\Big(\psi(\tau), g\big(\tau, x_0(\tau), x'_{0t^1}(\tau), x'_{0t^2}(\tau), u_0(\tau)\big)\Big) = \max_{v \in V}\Big(\psi(\tau), g\big(\tau, x_0(\tau), x'_{0t^1}(\tau), x'_{0t^2}(\tau), v\big)\Big), \qquad (42)$$

где $\psi \in L^n_\infty$ — решение сопряженного уравнения

$$\psi(t) - A^*\left[\left\{g'_l(t, x_0, x'_{0t^1}, x'_{0t^2}, u_0)\right\}^* \psi\right](t) = \chi, \quad t \in \Pi, \qquad (43)$$

в котором $\chi = \sum\limits_{k=0}^{r} \lambda_k \chi_k$, $\chi_k \equiv G'_k(x_0(1,1))^*$ $(k = \overline{0, r})$. При этом

$$\lambda_k J_k[u_0] = 0 \quad (k = \overline{1, s}). \qquad (44)$$

Для доказательства теоремы 4 воспользуемся схемой вывода необходимых условий оптимальности в оптимизационных задачах с ограничениями, предложенной В. И. Плотниковым [21, 22] (в [12] схема [21, 22] была применена при получении принципа максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу, дифференциальное уравнение которой имеет каратеодориевскую правую часть, с ограничениями типа неравенства; вывод принципа максимума по схеме В. И. Плотникова для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу, дифференциальное уравнение которой имеет непрерывную правую часть, с интегро-терминальными функциональными ограничениями типа неравенства подробно описан в [28, § 2 раздела 3]. Как в [12], так и в [28] система Гурса–Дарбу рассматривалась в классе функций с ограниченной смешанной производной).

Опишем многоточечное игольчатое варьирование управления $u_0 \in \Omega$, воспользовавшись конструкцией [28, с. 76]. Выделим в множестве V некоторое счетное всюду плотное подмножество U. Пусть: $\psi_k \in L^n_\infty$ — решение уравнения (43) при $\chi = \chi_k$; Π^k_v — множество точек $\tau \in \Pi$, являющихся точками Лебега функций $\big(\psi_k(\cdot), \Delta_v g(\cdot)\big)$ и $\big|\Delta_v g(\cdot)\big|$ $(v \in U, k = \overline{0, r})$; $\pi \equiv \bigcap\limits_{v \in U} \bigcap\limits_{k=0}^{r} \Pi^k_v$. Возьмём: некоторое натуральное число $\mathcal{N} \geqslant 1$; некоторый набор $\{\tau_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ точек τ_i множества π; некоторую определенную на множестве $\{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}$ целочисленную функцию $e(\cdot)$ с неотрицательными значениями. Каждой точке τ_i поставим в соответствие некоторое множество $\Gamma U^i \equiv \Gamma U(\tau_i)$, состоящее из $e(i)$ пар $\{(\gamma^1_i, v_{i1}), \dots, (\gamma^{e(i)}_i, v_{ie(i)})\}$ неотрицательных чисел γ^k_i и элементов v_{ik} множества U. Обозначим через Θ множество всевозможных наборов $\{\tau_i, \Gamma U^i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ (каждый из которых определяется своим числом $\mathcal{N}$, своими наборами точек τ_i, чисел γ^k_i и элементов v_{ik} множества U). Элементы множества Θ будем обозначать буквой ρ. Для любого $\rho \in \Theta$,

$$\rho = \big\{\tau_i, \Gamma U^i\big\}_{i=1}^{\mathcal{N}} = \big\{\tau_i, \big\{(\gamma^1_i, v_{i1}), \dots, (\gamma^{e(i)}_i, v_{ie(i)})\big\}\big\}_{i=1}^{\mathcal{N}} \qquad (45)$$

существует положительное число $\varepsilon(\rho)$ такое, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\rho)]$ задаваемые формулой

$$\Pi^{ij}_\varepsilon(\rho) \equiv \Big\{t \colon \tau^1_i - \varepsilon \sum_{k=1}^{j} \gamma^k_i < t^1_i \leqslant \tau^1_i - \varepsilon \sum_{k=1}^{j-1} \gamma^k_i, \quad \tau^2_i - j\varepsilon < t^2_i \leqslant \tau^2_i - (j-1)\varepsilon\Big\}$$

прямоугольники $\Pi^{ij}_\varepsilon(\rho)$, $1 \leqslant j \leqslant e(i)$, $i = \overline{1, \mathcal{N}}$ попарно не пересекаются. Каждой паре $h \equiv \{\rho, \varepsilon\}$, в которой $\rho \in \Theta$, а $\varepsilon \in [0, \varepsilon(\rho)]$, соответствует допустимое управление

$$u_h(t) \equiv \Big\{u_0(t), \quad t \in \Pi \setminus \big(\bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}} \bigcup_{j=1}^{e(i)} \Pi^{ij}_\varepsilon(\rho)\big); \;\; v_{ij}, \quad t \in \Pi^{ij}_\varepsilon(\rho)\Big\}.$$

Фиксируя $\rho \in \Theta$, получаем семейство $\{u_h \colon \varepsilon > 0\}$ зависящих от параметра ε допустимых управлений u_h, называемое многоточечной игольчатой вариантой управления u_0. Каждому $\rho \in \Theta$ отвечает своя варианта.

Последовательно применяя теорему 1, получаем следующее её обобщение: если u_0 — элемент Ω, а x_0 — соответствующее глобальное решение задачи (1)–(2), то существует такое $C > 0$ и для каждого $\rho \in \Theta$, задаваемого формулой (45), найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho) > 0$, что любое управление u_h, определяемое набором параметров $h \equiv \{\rho, \varepsilon\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, также принадлежит Ω и справедлива оценка (6), где $x_h \in W$ — отвечающее u_h глобальное решение (1)–(2), $\nu(h) \equiv \sum\limits_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum\limits_{j=1}^{e(i)} \|\Delta_{v_{ij}} g\|_{L_p^n(\Pi_\varepsilon^{ij}(\rho))}$.

Анализ доказательства теоремы 2 (см. замечание 1) позволяет сказать, что для любого набора $h \equiv \{\rho, \varepsilon\}$, в котором $\rho \in \Theta$ задается формулой (45), а $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0(\rho)]$, приращение $\Delta J_k \equiv J_k[u_h] - J_k[u_0]$ функционала J_k $(k = \overline{0, r})$ можно записать в виде

$$\Delta J_k = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{e(i)} \left\{ \iint_{\Pi_\varepsilon^{ij}(\rho)} \big(\psi_k(t),\, \Delta_{v_{ij}} f(t)\big)\, dt + K_4\, \eta_k(h) \iint_{\Pi_\varepsilon^{ij}(\rho)} \big|\Delta_{v_{ij}} f(t)\big|\, dt \right\}, \tag{46}$$

где K_4 — неотрицательная постоянная, зависящая лишь от u_0, а величина $\eta_k(h)$ для каждого $\rho \in \Theta$ стремится к нулю вместе с ε. Формула (46) показывает, что при любом $\rho \in \Theta$, определяемым формулой (45), на варианте $\{u_h \colon \varepsilon > 0\}$ управления u_0 существует предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-2}\big(J_k[u_h] - J_k[u_0]\big)$, который назовем вариацией функционала J_k на этой варианте, и этот предел равен

$$\delta J_k = \delta J_k(\rho) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{e(i)} \gamma_i^j \big(\psi_k(\tau_i), \Delta_{v_{ij}} g(\tau_i)\big), \tag{47}$$

$k = \overline{0, r}$.

Пусть теперь u_0 — оптимальное управление рассматриваемой оптимизационной задачи, а $\Omega_0 \equiv \big\{u_h \colon h = \{\rho, \varepsilon\},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(\rho)], \rho \in \Theta\big\}$ — часть Ω, состоящая из элементов всевозможных многоточечных игольчатых вариант управления u_0. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимизации

$$J_0[u] \to \max, \quad u \in \Omega_0, J_k[u] \geqslant 0 \quad (k \in S), \quad J_k[u] = 0 \quad (k = \overline{s+1, r}), \tag{48}$$

где $S \equiv \big\{k = \overline{1, s} \colon J_k[u_0] = 0\big\}$ — множество номеров активных в точке u_0 ограничений типа неравенства исходной задачи. Не ограничивая общности, считаем, что $S = \{1, 2, \ldots, \overline{s}\}$, $0 \leqslant \overline{s} \leqslant s$ ($\overline{s} = 0$ означает пустоту S). В силу упомянутой выше оценки вида (6) для любой варианты $\{u_h \colon \varepsilon > 0\}$ и любого $k = \overline{1, s}$ имеем: $J_k[u_h] \to J_k[u_0]$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому, если $J_k[u_0] > 0$, то и $J_k[u_h] > 0$ при любом $\rho \in \Theta$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, u_0 — локальное решение задачи (48) в том смысле, что для любой варианты $\{u_h \colon \varepsilon > 0\}$, определяемой некоторым $\rho \in \Theta$, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет $J_0[u_0] \geqslant J_0[u_h]$, если только $u_h \in \Omega_0, J_k[u_h] \geqslant 0 \quad (k \in S), \quad J_k[u_h] = 0$ $(k = \overline{s+1, r})$.

Очевидно, что образ Υ множества Θ при отображении

$$\Theta \ni \rho \ \to\ \big\{\delta J_0(\rho), \delta J_1(\rho), \ldots, \delta J_{\overline{s}}(\rho), \delta J_{s+1}(\rho), \ldots, \delta J_r(\rho)\big\} \ \in\ \mathbf{R}^d, \tag{49}$$

$d = 1 + \overline{s} + r - s$, есть конус. Этот конус выпуклый. Чтобы доказать это, достаточно показать, что сумма любых двух элементов конуса Υ принадлежит этому конусу. Пусть $\widetilde{y}$ и $\widehat{y}$ — некоторые элементы конуса Υ, а их прообразами при отображении (49) являются соответственно элементы $\widetilde{\rho}$ и $\widehat{\rho}$ множества Θ. Так как при $\gamma_i^j = 0$ соответствующее слагаемое в формуле (47) зануляется, то без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\rho}$ и $\widehat{\rho}$ содержат одинаковые наборы $\{\tau_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ и $\{v_{ij}\}_{1 \leqslant j \leqslant e(i),\, i=\overline{1,\mathcal{N}}}$ и отличаются лишь наборами чисел γ_i^j. Пусть $\{\widetilde{\gamma}_i^j\}_{1 \leqslant j \leqslant e(i),\, i=\overline{1,\mathcal{N}}}$ и $\{\widehat{\gamma}_i^j\}_{1 \leqslant j \leqslant e(i),\, i=\overline{1,\mathcal{N}}}$ — эти числовые наборы из $\widetilde{\rho}$ и $\widehat{\rho}$ соответственно. Составим новый набор $\rho \in \Theta$, взяв в него тот же набор $\{\tau_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$, тот же набор $\{v_{ij}\}_{1 \leqslant j \leqslant e(i),\, i=\overline{1,\mathcal{N}}}$ и набор чисел $\{\widetilde{\gamma}_i^j + \widehat{\gamma}_i^j\}_{1 \leqslant j \leqslant e(i),\, i=\overline{1,\mathcal{N}}}$. В силу (47) образом составленного набора ρ при отображении (49) будет сумма $\widetilde{y} + \widehat{y}$, которая, следовательно, принадлежит конусу Υ.

Из оптимальности u_0 в задаче (48) следует, что в пространстве $\mathbf{R}^d$ переменных $y \equiv \{y^0, y^1, \dots, y^{\overline{s}}, y^{s+1}, \dots, y^r\}$ конус Υ отделяется от конуса

$$\Lambda \equiv \{y \colon y^0 > 0, y^1 > 0, \dots, y^{\overline{s}} > 0, y^{s+1} = 0, \dots, y^r = 0\}$$

(общую схему доказательства см. в [22]; для доказательства указанной отделимости можно также воспользоваться рассуждениями из доказательства [29] предложенного В. И. Плотниковым экстремального принципа (см. [29, теорема 1])). Отделимость означает существование ненулевого вектора $\mu \equiv \{\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^{\overline{s}}, \mu^{s+1}, \dots, \mu^r\} \in \mathbf{R}^d$ такого, что $(\mu, y) \leqslant 0$ для всех $y \in \Upsilon$, причем $\mu^k \geqslant 0$ $(k = \overline{0, \overline{s}})$. Соотношение $(\mu, y) \leqslant 0$, $y \in \Upsilon$ переписывается в виде

$$\sum_{k=0}^{\overline{s}} \mu^k \, \delta J_k(\rho) + \sum_{k=s+1}^{r} \mu^k \, \delta J_k(\rho) \leqslant 0, \quad \rho \in \Theta. \tag{50}$$

Набор чисел $\lambda_0 = \mu^0, \lambda_1 = \mu^1, \dots, \lambda_{\overline{s}} = \mu^{\overline{s}}, \lambda_{\overline{s}+1} = 0, \dots, \lambda_s = 0, \lambda_{s+1} = \mu^{s+1}, \dots, \lambda_r = \mu^r$ обладает указанными в теореме 4 свойствами. Действительно, числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ неотрицательны, равенства (44) выполняются. Чтобы доказать соотношения (42), (43), возьмём произвольно τ из π и v из U и сформируем такой набор $\rho:$ $\mathcal{N} = 1$, $e(1) = 1$, $\tau_1 = \tau$, $\gamma_1^1 = 1$, $v_{11} = v$. Из (47) и (50) получаем неравенство $\sum\limits_{k=0}^{r} \lambda_k \big(\psi_k(\tau), \Delta_v g(\tau)\big) \leqslant 0$. Взяв $\psi(t) \equiv \sum\limits_{k=0}^{r} \lambda_k \psi_k(t)$, $t \in \Pi$, перепишем это неравенство в виде $\big(\psi(\tau), \Delta_v g(\tau)\big) \leqslant 0$; оно верно при любых $\tau \in \pi$, $v \in U$. Так как функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (43), выражение $\Delta_v g(\tau)$ непрерывно по переменной v, а U всюду плотно в V, то это означает выполнение условия максимума (42) в паре с сопряженным уравнением (43).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров А. И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 6. — С. 1205–1260.
2. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975. — 478 с.
3. Егоров А. И. Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004. — 504 с.
4. Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. — Иркутск: изд-во Иркутского ун-та, 1989. — 160 с.
5. Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990. — 151 с.
6. Tuan H. D. On solution sets of nonconvex Darboux problems and applications to optimal control with endpoint constraints // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1996. — Vol. 37. — P. 354–391.
7. Сумин В. И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 70–80.
8. Толстоногов А. А. Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости // Изв. РАН. Сер. матем. — 2000. — Т. 64, № 4. — С. 163–182.
9. Idczak D., Majewski M., Walczak S. Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat-Darboux problem // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 13, № 1. — P. 29–44.
10. Idczak D. The bang-bang principle for the Goursat-Darboux problem // Int. J. Contr. — 2003. — Vol. 76, № 11. — P. 1089–1904.
11. Погодаев Н. И. О решениях системы Гурса–Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1116–1126.
12. Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 61–77.
13. Suryanarayana M. B. Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial differential equations // SIAM J. Control. — 1973. — Vol. 11, № 1. — P. 130–147.
14. Плотников В. И., Сумин В. И. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. журнал. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 142–161.

15. Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. журнал. — 1978. — Т. 19, № 5. — С. 1109–1140.
16. Гаврилов В. С., Сумин М. И. Параметрическая оптимизация нелинейных систем Гурса–Дарбу с фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 6. — С. 1002–1022.
17. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. — 110 с.
18. Сумин В. И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. — 1998. — Вып. 2 (19). — С. 138–151.
19. Сумин В. И. Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах / ННГУ. — Н. Новгород, 1998. — 96 с. — Деп. в ВИНИТИ 03.09.98. № 2742-В98.
20. Сумин В.И. Вольтерровы функциональные уравнения и принцип максимума для распределенных оптимизационных задач // Вестник Нижегородского университета. Математика / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. — 2004. — Вып. 1(2). — С. 178–191.
21. Плотников В. И. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 199, № 2. — С. 275–278.
22. Плотников В. И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1972. — Т. 36, № 3. — С. 652–679.
23. Лисаченко И. В., Сумин В. И. Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса–Дарбу // Вестник Нижегородского университета. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. — 2006. — Вып. 2 (31). — С. 64–81.
24. Лисаченко И. В., Сумин В. И. Условия сохранения глобальной разрешимости задачи Гурса–Дарбу при возмущении управления / Деп. в ВИНИТИ 06.02.2008. №85 — В2008.
25. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
26. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
27. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 895 с.
28. Новоженов М. М., Сумин В. И., Сумин М. И. Методы оптимального управления системами математической физики. Учебное пособие / Горький. Изд-во ГГУ. — 1986. — 87 с.
29. Казимиров В. И., Плотников В. И., Старобинец И. М. Абстрактная схема метода вариаций и необходимые условия экстремума // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1985. — Т. 49, № 1. — С. 141–159.

Поступила в редакцию 16.01.11

I. V. Lisachenko, V. I. Sumin

The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives

The maximum principle in the terminal optimization problem for general nonlinear Goursat–Darboux system is proved. The right part of differential equation is Caratheodory function. We consider the case when a mixed derivative of system solution is summable function.

Keywords: nonlinear Goursat–Darboux system, solutions having summable mixed derivatives, terminal optimization problem, maximum principle.

Mathematical Subject Classifications: 49K20

Лисаченко Ирина Владимировна, старший преподаватель, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева. 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24. E-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математической физики, механико-математический факультет, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23. E-mail: v_sumin@mail.ru