МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 2

УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

РЕКУРРЕНТНЫЕ И ПОЧТИ РЕКУРРЕНТНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ СЕЧЕНИЯ

Рассматриваются некоторые классы рекуррентных и почти рекуррентных многозначных отображений. Доказано, что такие многозначные отображения имеют рекуррентные и почти рекуррентные (из соответствующих классов) сечения.

Ключевые слова: рекуррентная функция, сечение, многозначное отображение.

Введение

В работе рассматривается вопрос о существовании рекуррентных и почти рекуррентных сечений многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \subseteq U$ с замкнутыми образами в полном метрическом пространстве U. Непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение $F(.)$ (без предположения о выпуклости образов) может не иметь непрерывных сечений ни на одном конечном интервале $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ [1]. Но, с другой стороны, у такого многозначного отображения существуют измеримые сечения, и важной задачей является нахождение условий на многозначное отображение, обеспечивающих существование измеримых сечений, принадлежащих разным классам функций. Известно, что у почти периодических (п. п.) по Степанову многозначных отображений всегда существуют п. п. по Степанову сечения. Впервые это было доказано в [2] на основе результатов Фришковского [3]. В [4] было приведено другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п. п. по Степанову функций элементарными п. п. по Степанову функциями (еще один вариант доказательства, в котором применяются «овыпукливание» задачи и теорема Майкла, предложен в [5]). Равномерная аппроксимация измеримых функций элементарными функциями естественно используется при доказательстве существования измеримых сечений многозначных измеримых отображений (см., например, [6, 7]). Если многозначное отображение принадлежит какому-либо классу (многозначных) функций, то вопрос о существовании у него сечений из соответствующего класса функций может быть сведен к построению удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям элементарных функций из этого класса и доказательству равномерной аппроксимации функций такими элементарными функциями. Этот метод был использован в [8] и [9] для доказательства существования п. п. по Вейлю и п. п. по Безиковичу сечений многозначных п. п. (соответственно, по Вейлю и по Безиковичу) отображений. В [10] рассматривался еще один класс п. п. по Вейлю функций и многозначных отображений, определяемый не с помощью замыкания в псевдометрике Вейля множества п. п. по Степанову функций (или множества тригонометрических многочленов, если пространство U банахово), а как класс функций, для которых при любом $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов в псевдометрике Вейля относительно плотно. В [11] и [12] доказано существование п. п. по Степанову и п. п. по Вейлю сечений многозначных отображений, которые являются носителями п. п. мерозначных функций (но сами могут не быть почти периодическими).

В настоящей работе рассмотрены еще два класса функций $f : \mathbb{R} \to U$, преобразования Бохнера которых, принимающие значения в пространствах $L^p([-l,l],U)$, $p \geqslant 1$, и в пространстве измеримых функций $\widetilde{f} : [-l,l] \to U$, $l > 0$, являются рекуррентными и почти рекуррентными (в частности, п. п. по Левитану) функциями. Для доказательства существования соответствующих сечений многозначных отображений из этих классов также используется равномерная аппроксимация функций элементарными функциями, принадлежащими рассматриваемым классам функций.

Утверждения о существовании сечений многозначных отображений из разных классов функций применяются при исследовании дифференциальных включений [13]. Рекуррентные решения дифференциальных включений рассматривались в [14, 15].

В § 1 приведены определения и некоторые утверждения о (почти) рекуррентных и п. п. функциях, которые используются в дальнейшем, а также сформулированы теоремы 3, 4 и теоремы 5, 6, которые являются основными результатами работы. Большинство необходимых утверждений о рекуррентных и п. п. функциях можно найти в [16] и [17], относительно многозначных отображений и их сечений см. [18]. В § 2 доказана теорема 1 из § 1. Доказательство теоремы 2 приведено в § 3. В § 4 доказываются теоремы 3 и 4, а в § 5 — теоремы 5 и 6.

§ 1. Определения, обозначения и основные утверждения

Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство. Через $\overline{X}$ обозначается замыкание множества $X \subseteq U$. Множество $X \subseteq U$ *предкомпактно*, если $\overline{X}$ — компактное множество. Пусть mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f : \mathbb{R} \to U$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j \in U$ и попарно непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\mathrm{mes}\, \mathbb{R} \setminus \bigcup_j T_j = 0$ и $f(t) = x_j$ при $t \in T_j$. Будем обозначать такую функцию через

$$\sum_j x_j\, \chi_{T_j}(\cdot)\,, \tag{1.1}$$

где χ_T — характеристическая функция множества $T \subseteq \mathbb{R}$. Так как допускаются пустые множества T_j, то, в частности, элементарная функция может принимать конечное множество значений. Для произвольных функций $f_j : \mathbb{R} \to U$, $j \in \mathbb{N}$, обозначим через

$$\sum_j f_j(\cdot)\, \chi_{T_j}(\cdot) \tag{1.2}$$

функцию, совпадающую с $f_j(\cdot)$ на множествах T_j. Функции f_j и множества T_j будут в дальнейшем нумероваться также с помощью нескольких индексов. Если метрическое пространство U не является линейным, то введенные обозначения формально некорректны, но никаких линейных операций над такими функциями производиться не будет.

Функция $f : \mathbb{R} \to U$ (сильно) *измерима*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to U$ такая, что $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при почти всех (п. в.) $t \in \mathbb{R}$. Для измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ (для которого $\mathrm{mes}\, T \neq 0$) функция $f : T \to U$ измерима, если она является сужением некоторой измеримой функции $f' : \mathbb{R} \to U$ на множество T. Пусть $M(T, U)$ — множество измеримых функций $f : T \to U$, при этом функции, совпадающие при п. в. $t \in T$, отождествляются (поэтому измеримые функции и в том числе функции (1.1) и (1.2) могут не определяться на множествах нулевой меры Лебега).

Пусть $L^p([-l, l], U)$, $p \geqslant 1$, $l > 0$, — метрическое пространство измеримых функций $f : [-l, l] \to U$, для которых

$$\int_{-l}^{l} \rho^p(f(\tau), x_0)\, d\tau < +\infty \tag{1.3}$$

для некоторого (и, следовательно, для всех) $x_0 \in U$, с метрикой

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}\,(f, g) = \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \rho^p(f(\tau), g(\tau))\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}};$$

$L^\infty([-l, l], U)$, $l > 0$, — метрическое пространство измеримых функций $f : [-l, l] \to U$, для которых

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in [-l, l]} \rho(f(\tau), x_0) < +\infty \tag{1.4}$$

для некоторого (и, следовательно, для всех) $x_0 \in U$, с метрикой

$$D^{(\rho)}_{\infty,\, l}\,(f,g) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in [-l,l]} \rho(f(\tau), g(\tau))\,;$$

$L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$ (соответственно, $p = \infty$),— множество измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ таких, что неравенства (1.3) (соответственно, (1.4)) выполняются для любого $l > 0$. Метрики $D^{(\rho)}_{p,\, l}$, где $p \geqslant 1$ или $p = \infty$, распространяются также на пространства $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, на которых они становятся псевдометриками. Для всех $l > 0$ определим *преобразования Бохнера*, ставящие в соответствие функциям $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ функции

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \widetilde{f}_l\,(t;\cdot) \in L^p([-l,l],U), \tag{1.5}$$

для которых $\widetilde{f}_l\,(t;\tau) = f(t+\tau)$, $\tau \in [-l,l]$, $t \in \mathbb{R}$. Функции (1.5) непрерывны при $p \geqslant 1$, а также при $p = \infty$ в случае $f \in C(\mathbb{R},U) \subseteq L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ (для метрических пространств U_1, U_2 через $C(U_1,U_2)$ обозначается множество непрерывных функций $\mathcal{F}: U_1 \to U_2$).

Пусть $L^\infty(\mathbb{R},U)$ — метрическое пространство в существенном ограниченных измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ с метрикой

$$D^{(\rho)}_{\infty}(f,g) = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), g(t))\,,$$

которую распространим также на пространство $M(\mathbb{R},U)$ (допуская значение $+\infty$).

В силу теоремы Фреше (см., например, [19]) любое полное метрическое пространство (U,ρ) изометрично вкладывается в некоторое вещественное банахово пространство $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$, $\rho(x,y) = \|x-y\|$, $x,y \in U$. При этом сохраняется (сильная) измеримость функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) \in U \subseteq \mathcal{B}$ и для всех $f,g \in L^p([-l,l],U)$ справедливо равенство $D^{(\rho)}_{p,\, l}\,(f,g) = \|f-g\|_{p,\, l}$, где $\|\cdot\|_{p,\, l}$ — норма в пространстве $L^p([-l,l],\mathcal{B})$:

$$\|f\|_{p,\, l} = \left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(\tau)\|^p\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geqslant 1, \quad \|f\|_{\infty,\, l} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in [-l,l]} \|f(\tau)\|.$$

Так же определяется норма в пространстве $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B})$:

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|.$$

В дальнейшем при доказательстве ряда утверждений будет удобно предполагать, что $U = (\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство, $\rho(x,y) = \|x-y\|$, $x,y \in \mathcal{B}$.

Для метрического пространства (U,ρ) фиксируем некоторый элемент $x_0 \in U$ (если $U = (\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — банахово пространство, то $x_0 = 0$). В $\mathbb{R}^n$ будет рассматриваться евклидова норма (и соответствующая ей метрика).

На метрическом пространстве (U,ρ) будем рассматривать также метрику

$$\rho'(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}\,, \quad x,y \in U.$$

Метрическое пространство (U,ρ') также полное. Совокупности замкнутых и компактных подмножеств метрического пространства (U,ρ) не меняются при переходе к метрике ρ'.

Множество $T \subseteq \mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a > 0$ такое, что $T \cap [t,t+a] \neq \varnothing$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Совокупность относительно плотных множеств обозначим через $\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$.

Непрерывная функция $f \in C(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $CAP\,(\mathbb{R},U)$ *почти периодических* (п. п.) *по Бору* функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых

$$D^{(\rho)}_{\infty}(f(\cdot), f(\cdot+t)) < \varepsilon\,,$$

относительно плотно. Функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U)$ называется *почти периодической по Степанову* (*степени* $p \geqslant 1$), если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ преобразование Бохнера (1.5), которое является непрерывной функцией, почти периодично по Бору.

Прежде чем дать определения пространств рекуррентных и почти рекуррентных функций, напомним некоторые определения и простые утверждения из теории динамических систем (см., например, [16]).

Пусть (Σ, ρ_Σ) — полное метрическое пространство. *Динамической системой* называется однопараметрическая группа g^t, $t \in \mathbb{R}$, преобразований метрического пространства Σ на себя, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $g^0 x = x$ для всех $x \in \Sigma$;

(2) функция $\mathbb{R} \times \Sigma \ni (t, x) \mapsto g^t x \in \Sigma$ непрерывна по совокупности переменных;

(3) $g^{t_1} g^{t_2} = g^{t_1 + t_2}$ (групповое свойство).

При фиксированном $x \in \Sigma$ функция $t \mapsto g^t x$ называется *движением*, $\mathrm{orb}\, x = \{g^t x : t \in \mathbb{R}\}$ — *траектория* движения, $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — ее замыкание в Σ. Движение $t \mapsto g^t x$ *устойчиво по Лагранжу*, если $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — компактное множество. Множество $X \subseteq \Sigma$ *инвариантно*, если $\mathrm{orb}\, x \subseteq X$ для всех $x \in X$. Множество $X \subseteq \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непустое, замкнутое, инвариантное и не имеет истинного подмножества, обладающего этими свойствами.

Движение $t \mapsto g^t x$ *рекуррентно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $a = a(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t, t_1 \in \mathbb{R}$ найдется число $\tau \in [t_1, t_1 + a]$, для которого $\rho_\Sigma\,(g^t x, g^\tau x) < \varepsilon$.

Движение $t \mapsto g^t x$ *почти рекуррентно* (см., например, определение в [20, 21]), если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых $\rho_\Sigma\,(x, g^t x) < \varepsilon$, относительно плотно. Если движение $t \mapsto g^t x$ почти рекуррентно, то для любых $l, \varepsilon > 0$ относительно плотно множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых

$$\max_{\tau \in [-l, l]} \rho_\Sigma\,(g^\tau x, g^{t+\tau} x) < \varepsilon\,.$$

Существует связь между минимальными компактными множествами и рекуррентными движениями. Справедливы следующие утверждения, принадлежащие Биркгофу (см. [16]): если X — минимальное компактное множество и $x \in X$, то движение $t \mapsto g^t x$ рекуррентно; если $t \mapsto g^t x$ — рекуррентное движение, то $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — минимальное компактное множество. При этом движение $t \mapsto g^t x$ рекуррентно тогда и только тогда, когда оно почти рекуррентно и $\overline{\mathrm{orb}\, x}$ — компактное множество.

На пространстве $C(\mathbb{R}, U)$ введем метрику

$$d_C(f, g) = \sum_{l=1}^{+\infty} 2^{-l}\, \frac{D^{(\rho)}_{\infty, l}\,(f, g)}{1 + D^{(\rho)}_{\infty, l}\,(f, g)}\,,$$

на пространстве $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, — метрику

$$d_p(f, g) = \sum_{l=1}^{+\infty} 2^{-l}\, \frac{D^{(\rho)}_{p, l}\,(f, g)}{1 + D^{(\rho)}_{p, l}\,(f, g)}$$

и на пространстве $M(\mathbb{R}, U)$ измеримых функций $f : \mathbb{R} \to U$ — метрику

$$d(f, g) = \sum_{l=1}^{+\infty} 2^{-l}\, \frac{D^{(\rho')}_{1, l}\,(f, g)}{1 + D^{(\rho')}_{1, l}\,(f, g)}\,.$$

Сходимость функций в $C(\mathbb{R}, U)$ (соответственно, в $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U)$ и $M(\mathbb{R}, U)$) — это равномерная сходимость (соответственно, сходимость в $L^p([-l, l], U)$ и сходимость по мере Лебега) на каждом отрезке $[-l, l]$, $l > 0$. Метрические пространства $(C(\mathbb{R}, U), d_C)$, $(L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U), d_p)$ и $(M(\mathbb{R}, U), d)$ являются полными. На этих пространствах определим динамические системы сдвигов: $g^t f(\cdot) = f(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, $L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, и $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ — подпространства функций $f:\mathbb{R}\to U$, принадлежащих пространствам $C(\mathbb{R},U)$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ и $M(\mathbb{R},U)$ соответственно, для которых движения $t\mapsto g^t f(\cdot)=f(\cdot+t)$ устойчивы по Лагранжу.

Функция $f\in C(\mathbb{R},U)$ принадлежит подпространству $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна (на $\mathbb{R}$) и $\{f(t):t\in\mathbb{R}\}$ — предкомпактное множество (в U). Измеримая функция $f:\mathbb{R}\to U$ принадлежит подпространству $L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ (соответственно, $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$) тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для каждого) $l>0$ преобразование Бохнера $t\mapsto\widetilde{f_l}(t;\cdot)$ принадлежит $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},L^p([-l,l],U))$ (соответственно, $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$), то есть когда множество $\{\widetilde{f_l}(t;\cdot):t\in\mathbb{R}\}$ предкомпактно в $L^p([-l,l],U)$ (соответственно, в $L^1([-l,l],(U,\rho'))$).

Так как $D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)\leqslant D^{(\rho)}_{\infty,\,l}(f,g)$ для всех $f,g\in C(\mathbb{R},U)$, где $p\geqslant 1$, и $D^{(\rho')}_{1,\,l}(f,g)\leqslant D^{(\rho)}_{1,\,l}(f,g)\leqslant D^{(\rho)}_{p_1,\,l}(f,g)\leqslant D^{(\rho)}_{p_2,\,l}(f,g)$ для всех $f,g\in L^{p_2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ (и всех $l>0$), где $1\leqslant p_1\leqslant p_2$, то отсюда, в частности, следует, что $C^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)\subseteq L^{p_2,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)\subseteq L^{p_1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)\subseteq M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$.

Обозначим через $\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, множество функций $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ таких, что для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$

$$\lim_{\delta\to+0}\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\ \sup_{T\subseteq[t-l,\,t+l]\,:\,\mathrm{mes}\,T\leqslant\delta}\ \int_T\rho^p(f(\tau),x_0)\,d\tau=0\,.$$

Справедлива простая

Лемма 1. *Для всех* $p\geqslant 1$ *выполняется равенство* $L^{p,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)=M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)\cap\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)$.

Для измеримых (по Лебегу) множеств $T\subseteq\mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_l(T)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{2l}\ \mathrm{mes}\,[t-l,\,t+l]\cap T,\quad l>0.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, состоящих из попарно непересекающихся измеримых подмножеств $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, таких, что $\varkappa_l\left(\mathbb{R}\backslash\bigcup_{j\leqslant J}T_j\right)\to 0$ при $J\to+\infty$ для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$; $\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}$, для которых $\chi_{T_j}\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ при всех $j\in\mathbb{N}$. Обозначим через $E^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ множество элементарных функций (1.1), для которых $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$.

Теорема 1. *Функция* $f\in M(\mathbb{R},U)$ *принадлежит подпространству* $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon\in E^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$.

В теореме 1, в частности, утверждается, что $E^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)\subseteq M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. Доказательство теоремы 1 приведено в § 2.

Определение 1. Функция $f\in C(\mathbb{R},U)$ называется *почти рекуррентной* (соответственно, *рекуррентной*), если $t\mapsto g^t f(\cdot)=f(\cdot+t)$ — почти рекуррентное (соответственно, рекуррентное) движение в $(C(\mathbb{R},U),d_C)$.

Определение 2. Функция $f\in M(\mathbb{R},U)$ называется *почти M–рекуррентной* (соответственно, *M–рекуррентной*), если $t\mapsto g^t f(\cdot)=f(\cdot+t)$ — почти рекуррентное (соответственно, рекуррентное) движение в $(M(\mathbb{R},U),d)$.

Определение 3. Функция $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, называется *почти L^p_{loc}–рекуррентной* (соответственно, *L^p_{loc}–рекуррентной*), если $t\mapsto g^t f(\cdot)=f(\cdot+t)$ — почти рекуррентное (соответственно, рекуррентное) движение в $(L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U),d_p)$.

Пространства почти рекуррентных, почти M–рекуррентных и почти $L^p_{\rm loc}$–рекуррентных функций $f:\mathbb{R}\to U$ обозначим через $\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ соответственно. Пусть $\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$ — пространства рекуррентных, M–рекуррентных и $L^p_{\rm loc}$–рекуррентных функций. Имеем

$$\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)\bigcap C^{\rm comp}(\mathbb{R},U),\quad \mathcal{R}^{\rm comp}(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}(\mathbb{R},U)\bigcap M^{\rm comp}(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)\bigcap L^{p,\,\rm comp}_{\rm loc}(\mathbb{R},U).$$

Справедливы вложения

$$\mathcal{R}^{p_2}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{R}^{p_2,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p_1,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{\rm comp}(\mathbb{R},U),\quad 1\leqslant p_1\leqslant p_2\,,$$

$$CAP(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}(\mathbb{R},U),\quad S^p(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}(\mathbb{R},U),\quad p\geqslant 1.$$

При этом измеримая функция $f:\mathbb{R}\to U$ принадлежит пространству $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ (соответственно, $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$) в том и только в том случае, если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ преобразование Бохнера $t\mapsto\widetilde{f}_l\,(t;\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},L^p([-l,l],U))$ (соответственно, $\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$). Аналогичным образом, функция $f\in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$ (соответственно, $\mathcal{R}^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$) в том и только в том случае, если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ преобразование Бохнера $t\mapsto\widetilde{f}_l\,(t;\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}(\mathbb{R},L^p([-l,l],U))$ (соответственно, $\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}(\mathbb{R},L^1([-l,l],(U,\rho')))$).

Частично упорядоченное множество $\mathcal{A}=(\mathcal{A},\geqslant)$ называется *направленным* множеством, если для любых элементов $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{A}$ существует элемент $\alpha\in\mathcal{A}$ такой, что $\alpha\geqslant\alpha_1$ и $\alpha\geqslant\alpha_2$.

Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — частично упорядоченные множества, то через $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ обозначается частично упорядоченное декартово произведение множеств $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ ($(\alpha_1,\alpha_2)\leqslant(\beta_1,\beta_2)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1\leqslant\beta_1$ и $\alpha_2\leqslant\beta_2$). Если $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ — направленные множества, то $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ — также направленное множество.

Для направленного множества $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A})$ совокупность многозначных функций (направленностей) $\mathcal{A}\ni\alpha\mapsto\Gamma(\alpha)\subseteq\mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$(0_{\mathcal{A}})$ $0\in\Gamma(\alpha)$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$,

$(1_{\mathcal{A}})$ если $\alpha,\alpha'\in\mathcal{A}$ и $\alpha\leqslant\alpha'$, то $\Gamma(\alpha)\supseteq\Gamma(\alpha')$.

Для направленностей $\Gamma_j\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, определим направленность $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2\ni\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(\Gamma_1\cap\Gamma_2)(\widetilde{\alpha})\doteq\Gamma_1(\alpha_1)\cap\Gamma_2(\alpha_2)$. Имеем $\Gamma_1\cap\Gamma_2\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$.

Пусть $\mathcal{A}_j$ — направленные множества и $\Gamma_j\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$. Направленность Γ_1 *подчинена* направленности Γ_2 (в этом случае пишем $\Gamma_1\prec\Gamma_2$), если для любого $\alpha_1\in\mathcal{A}_1$ найдется элемент $\alpha_2\in\mathcal{A}_2$ такой, что $\Gamma_1(\alpha_1)\supseteq\Gamma_2(\alpha_2)$. Если $\Gamma_1\prec\Gamma_2$ и $\Gamma_2\prec\Gamma_1$, то направленности Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны*. Отношение подчинения является рефлексивным и транзитивным, поэтому классы эквивалентности направленностей образуют частично упорядоченное множество, которое также является направленным (если $\Gamma_j\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, то $\Gamma_j\prec\Gamma_1\cap\Gamma_2$, $j=1,2$).

Если $\Gamma\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A})$, $\Gamma_j\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_j)$ и $\Gamma_j\prec\Gamma$, $j=1,2$, то $\Gamma_1\cap\Gamma_2\prec\Gamma$.

Обозначим через $\mathcal{N}\,(\mathcal{A})$ множество направленностей $\Gamma\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A})$, удовлетворяющих также следующему условию:

$(2_{\mathcal{A}})$ для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ существует элемент $\alpha'\geqslant\alpha$ такой, что для каждого числа $t\in\Gamma(\alpha')$ найдется такой элемент $\alpha''\in\mathcal{A}$, что $t+\Gamma(\alpha'')\subseteq\Gamma(\alpha)$ (если $t\in\mathbb{R}$, $T\subseteq\mathbb{R}$, то $t+T\doteq\{t+\tau:\tau\in T\}$).

Пусть $\mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A})$ — множество направленностей $\Gamma\in\mathcal{N}\,(\mathcal{A})$, для которых $\Gamma(\alpha)\in\mathcal{S}_{\rm rd}$ при всех $\alpha\in\mathcal{A}$.

Если направленности $\Gamma_j\in\mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, эквивалентны и $\Gamma_1\in\mathcal{N}\,(\mathcal{A}_1)$, то также $\Gamma_2\in\mathcal{N}\,(\mathcal{A}_2)$. Если $\Gamma_1\in\mathcal{N}\,(\mathcal{A}_1)$, $\Gamma_2\in\mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A}_2)$ и $\Gamma_1\prec\Gamma_2$, то также $\Gamma_1\in\mathcal{N}_{\rm rd}\,(\mathcal{A}_1)$.

В дальнейшем следующие направленные множества $\mathcal{A}^{(1)}$, $\mathcal{A}_p^{(1)}$, где $p \geqslant 1$, и $\mathcal{A}^{(2)}$ будут играть ключевую роль. Пусть $\mathcal{A}^{(1)}$ — множество упорядоченных пар (l,ε), где $l,\,\varepsilon > 0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1) \geqslant (l_2,\varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1 \geqslant l_2$ и $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$; $\mathcal{A}_p^{(1)}$ — множество упорядоченных пар (l,ε), где $l,\,\varepsilon > 0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1) \geqslant (l_2,\varepsilon_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1 \geqslant l_2$ и $l_1\varepsilon_1^p \leqslant l_2\varepsilon_2^p$; $\mathcal{A}^{(2)}$ — множество упорядоченных троек (l,ε,δ), где $l,\,\varepsilon,\,\delta > 0$, с отношением порядка: $(l_1,\varepsilon_1,\delta_1) \geqslant (l_2,\varepsilon_2,\delta_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1 \geqslant l_2$, $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ и $l_1\delta_1 \leqslant l_2\delta_2$.

Для функций $f:\mathbb{R}\to U$ из пространств $C(\mathbb{R},U)$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ и $M(\mathbb{R},U)$ определим соответственно направленности

$$\mathcal{A}^{(1)} \ni (l,\varepsilon) \mapsto \Gamma_f^{(C)}(l,\varepsilon) \doteq \{t\in\mathbb{R} : D^{(\rho)}_{\infty,\,l}\,(f(\cdot),f(\cdot+t)) < \varepsilon\},$$

$$\mathcal{A}_p^{(1)} \ni (l,\varepsilon) \mapsto \Gamma_f^{\,p}\,(l,\varepsilon) \doteq \{t\in\mathbb{R} : D^{(\rho)}_{p,\,l}\,(f(\cdot),f(\cdot+t)) < \varepsilon\},$$

$$\mathcal{A}^{(2)} \ni (l,\varepsilon,\delta) \mapsto \Gamma_f\,(l,\varepsilon,\delta) \doteq \{t\in\mathbb{R} : \mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l] : \rho(f(\tau),f(\tau+t)) \geqslant \varepsilon\} < 2l\delta\}.$$

Непосредственно проверяется, что $\Gamma_f^{(C)} \in \mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}^{(1)})$, $\Gamma_f^{\,p} \in \mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}_p^{(1)})$ и $\Gamma_f \in \mathcal{N}_0\,(\mathcal{A}^{(2)})$.

Если $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$ и $f \in L^{p_2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, то $f \in L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$ и для всех $l,\,\varepsilon > 0$ справедливо вложение $\Gamma_f^{\,p_1}(l,\varepsilon) \supseteq \Gamma_f^{\,p_2}(l,\varepsilon)$, поэтому $\Gamma_f \prec \Gamma_f^{\,p_1} \prec \Gamma_f^{\,p_2}$. Если $p \geqslant 1$ и $f \in C(\mathbb{R},U)$, то $\Gamma_f^{\,p}(l,\varepsilon) \supseteq \Gamma_f^{(C)}(l,\varepsilon)$ для всех $l,\,\varepsilon > 0$, поэтому $\Gamma_f^{\,p} \prec \Gamma_f^{(C)}$. Для функций $f \in L^\infty(\mathbb{R},U)$ все направленности $\Gamma_f^{\,p}$, $p \geqslant 1$, и Γ_f эквивалентны.

Лемма 2. *Если* $f \in C(\mathbb{R},U)$, *то* $\Gamma_f^{(C)} \in \mathcal{N}\,(\mathcal{A}^{(1)})$.

Лемма 3. *Если* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, *то* $\Gamma_f^{\,p} \in \mathcal{N}\,(\mathcal{A}_p^{(1)})$.

Лемма 4. *Если* $f \in M(\mathbb{R},U)$, *то* $\Gamma_f \in \mathcal{N}\,(\mathcal{A}^{(2)})$.

Леммы 2, 3 и 4 имеют аналогичные доказательства, поэтому приведем только доказательство леммы 4.

Доказательство леммы 4. Пусть $\alpha = (l,\varepsilon,\delta) \in \mathcal{A}^{(2)}$. Выберем элемент $\alpha' = (l,\varepsilon',\delta') \in \mathcal{A}^{(2)}$ так, что $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$ и $\delta' \in (0,\delta)$ (в этом случае $\alpha' > \alpha$). Для числа $t \in \Gamma_f\,(l,\varepsilon',\delta')$ выберем число $l' \geqslant l$ так, что $[-l+t,l+t] \subseteq [-l',\,l']$. Тогда для всех $t' \in \Gamma_f\,(l',\varepsilon-\varepsilon',\,\frac{l}{l'}\,(\delta-\delta'))$ получаем

$$\frac{1}{2l}\,\mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l] : \rho(f(\tau),f(\tau+t+t')) \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2l}\,\mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l] : \rho(f(\tau),f(\tau+t)) \geqslant \varepsilon'\} + \frac{1}{2l}\,\mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l] : \rho(f(\tau+t),f(\tau+t+t')) \geqslant \varepsilon-\varepsilon'\} <$$

$$< \delta' + \frac{l'}{l}\,\frac{1}{2l'}\,\mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l',\,l'] : \rho(f(\tau),f(\tau+t')) \geqslant \varepsilon-\varepsilon'\} < \delta' + (\delta-\delta') = \delta\,,$$

поэтому

$$t + \Gamma_f\,(l',\varepsilon-\varepsilon',\,\frac{l}{l'}\,(\delta-\delta')) \subseteq \Gamma_f\,(l,\varepsilon,\delta)$$

(и, следовательно, выполняется условие $(2_{\mathcal{A}})$ из определения множеств $\mathcal{N}\,(\mathcal{A}^{(2)})$). $\square$

Из определений 1, 2 и 3 непосредственно следует, что

(1) функция $f \in C(\mathbb{R},U)$ почти рекуррентна тогда и только тогда, когда $\Gamma_f^{(C)} \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}^{(1)})$;

(2) функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, почти L^p_{loc}–рекуррентна тогда и только тогда, когда $\Gamma_f^{\,p} \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}_p^{(1)})$;

(3) функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ почти M–рекуррентна тогда и только тогда, когда $\Gamma_f \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}\,(\mathcal{A}^{(2)})$.

Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество. Обозначим через $\mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ (соответственно, через $\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$) множество функций $f\in\mathcal{R}^{(C)}(\mathbb{R},U)$ (соответственно, функций $f\in\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$), для которых $\Gamma^{(C)}_f \prec \Gamma$. Аналогичным образом, пусть $\mathcal{R}^{p}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{p,\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, и $\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)$ — пространства функций из $\mathcal{R}^{p}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$, для которых $\Gamma^p_f\prec\Gamma$ и $\Gamma_f\prec\Gamma$ соответственно. Справедливы вложения

$$\mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p_2}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p_1}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p_2,\,\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p_1,\,\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma}(\mathbb{R},U),\quad 1\leqslant p_1\leqslant p_2\,.$$

Если $\Gamma_j\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, и $\Gamma_1\prec\Gamma_2$, то

$$\mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{(C)}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U),\quad \mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{(C),\,\rm comp}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U),$$

$$\mathcal{R}^{p}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U),\quad \mathcal{R}^{p,\,\rm comp}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U),\quad p\geqslant 1,$$

$$\mathcal{R}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U),\quad \mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma_1}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma_2}(\mathbb{R},U).$$

Для произвольного непустого множества $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda}$ направленное множество упорядоченных пар $(\varepsilon,\mathcal{K})$, где $\varepsilon>0$ и $\mathcal{K}$ — непустое конечное подмножество множества Λ, с отношением порядка: $(\varepsilon_1,\mathcal{K}_1)\geqslant(\varepsilon_2,\mathcal{K}_2)$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$ и $\mathcal{K}_1\supseteq\mathcal{K}_2$.

Каждому непустому множеству $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$ поставим в соответствие направленность

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda}\ni(\varepsilon,\mathcal{K})\mapsto\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}(\varepsilon,\mathcal{K})\doteq\{t\in\mathbb{R}:|1-e^{\,{\rm i}\lambda t}|<\varepsilon\ \text{ для всех }\ \lambda\in\mathcal{K}\}\,.$$

Справедливо включение $\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda})$ (см., например, [17]).

Функции из пространства $\mathcal{R}^{(C)}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathbb{R}}}(\mathbb{R},U)$ (при $\Lambda=\mathbb{R}$) называются *почти периодическими по Левитану*, при этом $CAP(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}^{(C)}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathbb{R}}}(\mathbb{R},U)$. Если $f\in\mathcal{R}^{(C)}_{\widetilde{\Gamma}^{\mathbb{R}}}(\mathbb{R},U)$, то $f\in\mathcal{R}^{(C)}_{\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}}(\mathbb{R},U)$ для некоторого счетного множества $\Lambda\subset\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Для любой направленности* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ *— произвольное направленное множество, любого элемента* $\alpha\in\mathcal{A}$ *и любых чисел* $\lambda_j>0$, $j=1,\dots,m$, *и* $\delta>0$ *множество*

$$\Gamma(\alpha)\bigcap\Bigl(\bigcap_{j\,=\,1}^{m}\{t\in\mathbb{R}:|1-e^{\,{\rm i}\lambda_j t}|<\delta\}\Bigr)$$

относительно плотно.

Доказательство теоремы 2 приведено в § 3.

Следствие 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— направленное множество и* $\varnothing\neq\Lambda\subseteq\mathbb{R}$. *Тогда для любой направленности* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$ *имеем* $\Gamma\cap\widetilde{\Gamma}^{\Lambda}\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A}\times\widetilde{\mathcal{A}}^{\Lambda})$.

В дальнейшем для направленностей $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$ и чисел $\mathcal{T}>0$ будем использовать краткое обозначение $\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}\doteq\Gamma\cap\widetilde{\Gamma}^{\{\mathcal{T}\}}$ (где $\{\mathcal{T}\}$ — одноэлементное множество). При этом $\Gamma\prec\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}$. Из следствия 1 вытекает включение $\Gamma^{\{\mathcal{T}\}}\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A}\times\widetilde{\mathcal{A}}^{\{\mathcal{T}\}})$.

Фиксируем направленность $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$. Для произвольных измеримых множеств $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, будем писать $T_j\stackrel{\Gamma}{\to}\varnothing$ при $j\to+\infty$, если для любых $l,\delta>0$ найдутся элемент $\alpha\in\mathcal{A}$ и число $j_0\in\mathbb{N}$ такие, что при всех $j\geqslant j_0$ и всех $t\in\Gamma(\alpha)$ выполняется неравенство ${\rm mes}\,[-l+t,l+t]\cap T_j<2l\delta$. Если $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, — измеримые множества и $\varkappa_l(T_j)\to 0$ при $j\to+\infty$ для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$, то $T_j\stackrel{\Gamma}{\to}\varnothing$ при $j\to+\infty$ (для любой направленности $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$). Пусть $\mathcal{R}_{\Gamma}\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\chi_T\in\mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (что эквивалентно условию $\chi_T\in\mathcal{R}^1_{\Gamma}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Обозначим через $\mathfrak{M}_{\Gamma}$

совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, состоящих из попарно непересекающихся измеримых подмножеств $T_j \subseteq \mathbb{R}$ таких, что $T_j \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$, и $\mathbb{R}\backslash\bigcup_{j\leqslant J} T_j \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $J\to+\infty$. (Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}_\Gamma$, то $\operatorname{mes}\mathbb{R}\backslash\bigcup_j T_j = 0$.)

Пусть $\mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{ER}_\Gamma^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$ — множества элементарных функций (1.1), для которых $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}_\Gamma$ и $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}_\Gamma\cap\mathfrak{M}^{\rm comp}$ соответственно.

Следующие лемма 5 и теоремы 3 и 4 доказаны в § 4.

Лемма 5. *Для всех направленностей* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$ *справедливы вложения*

$$\mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U),\quad \mathcal{ER}_\Gamma^{\rm comp}(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}_\Gamma^{\rm comp}(\mathbb{R},U).$$

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ *— произвольное направленное множество. Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ *и любых* $\varepsilon>0$ *и* $\mathcal{T}>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon\in\mathcal{ER}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$. *Если, кроме того,* $f\in\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$ *при некотором* $p\geqslant1$, *то также* $f_\varepsilon\in\mathcal{ER}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)\cap\mathcal{R}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A}$ *— произвольное направленное множество. Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{R}^{\rm comp}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ *и любых* $\varepsilon>0$ *и* $\mathcal{T}>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon\in\mathcal{ER}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$. *Если, кроме того,* $f\in\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ *при некотором* $p\geqslant1$, *то также* $f_\varepsilon\in\mathcal{ER}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)\cap\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$.

Теоремы 3 и 4 используются при доказательстве теорем 5 и 6, в которых утверждается существование почти рекуррентных (из пространств $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant1$) и рекуррентных (из пространств $\mathcal{R}^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant1$) сечений многозначных почти рекуррентных и рекуррентных отображений соответственно. При доказательстве теорем 3 и 4 применяется метод, разные варианты которого использовались ранее для доказательства равномерной аппроксимации п. п. функций элементарными п. п. функциями (см. [4, 8, 9, 10]). В § 2 более простой вариант этого метода применяется при доказательстве теоремы 1. В § 4, который существенно опирается на результаты из § 2, предложен вариант этого метода для рекуррентных и почти рекуррентных функций.

Пусть $\operatorname{Cl}_b U=\operatorname{Cl}_b(U,\rho)$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства (U,ρ). На $\operatorname{Cl}_b U$ определяется метрика Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(X,Y)=\operatorname{dist}_\rho(X,Y)=\max\{\sup_{x\in X}\rho(x,Y),\ \sup_{y\in Y}\rho(y,X)\},\quad X,Y\in\operatorname{Cl}_b U,$$

и (соответствующая ей) метрика

$$\operatorname{dist}'(X,Y)\doteq\min\{1,\operatorname{dist}(X,Y)\}=\operatorname{dist}_{\rho'}(X,Y),\quad X,Y\in\operatorname{Cl}_b U,$$

где $\rho(x,P)=\inf_{y\in P}\rho(x,y)$ — расстояние от точки $x\in U$ до непустого множества $P\subseteq U$. Метрическое пространство $(\operatorname{Cl}_b U,\operatorname{dist})$ (как и пространство $(\operatorname{Cl}_b U,\operatorname{dist}')$) является полным. В работе рассматриваются многозначные отображения $\mathbb{R}\ni t\mapsto F(t)\in\operatorname{Cl}_b U$, которые отождествляются с функциями со значениями в метрическом пространстве $(\operatorname{Cl}_b U,\operatorname{dist})$, поэтому для них будут использоваться определения (измеримые, непрерывные, почти периодические, рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения) и обозначения, введенные для таких функций.

Измеримая функция $f:T\to U$, где $T\subseteq\mathbb{R}$ — измеримое (по Лебегу) множество (и $\operatorname{mes}T\neq0$), называется *сечением* (измеримого) многозначного отображения $F:T\to\operatorname{Cl}_b U$, если $f(t)\in F(t)$ при п. в. $t\in T$.

Известно, что непрерывные многозначные отображения $F\in C(\mathbb{R},\operatorname{Cl}_b U)$ могут не иметь непрерывных сечений (см. [1]). Приведем простой пример, иллюстрирующий такую ситуацию.

Пример 1. Пусть $U = \mathbb{C}$, $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим многозначное отображение $[0,1) \ni t \mapsto \Phi(t) \subseteq [0,1)$, для которого

$$\Phi(t) = \bigcup_{\nu=0}^{2^n-1} \left\{ \frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n} + t - 1 \right\}$$

при $1 - 2^{-n} \leqslant t < 1 - 2^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Положим

$$F(t) = \left\{ e^{2\pi \mathrm{i}\,(\frac{t}{1-t} + \phi)} : \phi \in \Phi(t) \right\} \subset S^1$$

при $0 \leqslant t < 1$ и $F(1) = S^1 \doteq \{z : |z| = 1\}$. Многозначное отображение $[0,1] \ni t \mapsto F(t) \in (\mathrm{Cl}_b\,\mathbb{C}, \mathrm{dist}_\rho)$ непрерывно, но не имеет непрерывных сечений. Действительно, любая непрерывная функция $[0,1) \ni t \mapsto f(t) \in F(t)$ при $t \to 1$ делает бесконечное число оборотов (против часовой стрелки) вокруг начала координат, поэтому она не может непрерывно продолжаться на отрезок $[0,1]$. Теперь положим $F(t) \doteq F(-t)$ при $t \in [-1, 0)$ и продолжим многозначное отображение $F(\cdot)$ периодически с периодом 2 на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$. Получившееся периодическое многозначное отображение $F : \mathbb{R} \to (\mathrm{Cl}_b\,\mathbb{C}, \mathrm{dist}_\rho)$ непрерывно и не имеет непрерывных сечений. $\square$

Немного усложняя приведенный пример, можно также построить непрерывное периодическое многозначное отображение $F : \mathbb{R} \to (\mathrm{Cl}_b\,\mathbb{C}, \mathrm{dist}_\rho)$, у которого нет непрерывных сечений ни на одном интервале (t_1, t_2), $t_1 < t_2$ (см. также [1]).

С другой стороны, если $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство, $\mathrm{CoCl}_b\,\mathcal{B}$ — полное метрическое пространство выпуклых множеств из $\mathrm{Cl}_b\,\mathcal{B}$ (с метрикой Хаусдорфа dist) и $F \in \mathcal{R}^{(C)}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{CoCl}_b\,\mathcal{B})$ (соответственно, $F \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{CoCl}_b\,\mathcal{B})$), то существует функция $f \in \mathcal{R}^{(C)}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (соответственно, $f \in \mathcal{R}^{(C),\,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$) такая, что $f(t) \in F(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Действительно, из теоремы Майкла [1] следует, что существует непрерывное отображение $\Psi : (\mathrm{CoCl}_b\,\mathcal{B}, \mathrm{dist}) \to (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ такое, что $\Psi(X) \in X$ для всех $X \in \mathrm{CoCl}_b\,\mathcal{B}$. Но тогда, как нетрудно видеть, функция $t \mapsto f(t) \doteq \Psi(F(t))$ удовлетворяет требуемым условиям.

В следующих двух теоремах не предполагается, что многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) \subseteq U$ имеют выпуклые образы. Теоремы 5 и 6 являются основным результатом работы.

Теорема 5. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\,U)$ и $g \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любого $\mathcal{T} > 0$ и любой неубывающей функции $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, найдется функция $f \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $F \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\,U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f \in \mathcal{R}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$.*

Теорема 6. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\,U)$ и $g \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$. Тогда для любого $\mathcal{T} > 0$ и любой неубывающей функции $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, существует функция $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $F \in \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\,U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f \in \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$.*

Доказательства теорем 5 и 6 приведены в § 5.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $B_U(x, r) = \{y \in U : \rho(x, y) \leqslant r\}$ замкнутый шар радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке $x \in U$.

В дальнейшем в качестве полного метрического пространства (U, ρ) будет рассматриваться также вещественное банахово пространство $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ (если необходимо использовать линейные операции, а также когда использование линейных операций над функциями $f:\mathbb{R}\to\mathcal{B}$ упрощает доказательства утверждений).

Множество $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ плотно в полном метрическом пространстве $(M(\mathbb{R},U),d)$. Измеримая функция $f:\mathbb{R}\to U$ принадлежит множеству $M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для всех) $l>0$ множество $\{\widetilde{f_l}\,(t;\cdot):t\in\mathbb{R}\}$ предкомпактно в (полном) метрическом пространстве $L^1([-l,l],(U,\rho'))=(M([-l,l],U),D^{(\rho')}_{1,\,l})$. Поэтому, в частности, справедлива

Лемма 6. *Если* $f_1,\ f_2\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, *то* $f_1+f_2\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Из лемм 6 и 1 также вытекает

Лемма 7. *Если* $f_1,\ f_2\in M^{\,p,\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $p\geqslant 1$, *то* $f_1+f_2\in M^{\,p,\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Так как для любой (сильно) измеримой функции $\widetilde{f}:[-l,l]\to U$ и любого $\delta>0$ существует компакт $K_\delta\subseteq U$ такой, что $\mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l]:\widetilde{f}(\tau)\notin K_\delta\}<2l\delta$, то выполняется следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть* $f\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. *Тогда для любых* $l,\ \delta,\ \varepsilon>0$ *существует компакт* $K_{l,\,\delta,\,\varepsilon}\subseteq U$ *такой, что*

$$\varkappa_l\,(\{t\in\mathbb{R}:\rho(f(t),K_{l,\,\delta,\,\varepsilon})\geqslant\varepsilon\})<\delta.$$

Следствие 2. *Пусть* $f\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. *Тогда для любых* $l,\ \delta>0$ *существует компакт* $K_{l,\,\delta}\subseteq U$ *такой, что*

$$\varkappa_l\,(\{t\in\mathbb{R}:f(t)\notin K_{l,\,\delta}\})<\delta.$$

Следствие 3. *Пусть* $f\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. *Тогда найдутся точки* $x_j\in U$, $j\in\mathbb{N}$, *такие, что для всех* $l,\ \varepsilon>0$

$$\varkappa_l\,(\{t\in\mathbb{R}:f(t)\notin\bigcup_{j\,=\,1}^{J}B_U(x_j,\varepsilon)\})\to 0$$

при $J\to+\infty$.

Лемма 9. *Если* $f\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $g\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, *то также* $fg\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ (*где* $(fg)(t)\doteq f(t)g(t)$, $t\in\mathbb{R}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f\in M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $g\in M(\mathbb{R},\mathcal{B})$, то $fg\in M(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Фиксируем $l>0$. Пусть $\varepsilon,\ \delta>0$. Из следствия 2 вытекает, в частности, существование чисел $r>0$ и $R>0$, для которых при всех $t\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l]:|f(t+\tau)|>r\}<\frac{1}{2}\,l\delta\,,\quad \mathrm{mes}\,\{\tau\in[-l,l]:\|g(t+\tau)\|>R\}<\frac{1}{2}\,l\delta\,. \tag{2.1}$$

Так как $f\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $g\in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, то существуют конечные наборы чисел $t^{(0)}_{j_0}\in\mathbb{R}$, $j_0=1,\dots,N_0$, и $t^{(1)}_{j_1}\in\mathbb{R}$, $j_1=1,\dots,N_1$, такие, что для любого $t\in\mathbb{R}$ найдутся индексы $j_s=j_s(t)\in\{1,\dots,N_s\}$, $s=0,1$, для которых

$$\mathrm{mes}\,\bigl\{\tau\in[-l,l]:|f(t+\tau)-f(t^{(0)}_{j_0}+\tau)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2R}\bigr\}<\frac{1}{2}\,l\delta\,, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{mes}\,\bigl\{\tau\in[-l,l]:\|g(t+\tau)-g(t^{(1)}_{j_1}+\tau)\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2r}\bigr\}<\frac{1}{2}\,l\delta\,. \tag{2.3}$$

Для всех $t \in \mathbb{R}$ положим $T(t) = \{\tau \in [-l,l] : |f(t^{(0)}_{j_0(t)}+\tau)| \leqslant r,\ \|g(t+\tau)\| \leqslant R,\ |f(t+\tau) - f(t^{(0)}_{j_0(t)}+\tau)| < \frac{\varepsilon}{2R}$ и $\|g(t+\tau) - g(t^{(1)}_{j_1(t)}+\tau)\| < \frac{\varepsilon}{2r}\}$. Из (2.1)–(2.3) следует оценка

$$\operatorname{mes}\,[-l,l]\setminus T(t) < 2l\delta\,. \tag{2.4}$$

Если $\tau \in T(t)$, то

$$\|f(t+\tau)g(t+\tau) - f(t^{(0)}_{j_0(t)}+\tau)g(t^{(1)}_{j_1(t)}+\tau)\| \leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant |f(t+\tau) - f(t^{(0)}_{j_0(t)}+\tau)|\cdot\|g(t+\tau)\| + |f(t^{(0)}_{j_0(t)}+\tau)|\cdot\|g(t+\tau) - g(t^{(1)}_{j_1(t)}+\tau)\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Обозначим $g_{j_0,j_1}(\tau) = f(t^{(0)}_{j_0(t)}+\tau)g(t^{(1)}_{j_1(t)}+\tau)$, $j_s \in \{1,\dots,N_s\}$, $s=0,1$, $\tau\in[-l,l]$. Так как имеется конечное число таких функций и для любого $t\in\mathbb{R}$ найдется функция $g_{j_0,j_1}(\cdot) = g_{j_0(t),j_1(t)}(\cdot)$ (см. (2.4), (2.5)) такая, что

$$\operatorname{mes}\,\{\tau\in[-l,l] : \|f(t+\tau)g(t+\tau) - g_{j_0,j_1}(\tau)\| \geqslant \varepsilon\} < 2l\delta\,,$$

то (в силу произвольности выбора чисел ε, $\delta>0$) отсюда следует предкомпактность множества $\{f(t+\cdot)g(t+\cdot) : t\in\mathbb{R}\}$ в полном метрическом пространстве $(M([-l,l],\mathcal{B}), D^{(\rho')}_{1,l})$. Последнее означает, что $fg \in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. □

Обозначим через $M^{\,\rm comp}\{\mathbb{R}\}$ совокупность измеримых множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Лемма 10. *Если* $T\in M^{\,\rm comp}\{\mathbb{R}\}$, *то* $\mathbb{R}\backslash T \in M^{\,\rm comp}\{\mathbb{R}\}$. *Если* $T_1,T_2\in M^{\,\rm comp}\{\mathbb{R}\}$, *то множества* $T_1\cap T_2$, $T_1\cup T_2$ *и* $T_1\setminus T_2$ *также принадлежат* $M^{\,\rm comp}\{\mathbb{R}\}$.

Лемма 10 непосредственно следует из лемм 6, 9 и равенств

$$\chi_{\mathbb{R}\setminus T} = 1-\chi_T\,,\ \ \chi_{T_1\cap T_2} = \chi_{T_1}\cdot\chi_{T_2}\,,\ \ \chi_{T_1\cup T_2} = \chi_{T_1}+\chi_{T_2}-\chi_{T_1}\cdot\chi_{T_2}\,,\ \ \chi_{T_1\setminus T_2} = \chi_{T_1}(1-\chi_{T_2}).$$

Следующая лемма применяется для доказательства принадлежности измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ множеству $M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$.

Лемма 11. *Пусть* $f\in M(\mathbb{R},U)$, $f_j\in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$, *и для некоторого* (*следовательно, для любого*) $l>0$ *и всех* $\varepsilon>0$

$$\varkappa_l\,(\{t\in\mathbb{R} : \rho(f(t),f_j(t)) \geqslant \varepsilon\}) \to 0 \tag{2.6}$$

при $j\to+\infty$. *Тогда* $f\in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, так как $f_j\in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$, то $\{\widetilde{(f_j)}_l\,(t;\cdot) : t\in\mathbb{R}\}$ — предкомпактные множества в метрическом пространстве $(M([-l,l],U), D^{(\rho')}_{1,l})$ при всех $j\in\mathbb{N}$. С другой стороны, из (2.6) следует, что $D^{(\rho')}_{1,l}(\widetilde{f}_l\,(t;\cdot),\widetilde{(f_j)}_l\,(t;\cdot)) \to 0$ при $j\to+\infty$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$, поэтому $\{\widetilde{f}_l\,(t;\cdot) : t\in\mathbb{R}\}$ — также предкомпактное множество в $(M([-l,l],U), D^{(\rho')}_{1,l})$. □

Лемма 12. *Пусть* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{\rm comp}$ *и* $f_j\in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_j f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot) \in M^{\,\rm comp}(\mathbb{R},U).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя теорему Фреше, можно ограничиться только случаем, когда $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство. Функции

$$f(\cdot) = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot) \quad \text{и} \quad f_{(J)}(\cdot) = \sum_{j=1}^{J} f_j(\cdot)\chi_{T_j}(\cdot)\,,\ J \in \mathbb{N},$$

(сильно) измеримы. В силу лемм 6 и 9 $f_{(J)} \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ для всех $J \in \mathbb{N}$. С другой стороны (для всех $l > 0$),

$$\varkappa_l\,(\{t \in \mathbb{R} : f_{(J)}(t) \neq f(t)\}) \leqslant \varkappa_l\,\bigl(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} T_j\bigr) \to 0 \ \text{ при } \ J \to +\infty\,,$$

поэтому из леммы 11 следует, что $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. □

Следствие 4. $E^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U) \subseteq M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$.

Из следствия 4 и леммы 11 также вытекает

Следствие 5. *Если* $f \in M\,(\mathbb{R}, U)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon \in E^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, *для которой* $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$, *то* $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$.

Учитывая следствие 5, для доказательства теоремы 1 осталось показать, что для любой функции $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарная функция $f_\varepsilon \in E^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$ такая, что $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 13. *Пусть* (U, ρ) *и* (V, ρ_V) — *полные метрические пространства,* $\mathcal{F} \in C(U, V)$ *и* $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(\cdot)) \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in M\,(\mathbb{R}, U)$, то $\mathcal{F}(f(\cdot)) \in M\,(\mathbb{R}, V)$. Фиксируем $l > 0$ и выберем любые числа ε, $\delta > 0$. В силу следствия 2 существует компакт $K \subseteq U$ такой, что для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{mes}\,\{\tau \in [-l, l] : f(t+\tau) \notin K\} < \frac{1}{2}\, l\delta\,. \tag{2.7}$$

Число $\varepsilon_1 > 0$ выберем так, чтобы для любых точек x_1, $x_2 \in K$, для которых $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon_1$, выполнялась оценка $\rho_V(\mathcal{F}(x_1), \mathcal{F}(x_2)) < \varepsilon$. Так как $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, то существует конечный набор чисел $t'_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$, такой, что для любого $t \in \mathbb{R}$ найдется индекс $j = j(t) \in \{1, \ldots, N\}$, для которого

$$\mathrm{mes}\,\{\tau \in [-l, l] : \rho(f(t+\tau), f(t'_j+\tau)) \geqslant \varepsilon_1\} < l\delta\,. \tag{2.8}$$

Положим $T(t) = \{\tau \in [-l, l] : f(t+\tau) \in K,\ f(t'_{j(t)}+\tau) \in K \text{ и } \rho(f(t+\tau), f(t'_{j(t)}+\tau)) < \varepsilon_1\}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда из (2.7) и (2.8) получаем

$$\mathrm{mes}\,[-l, l] \setminus T(t) < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) l\delta = 2l\delta\,.$$

С другой стороны, если $\tau \in T(t)$, то $f(t+\tau) \in K$, $f(t'_{j(t)}+\tau) \in K$ и, следовательно, $\rho_V(\mathcal{F}(f(t+\tau)), \mathcal{F}(f(t'_{j(t)}+\tau))) < \varepsilon$. В силу произвольности выбора чисел ε, $\delta > 0$ (и конечности множества индексов j для заданных ε и δ) отсюда вытекает, что множество $\{\mathcal{F}(f(t+\cdot)) : t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в полном метрическом пространстве $(M([-l, l], V), D^{(\rho'_V)}_{1,l})$, поэтому $\mathcal{F}(f(\cdot)) \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, V)$. □

Следствие 6. *Если $f \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$, то для любой точки $x \in U$ справедливо включение $\rho(f(\cdot), x) \in M^{\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Пусть $\mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$ — совокупность подмножеств $\mathbb{F}$ пространства $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, для которых при некотором (и, следовательно, при любом) $l > 0$

$$\sup_{f \in \mathbb{F}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{0 \leqslant \eta \leqslant \widetilde{\eta}} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t+\tau+\eta) - f(t+\tau)|\, d\tau \to 0$$

при $\widetilde{\eta} \to +0$. Для функций $f \in L^{1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (в том числе для функций $f \in S^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) множества $\{\widetilde{f}_l\,(t; \cdot) : t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактны в $L^1([-l, l], \mathbb{R})$, поэтому одноэлементные множества $\{f\}$, $f \in L^{1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, содержатся в $\mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$. Если $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2 \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$, то также $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 \doteq \{f_1 + f_2 : f_j \in \mathbb{F}_j\,,\ j = 1, 2\} \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$. В частности, при $f \in L^{1,\,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$ выполняется включение $f + \mathbb{F} \doteq \{f + f_1 : f_1 \in \mathbb{F}\} \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$.

Теорема 7. *Для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1]$ найдутся числа $h = h(\varepsilon, \delta) > 0$ и $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\varepsilon, \delta) > 0$ такие, что для любого $l > 0$ и любого множества $\widetilde{\mathbb{F}} \subset L^1([-l, l], \mathbb{R})$, для которого*

$$\lim_{\widetilde{\eta} \to +0} \sup_{f \in \widetilde{\mathbb{F}}} \sup_{0 \leqslant \eta \leqslant \widetilde{\eta}} \int_{-l}^{l-\eta} |f(\tau+\eta) - f(\tau)|\, d\tau \leqslant 2l\widetilde{\varepsilon}, \tag{2.9}$$

существует число $\widetilde{\lambda} > 0$ такое, что при всех $\lambda \geqslant \widetilde{\lambda}$ и всех $f \in \widetilde{\mathbb{F}}$

$$\mathrm{mes}\, \{\tau \in [-l, l] : |f(\tau) + \varepsilon \sin \lambda\tau| < 2h\} < 2l\delta\,.$$

Доказательство теоремы 7 здесь не приводится. Оно во многом повторяет доказательство леммы 7 в [4], которая сформулирована для п. п. по Степанову функций. Варианты теоремы 7 для п. п. по Вейлю и п. п. по Безиковичу функций содержатся соответственно в [8, 23] и [9].

Теорему 7 удобно переформулировать в следующем виде.

Теорема 8. *Для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1]$ найдутся числа $h = h(\varepsilon, \delta) > 0$ и $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\varepsilon, \delta) > 0$ такие, что для любого $l > 0$ и любого множества $\widetilde{\mathbb{F}} \subset L^1([-l, l], \mathbb{R})$, для которого справедлива оценка (2.9), существует число $\widetilde{\lambda} > 0$ такое, что при всех $\lambda \geqslant \widetilde{\lambda}$, всех $f \in \widetilde{\mathbb{F}}$ и всех функций $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, для которых $\|g\|_\infty \leqslant h$, выполняется неравенство*

$$\mathrm{mes}\, \{\tau \in [-l, l] : |f(\tau) + g(\tau) + \varepsilon \sin \lambda\tau| < h\} < 2l\delta\,.$$

Теорема 9. *Для любого множества $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$ и любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ найдется такая непрерывная периодическая с периодом $\mathcal{T}$ функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$, что для любых $l, \delta > 0$ существует число $h > 0$ такое, что*

$$\sup_{f \in \mathbb{F}} \varkappa_l\, (\{t \in \mathbb{R} : |f(t) + g(t)| < h\}) < \delta\,.$$

Доказательство. Положим $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta_k = 2^{-2k-2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим $f_0 \doteq f \in \mathbb{F}$ и $\mathbb{F}_0 \doteq \mathbb{F}$. В силу теоремы 8 существуют числа $h_0 > 0$ и $\lambda_0 \in \frac{2\pi}{\mathcal{T}}\mathbb{N}$ такие, что для всех функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_1(t) \doteq f_0(t) + \varepsilon_0 \sin \lambda_0 t$ (при $f_0 = f \in \mathbb{F}$), всех функций $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, для которых $\|g_1\|_\infty \leqslant h_0$, и всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\mathrm{mes}\, \{\tau \in [-1, 1] : |f_1(t+\tau) + g_1(t+\tau)| < h_0\} < 2\delta_0\,.$$

При этом также $\mathbb{F}_1 \doteq \{f_1 : f_0 \in \mathbb{F}_0\} \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$. Будем далее последовательно определять числа ε_j, h_j, λ_j и функции f_j. Если числа ε_j, h_j, λ_j, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, и функции $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, уже найдены для некоторого $k \in \mathbb{N}$, при этом $\mathbb{F}_k \doteq \{f_k : f_{k-1} \in \mathbb{F}_{k-1}\} \in \mathfrak{F}_1^{\mathrm{comp}}$, то выберем число $\varepsilon_k > 0$, исходя из условий $\varepsilon_k < 2^{-k}\, h_0$, $\varepsilon_k \leqslant 2^{-k+1}\, h_1$, $\ldots$, $\varepsilon_k \leqslant 2^{-1}\, h_{k-1}$

и $\varepsilon_k < 2^{-k-1}\varepsilon$. Используя теорему 8, числа $h_k > 0$ и $\lambda_k \in \frac{2\pi}{\mathcal{T}}\mathbb{N}$ выберем так, чтобы для всех функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_{k+1}(t) \doteq f_k(t) + \varepsilon_k \sin\lambda_k t$ (при $f_k \in \mathbb{F}_k$), всех функций $g_{k+1} \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\|g_{k+1}\|_\infty \leqslant h_k$, и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнялась оценка

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-k-1,k+1] : |f_{k+1}(t+\tau) + g_{k+1}(t+\tau)| < h_k\} < 2(k+1)\,\delta_k\,.$$

Тогда также $\mathbb{F}_{k+1} \doteq \{f_{k+1} : f_k \in \mathbb{F}_k\} \in \mathfrak{F}_1^{\text{comp}}$. Продолжая неограниченно нахождение чисел ε_j, h_j, λ_j и функций f_j, положим

$$g(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j \sin\lambda_j t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Так как $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_j < 2^{-j-1}\varepsilon$ и $\lambda_{j-1} \in \frac{2\pi}{\mathcal{T}}\mathbb{N}$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая функция с периодом $\mathcal{T}$, для которой $\|g\|_\infty < \varepsilon$. Обозначим

$$g_k(t) = \sum_{j=k}^{+\infty} \varepsilon_j \sin\lambda_j t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Так как при всех $t \in \mathbb{R}$

$$|g_k(t)| \leqslant \sum_{j=k}^{+\infty} \varepsilon_j \leqslant \left(\sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j}\right) h_{k-1} = h_{k-1}\,,$$

то для всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $j \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-j,j] : |f(t+\tau) + g(t+\tau)| < h_{j-1}\} < 2j\,\delta_{j-1}\,.$$

Отсюда следует, что для всех $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant j$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-j,j] : |f(t+\tau) + g(t+\tau)| < h_{k-1}\} < 2k\,\delta_{k-1} < 2j \cdot 2^{-k}.$$

Выбрав для числа $l > 0$ число $j \in \mathbb{N}$ так, что $j-1 < l \leqslant j$, при всех $t \in \mathbb{R}$ (и всех $k \geqslant j$) получаем

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-l,l] : |f(t+\tau) + g(t+\tau)| < h_{k-1}\} < 2j \cdot 2^{-k} < 2l \cdot 2^{-k}\,\frac{l+1}{l}\,.$$

Теорема 9 доказана.

Определение 4. Функция $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{B})$ обладает *σ-свойством* [22], если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$

$$\varkappa_l\,(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \varepsilon\}) \to 0$$

при $\varepsilon \to +0$ (откуда, в частности, следует, что $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\} = 0$).

Из теоремы 9 непосредственно вытекает

Следствие 7. *Для любой функции $f \in L^{1,\,\text{comp}}_{\text{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ найдется такая непрерывная периодическая с периодом $\mathcal{T}$ функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$ и функция $f + g$ обладает σ-свойством.*

В банаховом пространстве $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ определим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}\,, & \text{если } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{если } x = 0\,. \end{cases}$$

Лемма 14. *Если функция* $f \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ *обладает* σ*-свойством, то также* $\operatorname{sign} f(\cdot) \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Доказательство. Функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto \operatorname{sign} f(t) \in \mathcal{B}$ измерима. Для всех $j \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\mathcal{B} \ni x \mapsto \mathcal{F}_j(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|}, & \text{если } \|x\| \geqslant \frac{1}{j}, \\ jx, & \text{если } \|x\| < \frac{1}{j}. \end{cases}$$

Функции $\mathcal{F}_j : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ непрерывны. В силу леммы 13 $\mathcal{F}_j(f(\cdot)) \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $j \in \mathbb{N}$. Так как функция f обладает σ-свойством, то (для любого $l > 0$)

$$\varkappa_l(\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{F}_j(f(t)) \neq \operatorname{sign} f(t)\}) \leqslant \varkappa_l(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \frac{1}{j}\}) \to 0$$

при $j \to +\infty$. Поэтому из леммы 11 следует включение $\operatorname{sign} f(\cdot) \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. $\square$

Теорема 10. *Пусть* $f \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда для любых* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $T \in M^{\text{comp}}\{\mathbb{R}\}$ *такое, что* $f(t) < a + \varepsilon$ *при всех* $t \in T$ *и* $f(t) > a - \varepsilon$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R} \setminus T$.

Доказательство. Определим функцию

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } f(t) \geqslant a + \varepsilon, \\ f(t) - a, & \text{если } |f(t) - a| < \varepsilon, \\ -\varepsilon, & \text{если } f(t) \leqslant a - \varepsilon. \end{cases}$$

Из леммы 13 следует, что $f_{a,\varepsilon} \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда в силу следствия 7 существует непрерывная периодическая функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\|g\|_\infty < \varepsilon$ и функция $f_{a,\varepsilon} + g \in M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обладает σ-свойством. Так как g — непрерывная периодическая функция, то $g \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и, следовательно, также $f_{a,\varepsilon} + g \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. лемму 6). Теперь, используя лемму 14, получаем, что $\operatorname{sign}(f_{a,\varepsilon}(\cdot) + g(\cdot)) \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (и, более того, $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : f_{a,\varepsilon}(t) + g(t) = 0\} = 0$). Обозначим $T = \{t \in \mathbb{R} : f_{a,\varepsilon}(t) + g(t) < 0\}$. Так как (при п. в. $t \in \mathbb{R}$) $\chi_T(t) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign}(f_{a,\varepsilon}(t) + g(t)))$, то $T \in M^{\text{comp}}\{\mathbb{R}\}$. Если $t \in T$, то $f_{a,\varepsilon}(t) < -g(t) < \varepsilon$, поэтому $f(t) < a + \varepsilon$. При п. в. $t \in \mathbb{R} \setminus T$ имеем $f_{a,\varepsilon}(t) \geqslant -g(t) > -\varepsilon$, поэтому $f(t) > a - \varepsilon$. $\square$

Использование теоремы 10 позволяет завершить доказательство теоремы 1.

Пусть $f \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},U)$. Выберем точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, определяемые для функции f в следствии 3. Так как (см. следствие 6) $\rho(f(\cdot),x_j) \in M^{\text{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, то в соответствии с теоремой 10 можно выбрать множества $T'_j \in M^{\text{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(f(t),x_j) < \varepsilon$ при всех $t \in T'_j$ и $\rho(f(t),x_j) > \frac{\varepsilon}{2}$ при п.в $t \in \mathbb{R} \setminus T'_j$. При п. в. $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} T'_j$ имеем $f \notin \bigcup_{j=1}^{J} B_U(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$, поэтому для всех $l > 0$

$$\varkappa_l(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} T'_j) \to 0 \tag{2.10}$$

при $J \to +\infty$ (см. следствие 3). Определим попарно непересекающиеся множества $T_1 \doteq T'_1$, $T_j \doteq T'_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} T'_k$ при $j \geqslant 2$. Тогда (в силу леммы 10) $T_j \in M^{\text{comp}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{j=1}^{J} T_j = \bigcup_{j=1}^{J} T'_j$, $J \in \mathbb{N}$. Из (2.10) получаем, что $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{\text{comp}}$. Если $t \in T_j$, то $t \in T'_j$, поэтому $\rho(f(t),x_j) < \varepsilon$. Следовательно,

$$f_\varepsilon(\cdot) \doteq \sum_j x_j\, \chi_{T_j}(\cdot) \in E^{\text{comp}}(\mathbb{R},U)$$

и $\rho(f(t),f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Фиксируем числа $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Пусть $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / 2\pi\mathbb{Z}^m$ — m-мерный тор, состоящий из точек $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_j \in \mathbb{R}$, при этом точки x и y отождествляются, если $x_j - y_j \in 2\pi\mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, m$. На тор $\mathbb{T}^m$ переносятся операции сложения и умножения на числа $L \in \mathbb{Z}$. В частности, для каждой точки x однозначно определена точка $-x = (-1)x$. На $\mathbb{T}^m$ введем метрику

$$\rho^{(m)}(x, y) = \min_{L_j \in \mathbb{Z},\ j=1,\ldots,m} \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j + 2\pi L_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Метрическое пространство $(\mathbb{T}^m, \rho^{(m)})$ компактно. Для всех $x, y \in \mathbb{T}^m$

$$\rho^{(m)}(x, 0) = \rho^{(m)}(-x, 0) \quad \text{и} \quad \rho^{(m)}(x, y) = \rho^{(m)}(x - y, 0)$$

(где $0 = (0, \ldots, 0)$).

Определим отображение

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) = (\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t) \in \mathbb{T}^m.$$

Имеем $x(t_1 + t_2) = x(t_1) + x(t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, и $x(-t) = -x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. При этом

$$\rho^{(m)}(x(t_1), x(t_2)) = \rho^{(m)}(x(t_1 - t_2), 0), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

и для любого $\delta > 0$

$$\{ t \in \mathbb{R} : \rho^{(m)}(x(t), 0) < \delta \} \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} \{ t \in \mathbb{R} : |1 - e^{\mathrm{i}\lambda_j t}| < \delta \}. \tag{3.1}$$

Обозначим через Ξ множество точек $x \in \mathbb{T}^m$, для которых для любых $\delta > 0$ и $\alpha \in \mathcal{A}$ найдется такое число $t \in \Gamma(\alpha)$, что $\rho^{(m)}(x, x(t)) < \delta$. Множество Ξ непусто (так как $0 \in \Xi$) и замкнуто.

Лемма 15. *Если $x, y \in \Xi$, то также $x + y \in \Xi$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \Xi$. Выберем любые число $\delta > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$. В силу свойства $(2_{\mathcal{A}})$ существует элемент $\beta \geqslant \alpha$ такой, что для любого $t \in \Gamma(\beta)$ найдется элемент $\gamma \in \mathcal{A}$, для которого $t + \Gamma(\gamma) \subseteq \Gamma(\alpha)$. Конкретизируем выбор числа $t \in \Gamma(\beta)$. Так как $x \in \Xi$, то число $t \in \Gamma(\beta)$ можно выбрать так, что $\rho^{(m)}(x, x(t)) < \frac{\delta}{2}$. С другой стороны (так как $y \in \Xi$), существует число $t' \in \Gamma(\gamma)$, для которого $\rho^{(m)}(y, x(t')) < \frac{\delta}{2}$ (где элемент $\gamma \in \mathcal{A}$ определяется числом t). Тогда $t + t' \in t + \Gamma(\gamma) \subseteq \Gamma(\alpha)$ и

$$\rho^{(m)}(x + y, x(t + t')) = \rho^{(m)}(x - x(t), -y + x(t')) \leqslant \rho^{(m)}(x, x(t)) + \rho^{(m)}(y, x(t')) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta\,.$$

Так как число $\delta > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ можно выбирать произвольно, то (в силу определения множества Ξ) $x + y \in \Xi$. □

Лемма 16. *Если $x \in \Xi$, то также $-x \in \Xi$.*

Доказательство. Для любых $x \in \mathbb{T}^m$ и $\delta > 0$ при достаточно большом $L \in \mathbb{N}$ среди точек $x, 2x, \ldots, Lx$ найдутся две точки $L_1 x$ и $L_2 x$, $L_1 < L_2$, для которых $\rho^{(m)}(L_1 x, L_2 x) < \delta$. Поэтому для числа $N = L_2 - L_1$ имеем $\rho^{(m)}(0, Nx) = \rho^{(m)}(L_1 x, L_2 x) < \delta$. Отсюда следует, что для любой точки $x \in \Xi$ существует последовательность $x_\nu \in \Xi$ (состоящая из точек множества $\{Nx : N \in \mathbb{Z}_+\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, такая, что $x + x_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$. Так как метрическое пространство $(\mathbb{T}^m, \rho^{(m)})$ компактно, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность x_ν сходится при $\nu \to +\infty$ к некоторой точке $y \in \mathbb{T}^m$. Но тогда $y \in \Xi$ и $x + y = 0$, то есть $-x = y \in \Xi$. □

Из лемм 15 и 16 следует, что для всех $x \in \Xi$ справедливо равенство $x + \Xi = \Xi$.

Лемма 17. *Для любого $\delta > 0$ существует элемент $\beta \in \mathcal{A}$ такой, что для любого числа $t \in \Gamma(\beta)$ найдется точка $x \in \Xi$, для которой $\rho^{(m)}(x, x(t)) < \delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $K(\delta) = \{y \in \mathbb{T}^m : \rho^{(m)}(y, \Xi) \geqslant \delta\}$, $\delta > 0$ (где $\rho^{(m)}(y, \Xi) = \min_{x \in \Xi} \rho^{(m)}(y, x)$). Множество $K(\delta)$ замкнуто (и, следовательно, компактно) в компактном метрическом пространстве $(\mathbb{T}^m, \rho^{(m)})$. Если $K(\delta) = \varnothing$, то для любой точки $y \in \mathbb{T}^m$ найдется точка $x \in \Xi$ такая, что $\rho^{(m)}(x, y) < \delta$. Поэтому для выбранного числа $\delta > 0$ доказываемое утверждение заведомо выполняется и можно далее считать, что $K(\delta) \neq \varnothing$. Для любой точки $y \in \mathbb{T}^m \setminus \Xi$ (в силу определения множества Ξ) найдутся число $\delta(y) > 0$ и элемент $\beta(y) \in \mathcal{A}$ такие, что для всех $t \in \Gamma(\beta(y))$ справедлива оценка $\rho^{(m)}(y, x(t)) \geqslant \delta(y)$. Так как множество $K(\delta)$ компактно и

$$K(\delta) \subseteq \bigcup_{y \in K(\delta)} \mathcal{U}_{\mathbb{T}^m}(y, \delta(y)),$$

где $\mathcal{U}_{\mathbb{T}^m}(y, \delta(y)) = \{y' \in \mathbb{T}^m : \rho^{(m)}(y, y') < \delta(y)\}$ — открытый шар в метрическом пространстве $(\mathbb{T}^m, \rho^{(m)})$ радиуса $\delta(y)$ с центром в точке y, то найдется конечное множество точек $y_\mu \in K(\delta)$, $\mu = 1, \ldots, M$, таких, что

$$K(\delta) \subseteq \bigcup_{\mu = 1}^{M} \mathcal{U}_{\mathbb{T}^m}(y_\mu, \delta(y_\mu)).$$

Выберем теперь элемент $\beta \in \mathcal{A}$, для которого $\beta \geqslant \beta(y_\mu)$ при всех $\mu = 1, \ldots, M$. Тогда (в силу условия $(1_{\mathcal{A}})$) для всех $t \in \Gamma(\beta)$ выполняются неравенства $\rho^{(m)}(y_\mu, x(t)) \geqslant \delta(y_\mu)$, $\mu = 1, \ldots, M$, и, следовательно, $x(t) \notin K(\delta)$. Последнее означает, что для точки $x(t)$ найдется такая точка $x \in \Xi$, что $\rho^{(m)}(x, x(t)) < \delta$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Фиксируем $\delta > 0$ и $\alpha \in \mathcal{A}$. В силу леммы 17 существует элемент $\beta' \in \mathcal{A}$ такой, что для любого числа $t \in \Gamma(\beta')$ найдется точка $x \in \Xi$, для которой $\rho^{(m)}(x, x(t)) < \frac{\delta}{2}$. Из условий $(1_{\mathcal{A}})$ и $(2_{\mathcal{A}})$ следует существование элемента $\beta \in \mathcal{A}$, для которого выполняются следующие два условия:

(1) $\beta \geqslant \alpha$, $\beta \geqslant \beta'$;

(2) для любого $t \in \Gamma(\beta)$ найдется элемент $\gamma \in \mathcal{A}$ такой, что $t + \Gamma(\gamma) \subseteq \Gamma(\alpha)$.

Пусть $t \in \Gamma(\beta)$. Точка $x \in \Xi$ и элемент $\gamma \in \mathcal{A}$ далее определяются по числу $t \in \Gamma(\beta) \subseteq \Gamma(\beta')$. Выберем какие-либо точки $x_\mu \in \Xi$, $\mu = 1, \ldots, M$, образующие $\frac{\delta}{4}$ -сеть для множества Ξ. Из определения множества Ξ следует, что для каждого индекса $\mu \in \{1, \ldots, M\}$ найдется такое число $t'_\mu \in \Gamma(\gamma)$, что $\rho^{(m)}(x_\mu, x(t'_\mu)) < \frac{\delta}{4}$. Точки $-x_\mu$, $\mu = 1, \ldots, M$, принадлежат множеству Ξ (см. лемму 16) и также образуют $\frac{\delta}{4}$ -сеть для множества Ξ. При этом $\rho^{(m)}(-x_\mu, x(-t'_\mu)) = \rho^{(m)}(x_\mu, x(t'_\mu)) < \frac{\delta}{4}$ для всех $\mu = 1, \ldots, M$. Теперь для выбранной точки $x \in \Xi$ (зависящей от числа $t \in \Gamma(\beta)$) определим индекс $\mu(t) \in \{1, \ldots, M\}$ так, что $\rho^{(m)}(x, -x_{\mu(t)}) < \frac{\delta}{4}$. Тогда

$$t + t'_{\mu(t)} \in t + \Gamma(\gamma) \subseteq \Gamma(\alpha), \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \rho^{(m)}(x(t + t'_{\mu(t)}), 0) = \rho^{(m)}(x(t), x(-t'_{\mu(t)})) \leqslant \\ \leqslant \rho^{(m)}(x, x(t)) + \rho^{(m)}(x, -x_{\mu(t)}) + \rho^{(m)}(-x_{\mu(t)}, x(-t'_{\mu(t)})) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \delta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначим $\mathcal{D}(\beta) = \{t + t'_{\mu(t)} : t \in \Gamma(\beta)\}$. Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\mathcal{D}(\beta) \subseteq \Gamma(\alpha) \bigcap \{\, t \in \mathbb{R} : \rho^{(m)}(x(t), 0) < \delta \,\}.$$

Так как $\Gamma(\beta) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ и для всех $t \in \Gamma(\beta)$ индекс $\mu(t)$ выбирается из конечного множества $\{1, \ldots, M\}$, то также $\mathcal{D}(\beta) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ и, следовательно,

$$\Gamma(\alpha) \bigcap \{\, t \in \mathbb{R} : \rho^{(m)}(x(t), 0) < \delta \,\} \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}.$$

Использование вложения (3.1) завершает доказательство теоремы 2.

§ 4. Доказательства теорем 3 и 4

В этом параграфе применяется схема доказательства, в более простом варианте использованная в § 2. Ряд утверждений из § 2 также будет существенно использован при доказательстве леммы 5 и теоремы 4. В дальнейшем, как и в § 2, в качестве метрического пространства U будет также выбираться вещественное банахово пространство $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$.

Пусть $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольное направленное множество.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, множество функций $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U)$, для которых для любых $l, \varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ такие, что для любого измеримого множества $T \subseteq [-l, l]$, для которого $\operatorname{mes} T \leqslant 2l\delta$, и для всех $t \in \Gamma(\alpha)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2l} \int_T \rho^p \left(f(t+\tau), x_0\right) d\tau < \varepsilon^p.$$

Множество $\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ не зависит от выбора точки $x_0 \in U$.

Если $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$, то $\widetilde{\mathcal{M}}^{p_1}_\Gamma(\mathbb{R}, U) \supseteq \widetilde{\mathcal{M}}^{p_2}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$.

Если $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, и $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$, то $\widetilde{\mathcal{M}}^p_{\Gamma_1}(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}^p_{\Gamma_2}(\mathbb{R}, U)$.

Для вещественного банахова пространства $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ множества $\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ являются линейными многообразиями (то есть вместе с каждыми двумя функциями содержат и все их линейные комбинации).

Из определения почти M-рекуррентных и почти L^p_{loc}-рекуррентных функций $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ непосредственно вытекает

Лемма 18. *Множества $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $p \geqslant 1$, — линейные многообразия.*

Из лемм 18 и 7 также следует

Лемма 19. *Множества $\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $p \geqslant 1$, являются линейными многообразиями.*

Лемма 20. $\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$, $\quad p \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$. Тогда (см. условие $(1_{\mathcal{A}})$) для любых $l, \varepsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ такие, что для всех измеримых множеств $T \subseteq [-l, l]$, для которых $\operatorname{mes} T \leqslant 2l\delta$, выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{2l} \int_T \rho^p \left(f(\tau), x_0\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

и для всех $t \in \Gamma(\alpha)$ — неравенство

$$\left(\frac{1}{2l} \int_T \rho^p \left(f(t+\tau), f(\tau)\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{2l} \int_T \rho^p \left(f(t+\tau), x_0\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2l} \int_T \rho^p \left(f(\tau), x_0\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2l} \int_T \rho^p \left(f(t+\tau), f(\tau)\right) d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Отсюда заключаем, что $f \in \widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$. □

Теорема 11. *Для всех $p \in [1, +\infty)$*

$$\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U) = \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U) \bigcap \widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)\subseteq\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, то в силу леммы 20 достаточно доказать, что $\mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)\supseteq\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)\cap\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$. Предположим, что $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)\cap\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$. Пусть $l,\varepsilon>0$. В силу определения множества $\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$ найдутся число $\delta>0$ и элемент $\widetilde\alpha\in\mathcal{A}$ такие, что для любого измеримого множества $T\subseteq[-l,l]$, для которого $\operatorname{mes}T\leqslant 2l\delta$, и любого $t\in\Gamma(\widetilde\alpha)$ (в том числе и для $t=0$) справедливо неравенство

$$\Bigl(\frac{1}{2l}\int_T\rho^p\left(f(t+\tau),x_0\right)d\tau\Bigr)^{\frac1p}<\frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{4.1}$$

С другой стороны, из определения пространства $\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ и условия $(1_{\mathcal{A}})$ следует, что найдется элемент $\alpha\geqslant\widetilde\alpha$ такой, что при всех $t\in\Gamma(\alpha)$ для множества

$$T(t)=\Bigl\{\,\tau\in[-l,l]:\rho(f(t+\tau),f(\tau))\geqslant(2l)^{\frac1p}\,\frac{\varepsilon}{3}\,\Bigr\}$$

выполняется неравенство $\operatorname{mes}T(t)<2l\delta$. Поэтому из (4.1) для всех $t\in\Gamma(\alpha)\subseteq\Gamma(\widetilde\alpha)$ получаем

$$\Bigl(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\rho^p\left(f(t+\tau),f(\tau)\right)d\tau\Bigr)^{\frac1p}\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl(\frac{1}{2l}\int_{T(t)}\rho^p\left(f(\tau),x_0\right)d\tau\Bigr)^{\frac1p}+\Bigl(\frac{1}{2l}\int_{T(t)}\rho^p\left(f(t+\tau),x_0\right)d\tau\Bigr)^{\frac1p}+$$

$$+\Bigl(\frac{1}{2l}\int_{[-l,l]\setminus T(t)}\rho^p\left(f(t+\tau),f(\tau)\right)d\tau\Bigr)^{\frac1p}<2\,\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\,.$$

Теорема 11 доказана. □

Так как $\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R},U)$ (для любой направленности $\Gamma\in\mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$), то из теоремы 11 и леммы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 12. *Для всех* $p\in[1,+\infty)$

$$\mathcal{R}^{p,\,\rm comp}_\Gamma(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}^{\rm comp}_\Gamma(\mathbb{R},U)\bigcap\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)=\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)\bigcap L^{p,\,\rm comp}_{\rm loc}(\mathbb{R},U).$$

Лемма 21. *Пусть* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$. *Тогда для любых* $l,\delta>0$ *найдется компакт* $K_{l,\delta}\subseteq U$ *такой, что для любого* $\varepsilon>0$ *существует элемент* $\alpha\in\mathcal{A}$ *такой, что для всех* $t\in\Gamma(\alpha)$

$$\operatorname{mes}\{\tau\in[-l,l]:\rho(f(t+\tau),K_{l,\delta})\geqslant\varepsilon\}<2l\delta\,. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ сильно измерима, то для любых $l>0$ и $\delta>0$ найдется компакт $K_{l,\delta}\subseteq U$ такой, что

$$\operatorname{mes}\{\tau\in[-l,l]:f(\tau)\notin K_{l,\delta}\}<l\delta\,. \tag{4.3}$$

С другой стороны, для любых $l,\varepsilon,\delta>0$ существует элемент $\alpha\in\mathcal{A}$ такой, что для всех $t\in\Gamma(\alpha)$

$$\operatorname{mes}\{\tau\in[-l,l]:\rho(f(t+\tau),f(\tau))\geqslant\varepsilon\}<l\delta\,. \tag{4.4}$$

Если $\tau\in[-l,l]$ и $\rho(f(t+\tau),K_{l,\delta})\geqslant\varepsilon$, то либо $f(\tau)\notin K_{l,\delta}$, либо $\rho(f(t+\tau),f(\tau))\geqslant\varepsilon$, поэтому (для всех $t\in\Gamma(\alpha)$) доказываемое неравенство (4.2) следует из (4.3) и (4.4). □

Следствие 8. *Пусть* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$. *Тогда для любых* $l,\delta>0$ *существуют число* $a>0$ *и элемент* $\alpha\in\mathcal{A}$ *такие, что для всех* $t\in\Gamma(\alpha)$

$$\operatorname{mes}\{\tau\in[-l,l]:\|f(t+\tau)\|\geqslant a\}<2l\delta\,.$$

Лемма 22. *Пусть* $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$. *Тогда найдутся точки* $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, *такие, что для любого* $\varepsilon > 0$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{J} B_U(x_j, \varepsilon)\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$$

при $J \to +\infty$.

Доказательство. Из леммы 21 следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют компакт $K_m \subseteq U$ и элемент $\alpha_m \in \mathcal{A}$ такие, что для всех $t \in \Gamma(\alpha_m)$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-m, m] : \rho(f(t+\tau), K_m) \geqslant \frac{1}{2m}\} < \frac{1}{m}.$$

В каждом компакте K_m выберем конечное множество точек $x_{m,n}$, $n = 1, \ldots, n_m$, образующих $\frac{1}{2m}$-сеть для K_m. Тогда (для всех $t \in \Gamma(\alpha_m)$)

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-m, m] : f(t+\tau) \notin \bigcup_{n=1}^{n_m} B_U(x_{m,n}, \frac{1}{m})\} < \frac{1}{m}. \tag{4.5}$$

Перенумеруем точки $x_{m,n}$ с помощью одного индекса. Положим $x_{m,n} = x_j$, где $j = n$ при $m = 1$ и $j = \sum_{k=1}^{m-1} n_k + n$ при $m \geqslant 2$. Для заданных чисел $l, \varepsilon, \delta > 0$ выберем число $m \in \mathbb{N}$ так, что $m \geqslant \max\{l, \varepsilon^{-1}, (2\delta l)^{-1}\}$, и пусть $J_0 = \sum_{k=1}^{m} n_k$. Тогда из (4.5) получаем, что для всех $t \in \Gamma(\alpha_m)$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-l, l] : f(t+\tau) \notin \bigcup_{j=1}^{J} B_U(x_j, \varepsilon)\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\{\tau \in [-m, m] : f(t+\tau) \notin \bigcup_{n=1}^{n_m} B_U(x_{m,n}, \frac{1}{m})\} < 2\delta l.$$

Из последней оценки следует утверждение леммы 22. □

Лемма 23. *Если* $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и* $g \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, *то* $fg \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Доказательство. Фиксируем числа $l, \varepsilon, \delta > 0$. Число $a_1 > 0$ выберем так, чтобы для множества

$$T_1 = \{\tau \in [-l, l] : |f(\tau)| \geqslant a_1\}$$

выполнялась оценка $\operatorname{mes} T_1 < \frac{1}{2} l\delta$. Из следствия 8 вытекает существование числа $a > 0$ и элемента $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}$ таких, что при всех $t \in \Gamma(\widetilde{\alpha})$ для множества

$$T_2(t) = \{\tau \in [-l, l] : \|g(t+\tau)\| \geqslant a\}$$

имеем $\operatorname{mes} T_2(t) < \frac{1}{2} l\delta$. С другой стороны, найдется элемент $\alpha \geqslant \widetilde{\alpha}$ (для него $\Gamma(\alpha) \subseteq \Gamma(\widetilde{\alpha})$) такой, что при всех $t \in \Gamma(\alpha)$ для множеств

$$T_3(t) = \{\tau \in [-l, l] : |f(t+\tau) - f(\tau)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2a}\}, \quad T_4(t) = \{\tau \in [-l, l] : \|g(t+\tau) - g(\tau)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2a_1}\}$$

также справедливы неравенства $\operatorname{mes} T_3(t) < \frac{1}{2} l\delta$ и $\operatorname{mes} T_4(t) < \frac{1}{2} l\delta$. Обозначим $T(t) = T_1 \cup T_2(t) \cup T_3(t) \cup T_4(t)$. Тогда $\operatorname{mes} T(t) < 2l\delta$ и (при всех $t \in \Gamma(\alpha)$) для п. в. $\tau \in [-l, l] \setminus T(t)$

$$\|f(t+\tau)g(t+\tau) - f(\tau)g(\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(f(t+\tau) - f(\tau))\, g(t+\tau)\| + \|f(\tau)\,(g(t+\tau) - g(\tau))\| < \frac{\varepsilon}{2a}\, a + a_1 \frac{\varepsilon}{2a_1} = \varepsilon.$$

Так как числа $l, \varepsilon, \delta > 0$ можно выбирать произвольно, то $fg \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. □

Следующая лемма является следствием лемм 23 и 9.

Лемма 24. *Если* $f \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $g \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, *то* $fg \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Лемма 25. *Если* $T \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, *то* $\mathbb{R}\setminus T \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. *Если* $T_1, T_2 \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, *то также* $T_1\cap T_2 \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$, $T_1\cup T_2 \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$ *и* $T_1\setminus T_2 \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$.

Лемма 25 непосредственно следует из лемм 18 и 23.

Пусть $\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (что эквивалентно условию $\chi_T \in \mathcal{R}_\Gamma^{1,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Имеем

$$\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\} = \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}\bigcap M^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}.$$

Из лемм 19 и 24 также следует

Лемма 26. *Если* $T \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, *то* $\mathbb{R}\setminus T \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$. *Если* $T_1, T_2 \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$, *то множества* $T_1\cap T_2$, $T_1\cup T_2$ *и* $T_1\setminus T_2$ *также принадлежат* $\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$.

Лемма 27. *Пусть* $f \in M(\mathbb{R},U)$, $f_j \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$, *и для любого* $\varepsilon>0$

$$\{t\in\mathbb{R} : \rho(f(t),f_j(t)) \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing \tag{4.6}$$

при $j\to+\infty$. *Тогда* $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$.

Доказательство. Фиксируем числа $l,\varepsilon,\delta>0$. В силу условия (4.6) найдутся элемент $\widetilde{\alpha}\in\mathcal{A}$ и индекс $j\in\mathbb{N}$ такие, что при всех $t\in\Gamma(\widetilde{\alpha})$ для множества

$$T_1(t) = \{\tau\in[-l,l] : \rho(f(t+\tau),f_j(t+\tau)) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\ \}$$

выполняется неравенство $\operatorname{mes} T_1(t) < \frac{1}{2}l\delta$. Так как $f_j \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, то существует элемент $\alpha\geqslant\widetilde{\alpha}$ (для него $\Gamma(\alpha)\subseteq\Gamma(\widetilde{\alpha})$) такой, что при всех $t\in\Gamma(\alpha)$ для множества

$$T_2(t) = \{\tau\in[-l,l] : \rho(f_j(t+\tau),f_j(\tau)) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\ \}$$

имеем $\operatorname{mes} T_2(t) < l\delta$. Обозначим $T(t) = T_1(0)\cup T_1(t)\cup T_2(t)$, $t\in\Gamma(\alpha)$. Тогда $\operatorname{mes} T(t) < 2l\delta$ и (для всех $t\in\Gamma(\alpha)$) при п. в. $\tau\in[-l,l]\setminus T(t)$

$$\rho(f(t+\tau),f(\tau)) \leqslant \rho(f(t+\tau),f_j(t+\tau)) + \rho(f_j(t+\tau),f_j(\tau)) + \rho(f_j(\tau),f(\tau)) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Так как числа $l,\varepsilon,\delta>0$ можно выбрать любыми, то $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$. □

Лемма 28. *Пусть* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$ *и* $f_j \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$f(\cdot) \doteq \sum_j f_j(\cdot)\,\chi_{T_j}(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U). \tag{4.7}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 12, можно считать, что $U = (\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathcal{B}$ (сильно) измерима. В силу лемм 18 и 25 для любого $J\in\mathbb{N}$ справедливо включение

$$f_{(J)}(\cdot) \doteq \sum_{j=1}^{J} f_j(\cdot)\,\chi_{T_j}(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B}).$$

При этом $\{t\in\mathbb{R} : f_{(J)}(t)\neq f(t)\} \subseteq \mathbb{R}\setminus\bigcup_{j=1}^{J} T_j \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $J\to+\infty$. Поэтому включение (4.7) следует из леммы 27. □

Из лемм 12 и 28 вытекает

Лемма 29. *Пусть* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma^{\mathrm{comp}}$ *и* $f_j \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_j f_j(\cdot)\,\chi_{T_j}(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U).$$

Частным случаем лемм 28 и 29 является лемма 5.

Следствие 9. *Если* $f\in M(\mathbb{R},U)$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$, *то* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$.

Следствие 10. *Если* $f\in M(\mathbb{R},U)$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *существует элементарная функция* $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$ *такая, что* $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$, *то* $f\in\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$.

Для доказательства следствия 9 достаточно воспользоваться леммами 5 и 27, а для доказательства следствия 10 — также следствием 5. Если в условиях следствия 9 для некоторых $p\geqslant 1$ и $\varepsilon>0$ выполняется включение $f_\varepsilon \in \mathcal{ER}_\Gamma(\mathbb{R},U)\bigcap \widetilde{\mathcal{M}}_\Gamma^p(\mathbb{R},U)$, то $f\in \widetilde{\mathcal{M}}_\Gamma^p(\mathbb{R},U)$. Поэтому из теоремы 11 получаем, что $f\in\mathcal{R}_\Gamma^p(\mathbb{R},U)$. Если в условиях следствия 10 $f_\varepsilon\in \mathcal{ER}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)\bigcap \widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)$ для некоторых $p\geqslant 1$ и $\varepsilon>0$, то $f\in\widetilde{M}^p(\mathbb{R},U)$. Поэтому из теоремы 12 следует, что $f\in\mathcal{R}_\Gamma^{p,\,\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$.

Лемма 30. *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) — *полные метрические пространства,* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ *и* $\mathcal{F}\in C(U,V)$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(\cdot))\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},V)$.

Доказательство. Пусть $l,\varepsilon,\delta>0$. Для функции $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$ выберем компакт $K_{l,\frac{\delta}{4}}\subseteq U$, определяемый в лемме 21. Найдется число $\varepsilon_1>0$ такое, что для всех точек $x,\,y\in U$, для которых $\rho(x,K_{l,\frac{\delta}{4}})<\varepsilon_1$, $\rho(y,K_{l,\frac{\delta}{4}})<\varepsilon_1$ и $\rho(x,y)<\varepsilon_1$, справедлива оценка $\rho_V(\mathcal{F}(x),\mathcal{F}(y))<\varepsilon$. Из леммы 21 следует существование элемента $\widetilde{\alpha}\in\mathcal{A}$ такого, что при любом $t\in\Gamma(\widetilde{\alpha})$ для множества

$$T_1(t)=\{\tau\in[-l,l]:\rho(f(t+\tau),K_{l,\frac{\delta}{4}})\geqslant\varepsilon_1\}$$

имеем $\operatorname{mes} T_1(t)<\frac{1}{2}l\delta$. С другой стороны, можно выбрать элемент $\alpha\geqslant\widetilde{\alpha}$ (для которого $\Gamma(\alpha)\subseteq\Gamma(\widetilde{\alpha})$) такой, что при всех $t\in\Gamma(\alpha)$ для множества

$$T_2(t)=\{\tau\in[-l,l]:\rho(f(t+\tau),f(\tau))\geqslant\varepsilon_1\}$$

выполняется неравенство $\operatorname{mes} T_2(t)<l\delta$. Обозначим $T(t)=T_1(0)\cup T_1(t)\cup T_2(t)$, $t\in\Gamma(\alpha)$. Тогда (для всех $t\in\Gamma(\alpha)$) $\operatorname{mes} T(t)<2l\delta$ и при п. в. $\tau\in[-l,l]\setminus T(t)$ имеем $\rho(f(t+\tau),K_{l,\frac{\delta}{4}})<\varepsilon_1$, $\rho(f(\tau),K_{l,\frac{\delta}{4}})<\varepsilon_1$ и $\rho(f(t+\tau),f(\tau))<\varepsilon_1$, поэтому $\rho_V(\mathcal{F}(f(t+\tau)),\mathcal{F}(f(\tau)))<\varepsilon$. Так как числа $l,\,\varepsilon,\,\delta>0$ выбираются произвольно, то $\mathcal{F}(f(\cdot))\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},V)$. $\Box$

Следствие 11. *Если* $f\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, *то для всех* $x\in U$ *справедливо включение* $\rho(f(\cdot),x)\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Из лемм 13 и 30 вытекает

Лемма 31. *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) — *полные метрические пространства,* $\mathcal{F}\in C(U,V)$ *и* $f\in\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(\cdot))\in\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},V)$.

Следствие 12. *Если* $f\in\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},U)$, *то для любой точки* $x\in U$ *справедливо включение* $\rho(f(\cdot),x)\in\mathcal{R}_\Gamma^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_1(\Gamma)$ (где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$) совокупность подмножеств $\mathbb{F}$ пространства $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ таких, что для любых $l, \widetilde{\varepsilon} > 0$ найдутся число $\widetilde{\eta} > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$, для которых

$$\sup_{f\in\mathbb{F}} \ \sup_{t\in\Gamma(\alpha)} \ \sup_{0\leqslant\eta\leqslant\widetilde{\eta}} \ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |\, f(t+\tau+\eta) - f(t+\tau)\,|\, d\tau < \widetilde{\varepsilon}\,.$$

Если $\mathbb{F}_1\,, \mathbb{F}_2 \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$, то $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$. При этом (для любой направленности $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$) справедливо вложение $\mathfrak{F}_1^{\rm comp} \subseteq \mathfrak{F}_1(\Gamma)$. Откуда следует, что для любого множества $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$ и любой функции $f \in L^{1,{\rm comp}}_{\rm loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (для нее $\{f\} \in \mathfrak{F}_1^{\rm comp}$) имеем $f + \mathbb{F} \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$. В частности, последнее включение выполняется, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая функция.

Лемма 32. *Пусть $f \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Тогда для любых $l, \widetilde{\varepsilon} > 0$ существуют число $\widetilde{\eta} > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ такие, что*

$$\sup_{t\in\Gamma(\alpha)} \ \sup_{0\leqslant\eta\leqslant\widetilde{\eta}} \ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\tau)\|\, d\tau < \widetilde{\varepsilon}\,. \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть $l, \widetilde{\varepsilon} > 0$. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ (сильно измерима и) принадлежит пространству $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R},\mathcal{B})$, поэтому найдется число $\widetilde{\eta} > 0$ такое, что

$$\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\widetilde{\eta}} \ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(\tau+\eta) - f(\tau)\|\, d\tau < \frac{\widetilde{\varepsilon}}{3}\,. \tag{4.9}$$

С другой стороны, так как $f \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$, то существует элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ такой, что для всех $t \in \Gamma(\alpha)$

$$\frac{1}{2(l+\widetilde{\eta})}\int_{-l-\widetilde{\eta}}^{l+\widetilde{\eta}} \|f(t+\tau) - f(\tau)\|\, d\tau < \frac{l}{l+\widetilde{\eta}} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}}{3}$$

и, следовательно, (для всех $t \in \Gamma(\alpha)$)

$$\sup_{0\leqslant\eta\leqslant\widetilde{\eta}} \ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(t+\tau+\eta) - f(t+\tau)\|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant\eta\leqslant\widetilde{\eta}} \ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(t+\tau+\eta) - f(\tau+\eta)\|\, d\tau + \sup_{0\leqslant\eta\leqslant\widetilde{\eta}} \ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(\tau+\eta) - f(\tau)\|\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \|f(t+\tau) - f(\tau)\|\, d\tau \leqslant \frac{1}{l}\int_{-l-\widetilde{\eta}}^{l+\widetilde{\eta}} \|f(t+\tau') - f(\tau')\|\, d\tau + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{3} < \frac{2\widetilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{3} = \widetilde{\varepsilon}\,.$$

Доказываемое неравенство (4.8) теперь вытекает из полученной оценки (учитывая также, что неравенство (4.9) строгое). □

Лемма 33. *Пусть $f \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},U)$. Тогда $\{\rho(f(\cdot),x) + \lambda : x \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$.*

Доказательство. В силу теоремы Фреше можно считать, что $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство. Но в этом случае, так как для любого $x \in \mathcal{B}$ и п. в. $t_1\,, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\big|\, \|f(t_1) - x\| - \|f(t_2) - x\| \,\big| \leqslant \|f(t_1) - f(t_2)\|\,,$$

лемма 33 непосредственно вытекает из леммы 32. □

Теорема 13. *Для любого множества $\mathbb{F} \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\rm rd}(\mathcal{A})$, и любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\mathcal{T} > 0$ найдется такая непрерывная периодическая с периодом $\mathcal{T}$ функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$, что для любых $l, \delta > 0$ существуют число $h > 0$ и элемент $\alpha \in \mathcal{A}$ такие, что для всех $t \in \Gamma(\alpha)$*

$$\sup_{f\in\mathbb{F}} \ {\rm mes}\,\{\tau \in [-l,l] : |f(t+\tau) + g(t+\tau)| < h\}) < 2l\delta\,.$$

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 9. Как и в теореме 9, положим $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta_k = 2^{-2k-2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для удобства обозначим $f_0 \doteq f \in \mathbb{F}$ и $\mathbb{F}_0 \doteq \mathbb{F}$. Из теоремы 8 вытекает существование чисел $h_0 > 0$, $\lambda_0 \in \frac{2\pi}{\mathcal{T}}\mathbb{N}$ и элемента $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ таких, что для всех функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_1(t) \doteq f_0(t) + \varepsilon_0 \sin\lambda_0 t$ (при $f_0 = f \in \mathbb{F}$), всех функций $g_1 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\|g_1\|_\infty \leqslant h_0$, и всех чисел $t \in \Gamma(\alpha_0)$ выполняется оценка

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-1,1] : |f_1(t+\tau) + g_1(t+\tau)| < h_0\} < 2\delta_0 .$$

При этом $\mathbb{F}_1 \doteq \{f_1 : f_0 \in \mathbb{F}_0\} \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$. Далее последовательно будем находить числа ε_j, h_j, λ_j, элементы $\alpha_j \in \mathcal{A}$ и функции f_j. Если числа ε_j, h_j, λ_j, элементы $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $j = 0,1,\ldots,k-1$, и функции $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,k$, уже найдены для какого-либо $k \in \mathbb{N}$, при этом $\mathbb{F}_k \doteq \{f_k : f_{k-1} \in \mathbb{F}_{k-1}\} \in \mathfrak{F}_1(\Gamma)$, то число $\varepsilon_k > 0$ выберем так (см. доказательство теоремы 9), что $\varepsilon_k < 2^{-k} h_0$, $\varepsilon_k \leqslant 2^{-k+1} h_1$, $\ldots$, $\varepsilon_k \leqslant 2^{-1} h_{k-1}$ и $\varepsilon_k < 2^{-k-1}\varepsilon$. После этого, используя теорему 8, выберем числа $h_k > 0$, $\lambda_k \in \frac{2\pi}{\mathcal{T}}\mathbb{N}$ и элемент $\alpha_k \geqslant \alpha_{k-1}$ так, чтобы для всех функций $\mathbb{R} \ni t \mapsto f_{k+1}(t) \doteq f_k(t) + \varepsilon_k \sin\lambda_k t$ (при $f_k \in \mathbb{F}_k$), всех функций $g_{k+1} \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\|g_{k+1}\|_\infty \leqslant h_k$, и всех чисел $t \in \Gamma(\alpha_k)$ выполнялась оценка

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-k-1,k+1] : |f_{k+1}(t+\tau) + g_{k+1}(t+\tau)| < h_k\} < 2(k+1)\,\delta_k .$$

При этом множество $\mathbb{F}_{k+1} \doteq \{f_{k+1} : f_k \in \mathbb{F}_k\}$ также принадлежит $\mathfrak{F}_1(\Gamma)$. В результате числа ε_j, h_j, λ_j, элементы $\alpha_j \in \mathcal{A}$ и функции f_j определяются при всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$g(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon_j \sin\lambda_j t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Как и при доказательстве теоремы 9, из выбора чисел δ_j, ε_j, h_j, λ_j и элементов $\alpha_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, следует, что $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая с периодом $\mathcal{T}$ функция, для которой $\|g\|_\infty < \varepsilon$, и для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $t \in \Gamma(\alpha_j)$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-j,j] : |f(t+\tau) + g(t+\tau)| < h_{j-1}\} < 2j \cdot \delta_{j-1}. \tag{4.10}$$

Оценка (4.10) означает (так как $\Gamma(\alpha_j) \subseteq \Gamma(\alpha_{j-1})$, $j \in \mathbb{N}$), что для всех чисел $k, j \in \mathbb{N}$, для которых $k \geqslant j$, и всех $t \in \Gamma(\alpha_k)$

$$\operatorname{mes}\{\tau \in [-j,j] : |f(t+\tau) + g(t+\tau)| < h_{k-1}\} < 2j \cdot 2^{-k}.$$

Доказываемое утверждение является следствием последней оценки (см. также конец доказательства теоремы 9). □

Лемма 34. *Если $f \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая с периодом $\mathcal{T}$ функция, то $f + g \in \mathcal{R}^1_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Если, кроме того, $f \in \mathcal{R}^{1,\,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то также $f + g \in \mathcal{R}^{1,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Так как (в условиях леммы 34) $g \in \mathcal{R}^{1,\,\mathrm{comp}}_{\widetilde{\Gamma}\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}^{1,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то лемма 34 вытекает из лемм 6, 18 (и 19), а также из следствия 1.

Определение 5. Функция $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{B})$ обладает σ_Γ-свойством (где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$), если $\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \frac{1}{j}\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $j \to +\infty$ (откуда, в частности следует, что $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\} = 0$).

Если функция $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{B})$ обладает σ-свойством, то она обладает σ_Γ-свойством для любой направленности $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A})$.

Если $\Gamma_j \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}(\mathcal{A}_j)$, $j = 1,2$, $\Gamma_1 \prec \Gamma_2$ и функция $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{B})$ обладает σ_{Γ_1}-свойством, то она также обладает σ_{Γ_2}-свойством.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 13.

Следствие 13. *Для любой функции* $f \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и любых чисел* $\varepsilon > 0$ *и* $\mathcal{T} > 0$ *существует такая непрерывная периодическая с периодом* $\mathcal{T}$ *функция* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *что* $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$ *и функция* $f+g$ *обладает* σ_Γ*-свойством* (*следовательно, функция* $f+g$ *обладает также* $\sigma_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}$*-свойством*).

Лемма 35. *Если функция* $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$ *обладает* σ_Γ*-свойством, то* $\operatorname{sign} f(\cdot) \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Доказательство. Так как $f(t) \neq 0$ п. в., то также $\operatorname{sign} f(t) \neq 0$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto \operatorname{sign} f(t) \in \mathcal{B}$ измерима. Пусть $\mathcal{F}_j \in C(\mathcal{B},\mathcal{B})$, $j \in \mathbb{N}$, — функции, определяемые в доказательстве леммы 14. В силу леммы 30 $\mathcal{F}_j(f(\cdot)) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $j \in \mathbb{N}$. Так как функция f обладает σ_Γ-свойством и для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{F}_j(f(t)) \neq \operatorname{sign} f(t)\} \subseteq \{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| < \frac{1}{j}\},$$

то $\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{F}_j(f(t)) \neq \operatorname{sign} f(t)\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$ при $j \to +\infty$. Следовательно, из леммы 27 и теоремы 11 получаем, что $\operatorname{sign} f(\cdot) \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{B})$. $\square$

Теорема 14. *Пусть* $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда для любых* $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\mathcal{T} > 0$ *существует множество* $T \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ *такое, что* $f(t) < a+\varepsilon$ *при всех* $t \in T$ *и* $f(t) > a-\varepsilon$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}\setminus T$. *Более того, если* $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *то множество* T *можно выбрать так, что* $T \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$.

Доказательство. Для функции f определим функцию $f_{a,\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так же, как и в доказательстве теоремы 10. Из леммы 30 и теоремы 11 следует, что $f_{a,\varepsilon} \in \mathcal{R}^1_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. В силу следствия 13 существует непрерывная периодическая с периодом $\mathcal{T}$ функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\|g\|_\infty < \varepsilon$ и функция $f_{a,\varepsilon}+g$ обладает $\sigma_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}$-свойством. С другой стороны, $f_{a,\varepsilon}+g \in \mathcal{R}^1_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. лемму 24), поэтому из леммы 35 получаем, что

$$\operatorname{sign}(f_{a,\varepsilon}(\cdot)+g(\cdot)) \in \mathcal{R}^1_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

(и $\operatorname{mes}\{t \in \mathbb{R} : f_{a,\varepsilon}(t)+g(t) = 0\} = 0$). Обозначим $T = \{t \in \mathbb{R} : f_{a,\varepsilon}(t)+g(t) < 0\}$. Так как при п. в. $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\chi_T(t) = \frac{1}{2}\bigl(1-\operatorname{sign}(f_{a,\varepsilon}(t)+g(t))\bigr)$, то $T \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$. Если, более того, $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то из леммы 31 и теоремы 12 получаем, что $f_{a,\varepsilon} \in \mathcal{R}^{1,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$. В силу следствия 7 функцию g можно выбрать так, чтобы функция $f_{a,\varepsilon}+g$ обладала σ-свойством (тогда она также будет обладать $\sigma_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}$-свойством). При этом $f_{a,\varepsilon}+g \in \mathcal{R}^{1,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. лемму 6) и из лемм 35 и 14 следует, что

$$\operatorname{sign}(f_{a,\varepsilon}(\cdot)+g(\cdot)) \in \mathcal{R}^{1,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Поэтому $T \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$. Если $t \in T$, то $f_{a,\varepsilon}(t) < -g(t) < \varepsilon$ и, следовательно, $f(t) < a+\varepsilon$. При п. в. $t \in \mathbb{R}\setminus T$ справедлива оценка $f_{a,\varepsilon}(t) \geqslant -g(t) > -\varepsilon$. Откуда $f(t) > a-\varepsilon$. $\square$

Доказательства теорем 3 и 4. Пусть $f \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$. В соответствии с леммой 22 выберем точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $\varepsilon' > 0$

$$\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{J} B_U(x_j,\varepsilon')\} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing \tag{4.11}$$

при $J \to +\infty$. В силу следствия 11 $\rho(f(\cdot),x_j) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Теперь в соответствии с теоремой 14 выберем множества $T'_j \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(f(t),x_j) < \varepsilon$ при всех $t \in T'_j$ и $\rho(f(t),x_j) > \frac{\varepsilon}{2}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}\setminus T'_j$. Так как $f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{J} B_U(x_j,\frac{\varepsilon}{2})$ при п. в. $t \in \mathbb{R}\setminus\bigcup_{j=1}^{J} T'_j$, то из (4.11) получаем, что

$$\mathbb{R}\setminus\bigcup_{j=1}^{J} T'_j \xrightarrow{\Gamma} \varnothing \tag{4.12}$$

при $J \to +\infty$. Как и при доказательстве теоремы 1, определим попарно непересекающиеся множества $T_1 \doteq T_1'$, $T_j \doteq T_j' \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} T_k'$ при $j \geqslant 2$. Так как (см. лемму 25) $T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{j=1}^{J} T_j = \bigcup_{j=1}^{J} T_j'$, $J \in \mathbb{N}$, то из (4.12) вытекает, что $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$. Если $t \in T_j$, то $t \in T_j'$ и, следовательно, $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$. Поэтому $f_\varepsilon(\cdot) \doteq \sum_j x_j\,\chi_{T_j}(\cdot) \in \mathcal{E}\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ и $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если $f \in \mathcal{R}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U) \subseteq \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то в силу теоремы 11 $f \in \widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ и, следовательно, $f_\varepsilon \in \widetilde{\mathcal{M}}^p_\Gamma(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$. Но тогда (см. теорему 11 и лемму 5) также $f_\varepsilon \in \mathcal{R}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$. Пусть теперь $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$. Тогда в соответствии со следствием 3 точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, можно выбрать так, что для всех $l, \varepsilon' > 0$

$$\varkappa_l\,(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \bigcup_{j=1}^{J} B_U(x_j, \varepsilon')\}) \to 0 \tag{4.13}$$

при $J \to +\infty$. При этом из (4.13) следует (4.11), и $\rho(f(\cdot), x_j) \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$ (см. следствие 12). В этом случае теорема 14 позволяет выбрать множества $T_j' \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Из (4.13) следует, что для всех $l > 0$

$$\varkappa_l\,(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{J} T_j') \to 0 \tag{4.14}$$

при $J \to +\infty$. Определяя множества T_j, $j \in \mathbb{N}$, как и выше, в силу леммы 26 имеем $T_j \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, поэтому из (4.14) вытекает включение $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}_\Gamma$ и, следовательно, $f_\varepsilon(\cdot) \doteq \sum_j x_j\,\chi_{T_j}(\cdot) \in \mathcal{E}\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ (и $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$). Если $f \in \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, U) \subseteq \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_\Gamma(\mathbb{R}, U)$ для некоторого $p \geqslant 1$, то из теоремы 12 получаем, что $f \in \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, U)$, поэтому также $f_\varepsilon \in \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, U)$ и (опять же в силу теоремы 12 и леммы 5) $f_\varepsilon \in \mathcal{R}^{p,\,\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$.

§ 5. Доказательства теорем 5 и 6

Следующие три леммы будут существенно использоваться в этом параграфе.

Лемма 36. *Пусть* $\{T_j^{(m)}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}$, $m = 1, \ldots, M$. *Тогда*

$$\{\, T_{j_1}^{(1)} \bigcap \ldots \bigcap T_{j_M}^{(M)} \,\}_{j_m \in \mathbb{N},\ m=1,\ldots,M} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{comp}}. \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 10 для всех $j_m \in \mathbb{N}$, $m = 1, \ldots, M$, имеем $T_{j_1}^{(1)} \cap \ldots \cap T_{j_M}^{(M)} \in M^{\mathrm{comp}}\{\mathbb{R}\}$. Более того, для всех $l > 0$

$$\varkappa_l\,(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j_m=1,\ldots,J,\ m=1,\ldots,M} T_{j_1}^{(1)} \bigcap \ldots \bigcap T_{j_M}^{(M)}) \leqslant \sum_{m=1}^{M} \varkappa_l\,(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j_m=1}^{J} T_{j_m}^{(m)}) \to 0$$

при $J \to +\infty$. Поэтому справедливо включение (5.1). □

Лемма 37. *Пусть* $\{T_j^{(m)}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_\Gamma$, $m = 1, \ldots, M$. *Тогда*

$$\{\, T_{j_1}^{(1)} \bigcap \ldots \bigcap T_{j_M}^{(M)} \,\}_{j_m \in \mathbb{N},\ m=1,\ldots,M} \in \mathfrak{M}_\Gamma. \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству леммы 36 для всех $j_m \in \mathbb{N}$, $m = 1, \ldots, M$, в силу леммы 25 имеем $T_{j_1}^{(1)} \cap \ldots \cap T_{j_M}^{(M)} \in \mathcal{R}_\Gamma\{\mathbb{R}\}$. При этом для всех $l, \delta > 0$ существует число $J \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого индекса $m \in \{1, \ldots, M\}$ найдется элемент $\alpha_m \in \mathcal{A}$ такой, что для всех $t \in \Gamma(\alpha_m)$

$$\mathrm{mes}\,[-l+t, l+t] \setminus \bigcup_{j_m=1}^{J} T_{j_m}^{(m)} < \frac{\delta}{m}.$$

Выберем элемент $\alpha \in \mathcal{A}$, для которого $\alpha \geqslant \alpha_m$ при всех $m = 1, \ldots, M$. Тогда для всех $t \in \Gamma(\alpha)$

$$\text{mes}\,[-l+t, l+t] \setminus \bigcup_{j_m = 1,\ldots,J,\ m=1,\ldots,M} T^{(1)}_{j_1} \bigcap \cdots \bigcap T^{(M)}_{j_M} < \delta\,.$$

Следовательно,

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j_m = 1,\ldots,J,\ m=1,\ldots,M} T^{(1)}_{j_1} \bigcap \cdots \bigcap T^{(M)}_{j_M} \xrightarrow{\Gamma} \varnothing$$

при $J \to +\infty$. Последнее означает, что справедливо включение (5.2). □

Из лемм 36 и 37 непосредственно вытекает

Лемма 38. *Пусть* $\{T^{(m)}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{\text{comp}}_\Gamma$, $m = 1, \ldots, M$. *Тогда*

$$\{\, T^{(1)}_{j_1} \bigcap \cdots \bigcap T^{(M)}_{j_M} \}_{j_m \in \mathbb{N},\ m=1,\ldots,M} \in \mathfrak{M}^{\text{comp}}_\Gamma .$$

На прямом произведении $U_1 \times U_2$ полных метрических пространств $U_m = (U_m, \rho_m)$, $m = 1, 2$, определим метрику $R_{U_1\times U_2}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$, где $(x_1,x_2), (y_1,y_2) \in U_1 \times U_2$. Метрическое пространство $(U_1 \times U_2\,,\, R_{U_1\times U_2})$ также полное.

Лемма 39. *Если* $f_m \in M^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, U_m)$, $m = 1, 2$, *то*

$$f(\cdot) \doteq (f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in M^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, U_1 \times U_2)\,. \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементарные функции

$$f^{(m)}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\cdot) = \sum_j x^{(m)}_j \,\chi_{T^{(m)}_j}(\cdot) \in E^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, U_m), \quad m = 1, 2,$$

для которых $\rho_m(f_m(t), f^{(m)}_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Но тогда из леммы 36 получаем

$$f_{(\varepsilon)}(\cdot) \doteq \sum_{j_1, j_2} (x^{(1)}_{j_1}, x^{(2)}_{j_2})\ \chi_{T^{(1)}_{j_1} \cap T^{(2)}_{j_2}}(\cdot) \in E^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, U_1 \times U_2),$$

где $(x^{(1)}_{j_1}, x^{(2)}_{j_2}) \in U_1 \times U_2$. Кроме того, $R_{U_1\times U_2}(f(t), f_{(\varepsilon)}(t)) < \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Так как число $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым, то из теоремы 1 следует включение (5.3). □

Лемма 40. *Если* $F \in M^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, \text{Cl}_b\, U)$ *и* $g \in M^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, U)$, *то* $\rho(g(\cdot), F(\cdot)) \in M^{\,\text{comp}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Так как для всех $x_1,\, x_2 \in U$ и $Y_1,\, Y_2 \in \text{Cl}_b\, U$

$$|\,\rho(x_1, Y_1) - \rho(x_2, Y_2)\,| \leqslant \rho(x_1, x_2) + \text{dist}\,(Y_1, Y_2) \tag{5.4}$$

(функция $U \times \text{Cl}_b\, U \ni (x, Y) \mapsto \rho(x, Y) \in \mathbb{R}$ непрерывна), то лемма 40 непосредственно следует из лемм 39 и 13.

Лемма 41. *Пусть* $f_m \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U_m)$, $m = 1, 2$. *Тогда* $f(\cdot) \doteq (f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U_1 \times U_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $l, \varepsilon, \delta > 0$ найдутся элементы $\alpha_m \in \mathcal{A}$, $m = 1, 2$, такие, что для всех $t \in \Gamma(\alpha_m)$

$$\text{mes}\,\{\,\tau \in [-l, l] : \rho_m(f_m(t+\tau), f_m(\tau)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\} < \frac{\delta}{2}\,.$$

Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\alpha \geqslant \alpha_m$, $m = 1, 2$. Тогда для всех $t \in \Gamma(\alpha)$

$$\text{mes}\,\{\tau \in [-l, l] : R_{U_1\times U_2}(f(t+\tau), f(\tau)) \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{2} \text{mes}\,\{\,\tau \in [-l, l] : \rho_m(f_m(t+\tau), f_m(\tau)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,\} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta\,.$$

Так как числа $l, \varepsilon, \delta > 0$ выбираются произвольно, то $f(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R}, U_1 \times U_2)$. □

Из лемм 39 и 41 вытекает

Следствие 14. *Если* $f_m \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U_m)$, $m = 1, 2$, *то* $(f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U_1 \times U_2)$.

Лемма 42. *Пусть* $F \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, U)$ *и* $g \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U)$. *Тогда* $\rho(g(\cdot), F(\cdot)) \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Лемма 43. *Если* $F \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, U)$ *и* $g \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U)$, *то* $\rho(g(\cdot), F(\cdot)) \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Для доказательства леммы 42 достаточно воспользоваться оценкой (5.4) (обеспечивающей непрерывность функции $U \times \mathrm{Cl}_b\, U \ni (x, Y) \mapsto \rho(x, Y) \in \mathbb{R}$) и леммами 41 и 30. Лемма 43 следует из лемм 40 и 42.

Пусть $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство. Для непустых множеств $Y, Y_1, Y_2 \subseteq \mathcal{B}$ и точки $x \in \mathcal{B}$ далее используются обозначения $Y_1 + Y_2 = \{y_1 + y_2 : y_j \in Y_j\,,\ j = 1, 2\}$, $Y \pm x = \{y \pm x : y \in Y\}$. Если $F, F_1, F_2 \in M(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$ и $g \in M(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, то (при п. в. $t \in \mathbb{R}$) определены измеримые многозначные отображения

$$(F - g)(t) \doteq F(t) - g(t), \quad (\,\overline{F_1 + F_2}\,)(t) \doteq \overline{F_1(t) + F_2(t)}$$

(где $\overline{Y}$ — замыкание множества $Y \subseteq \mathcal{B}$).

Лемма 44. *Пусть* $F_1, F_2 \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$. *Тогда также* $\overline{F_1 + F_2} \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 39 (при замене пространств U_m на пространство $(\mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B}, \mathrm{dist})$) имеем $(F_1(\cdot), F_2(\cdot)) \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B} \times \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$. С другой стороны, если $X_j, Y_j \in \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B}$, $j = 1, 2$, то

$$\mathrm{dist}\,(\,\overline{X_1 + X_2}\,, \overline{Y_1 + Y_2}\,) \leqslant \mathrm{dist}\,(X_1, Y_1) + \mathrm{dist}\,(X_2, Y_2),$$

поэтому, в частности, функция

$$(\,\mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B} \times \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B}, R_{\mathrm{Cl}_b \mathcal{B} \times \mathrm{Cl}_b \mathcal{B}}\,) \ni (X_1, X_2) \mapsto \overline{X_1 + X_2} \in (\mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B}, \mathrm{dist})$$

непрерывна и доказываемое утверждение теперь следует из леммы 13. □

Аналогичным образом, из леммы 41, непрерывности функции $\mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B} \times \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B} \ni (X_1, X_2) \mapsto \overline{X_1 + X_2} \in \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B}$ и леммы 30 вытекает лемма 45.

Лемма 45. *Пусть* $F_1, F_2 \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$. *Тогда также* $\overline{F_1 + F_2} \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$.

Следствие 15. *Пусть* $F_1, F_2 \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$. *Тогда также* $\overline{F_1 + F_2} \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$.

Теорема 15. *Пусть* $F \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, U)$ *и* $g \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U)$. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\mathcal{T} > 0$ *найдется функция* $f \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$ *такая, что* $f(t) \in F(t)$ *и* $\rho(f(t), g(t)) < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Фреше полное метрическое пространство U можно изометрично вложить в некоторое банахово пространство $\mathcal{B}$, что позволяет, не ограничивая общности, считать, что (само) пространство $U = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ является вещественным банаховым пространством. Тогда из леммы 45 следует, что $F - g \in \mathcal{R}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B})$. При этом, если существует функция $f' \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ такая, что $f'(t) \in (F - g)(t)$ и $\|f'(t)\| < \rho(0, (F - g)(t)) + \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ (где ρ — метрика, определяемая нормой $\|\cdot\|$: $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathcal{B}$), то $f \doteq f' + g \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (см. лемму 18), $f(t) \in F(t)$ и $\|f(t)\| < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Поэтому, опять же не ограничивая общности, будем предполагать, что $g(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Воспользуемся далее общей схемой доказательства теоремы 2 из [10] (см. также [9]). В соответствии с теоремой 3 для всех $n \in \mathbb{N}$ выберем множества $T^{(n)}_j \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$ и $X^{(n)}_j \in \mathrm{Cl}_b\, \mathcal{B}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\{T^{(n)}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}$ и $\mathrm{dist}\,(F(t), X^{(n)}_j) < 2^{-n-3}\varepsilon$ при всех $t \in T^{(n)}_j$,

$j \in \mathbb{N}$. Для всех индексов $j_1 \in \mathbb{N}$, если $T^{(1)}_{j_1} \neq \varnothing$, выберем какие-либо точки $x_{j_1} \in X^{(1)}_{j_1}$, для которых

$$\|x_{j_1}\| \,<\, \rho(0, X^{(1)}_{j_1}) + \frac{9\varepsilon}{16}\,. \tag{5.5}$$

Далее последовательно при $n = 2, 3, \ldots$ для упорядоченных наборов $(j_1, \ldots, j_n)$ индексов $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, для которых $T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n} \neq \varnothing$, будем находить точки $x_{j_1, \ldots, j_n} \in X^{(n)}_{j_n}$. Предположим, что они уже найдены для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и пусть для упорядоченного набора $(j_1, \ldots, j_n, j_{n+1})$ индексов $j_1, \ldots, j_n, j_{n+1} \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n} \cap T^{(n+1)}_{j_{n+1}} \neq \varnothing$. Так как в этом случае также $T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n} \neq \varnothing$, то определена точка $x_{j_1, \ldots, j_n} \in X^{(n)}_{j_n}$. Тогда точку $x_{j_1, \ldots, j_n, j_{n+1}} \in X^{(n+1)}_{j_{n+1}}$ выберем так, что

$$\|x_{j_1, \ldots, j_n, j_{n+1}} - x_{j_1, \ldots, j_n}\| \,\leqslant\, 2\,\mathrm{dist}\,(X^{(n+1)}_{j_{n+1}}, X^{(n)}_{j_n})\,. \tag{5.6}$$

При этом, если $t \in T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n} \cap T^{(n+1)}_{j_{n+1}} \neq \varnothing$, то

$$\mathrm{dist}\,(X^{(n+1)}_{j_{n+1}}, X^{(n)}_{j_n}) \,\leqslant \tag{5.7}$$

$$\leqslant\, \mathrm{dist}\,(F(t), X^{(n+1)}_{j_{n+1}}) + \mathrm{dist}\,(F(t), X^{(n)}_{j_n}) \,<\, 2^{-n-4}\,\varepsilon + 2^{-n-3}\,\varepsilon = 3\cdot 2^{-n-4}\,\varepsilon\,.$$

Продолжая неограниченно нахождение точек $x_{j_1, \ldots, j_n} \in X^{(n)}_{j_n}$, определим для всех $n \in \mathbb{N}$ элементарные функции

$$f_n(\cdot) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} x_{j_1, \ldots, j_n}\ \chi_{T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n}}(\cdot).$$

Из леммы 37 (и леммы 5) следует, что $f_n \in \mathcal{E}\mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}\ \bigcup_{j_n = 1}^{+\infty} T^{(n)}_{j_n}\,.$$

Имеем $\mathrm{mes}\,\mathbb{R} \setminus T = 0$. Для всех $t \in T$ существуют индексы $j_n = j_n(t) \in \mathbb{N}$ такие, что $t \in T^{(n)}_{j_n(t)}$. Если $t \in T$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $f_n(t) = x_{j_1(t), \ldots, j_n(t)}$, поэтому из (5.6) и (5.7) получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}}\ \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \,\leqslant\, \sup_{t \in T}\ \|x_{j_1(t), \ldots, j_n(t), j_{n+1}(t)} - x_{j_1(t), \ldots, j_n(t)}\| < 3\cdot 2^{-n-3}\,\varepsilon\,. \tag{5.8}$$

Откуда следует, что последовательность функций f_n при $n \to +\infty$ равномерно сходится (на множестве T) к некоторой функции $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. В силу леммы 27 $f \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Так как для всех $t \in T$ справедливы включения $f_n(t) \in X^{(n)}_{j_n(t)}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathrm{dist}\,(F(t), X^{(n)}_{j_n(t)}) \to 0$ при $n \to +\infty$, то для всех $t \in T$ имеем $f(t) \in F(t)$. Кроме того, для всех $t \in T$ (см. (5.5), (5.8))

$$\|f(t)\| \leqslant \|x_{j_1(t)}\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_{j_1(t), \ldots, j_n(t), j_{n+1}(t)} - x_{j_1(t), \ldots, j_n(t)}\| \,<$$

$$<\, \rho(0, X^{(1)}_{j_1(t)}) + \frac{\varepsilon}{2} + 3\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-3}\right)\varepsilon \,\leqslant\, \rho(0, F(t)) + \mathrm{dist}\,(F(t), X^{(1)}_{j_1(t)}) + \frac{7}{8}\,\varepsilon \,<\, \rho(0, F(t)) + \varepsilon\,.$$

Теорема 15 доказана.

Теорема 16. *Пусть* $F \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b\, U)$ *и* $g \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U)$. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\mathcal{T} > 0$ *найдется функция* $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$ *такая, что* $f(t) \in F(t)$ *и* $\rho(f(t), g(t)) < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 16 с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 15. Как и при доказательстве теоремы 15, можно считать, что $U=(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство и (см. следствие 15) $g(t)\equiv 0$, $t\in\mathbb{R}$. При этом в силу теоремы 4 можно выбрать множества $T_j^{(n)}\in\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, для которых $\{T_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}$. Тогда функции f_n, определяемые в доказательстве теоремы 15, принадлежат $\mathcal{E}\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ (см. леммы 38 и 5) и (в силу лемм 11 и 27) искомая (предельная) функция f также принадлежит пространству $\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Аналогичным образом (с использованием лемм 44, 36, 8, 11 и теоремы 1) доказывается следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть $F\in M^{\rm comp}(\mathbb{R},{\rm Cl}_b\,U)$ и $g\in M^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется функция $f\in M^{\rm comp}(\mathbb{R},U)$ такая, что $f(t)\in F(t)$ и $\rho(f(t),g(t))<\rho(g(t),F(t))+\varepsilon$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$.*

Замечание 1. Теоремы 15, 16 и 17 могут быть доказаны с использованием результатов Фришковского [3] (без обращения к теоремам 3, 4 и 1) аналогично тому, как это сделано в [2] при доказательстве существования п. п. по Степанову сечений п. п. по Степанову многозначных отображений. Приведем набросок такого доказательства теоремы 16. Как и раньше, можно считать, что $U=(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ — вещественное банахово пространство и $g(t)\equiv 0$, $t\in\mathbb{R}$. При этом теорема Фреше (при переходе к метрике ρ') и теорема 12 позволяют ограничиться рассмотрением только многозначных отображений $F(\cdot)\in\mathcal{R}^{1,\,{\rm comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R},{\rm Cl}_b\,\mathcal{B})\cap L^\infty(\mathbb{R},{\rm Cl}_b\,\mathcal{B})$. Определим многозначные отображения $[0,1]\ni\tau\mapsto F_n(\tau)\doteq F(\mathcal{T}(n+\tau))\in{\rm Cl}_b\,\mathcal{B}$, $n\in\mathbb{Z}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — замыкание в $L^1([0,1],{\rm Cl}_b\,\mathcal{B})$ множества $\{F_n(\cdot):n\in\mathbb{Z}\}$. Множество $\mathfrak{X}$ компактно. Для любого $\varepsilon>0$ каждому многозначному отображению $F'\in\mathfrak{X}$ поставим в соответствие множество сечений $\mathcal{G}_\varepsilon(F')=\{f'\in L^1([0,1],\mathcal{B}):f'(\tau)\in F'(\tau)$ и $\|f'(\tau)\|<\rho(0,F'(\tau))+\varepsilon$ при п. в. $\tau\in[0,1]\}$. Замыкание $\overline{\mathcal{G}_\varepsilon(F')}$ (в $L^1([0,1],\mathcal{B})$) множества $\mathcal{G}_\varepsilon(F')$ разложимо (выпукло по переключению). Более того, многозначное отображение $\mathfrak{X}\ni F'\mapsto\overline{\mathcal{G}_\varepsilon(F')}$ полунепрерывно снизу. Поэтому в силу теоремы Фришковского [3] (приведенной также в [18], где можно найти все необходимые определения) существует непрерывное сечение $\mathfrak{X}\ni F'\mapsto f_{F'}\in\overline{\mathcal{G}_\varepsilon(F')}\subseteq L^1([0,1],\mathcal{B})$. Из теоремы 2 и условия $F\in M^{\rm comp}(\mathbb{R},{\rm Cl}_b\,\mathcal{B})$ следует, что для любого $\varepsilon'>0$ и любого конечного подмножества $\mathcal{Z}\subset\mathbb{Z}$ относительно плотно множество чисел $n\in\mathbb{Z}$, для которых

$$\max_{m\in\mathcal{Z}}\int_0^1 {\rm dist}\,(F_m(\tau),F_{m+n}(\tau))\,d\tau<\varepsilon'.$$

Последнее означает, что (двусторонняя) последовательность $F_n(\cdot)$, $n\in\mathbb{Z}$, рекуррентна. Тогда множество $\{f_{F_n}:n\in\mathbb{Z}\}$ предкомпактно в $L^1([0,1],\mathcal{B})$ и, более того, последовательность $f_{F_n}\in L^1([0,1],\mathcal{B})$, $n\in\mathbb{Z}$, также рекуррентна. Определим теперь функцию $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R},\mathcal{B})$: $f(t)=f_{F_n}\big(\frac{t-n\mathcal{T}}{\mathcal{T}}\big)$ при $t\in[n\mathcal{T},(n+1)\mathcal{T})$, $n\in\mathbb{Z}$. Функция f является $L^1_{\rm loc}$-рекуррентной, $f(t)\in F(t)$ и $\|f(t)\|\leqslant\rho(0,F(t))+\varepsilon$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$. Из теоремы 2 (и леммы 1) следует, что $f\in\mathcal{R}^{\rm comp}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Доказательство теоремы 5. Так как $F\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},{\rm Cl}_b\,U)$ и $g\in\mathcal{R}_\Gamma(\mathbb{R},U)$, то из леммы 42 и теоремы 14 вытекает существование множеств $T_j\in\mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, $j\in\mathbb{N}$, таких, что $\rho(g(t),F(t))<2^{-j+1}$ при всех $t\in T_j$ и $\rho(g(t),F(t))>2^{-j}$ при всех $t\in\mathbb{R}\setminus T_j$, для которых определены значения $g(t)$ и $F(t)$. При этом $T_j\supseteq T_{j+1}$, $j\in\mathbb{N}$. Для удобства обозначим $T_0=\mathbb{R}$. Положим $T=\bigcap_j T_j$. Тогда $t\in T$ в том и только в том случае, если $g(t)\in F(t)$. Пусть $\varepsilon_j=\min\{2^{-j+1},\,\eta(2^{-j})\}$. В соответствии с теоремой 15 для всех $j\in\mathbb{N}$ выберем функции $f_j\in\mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R},U)$ такие, что $f_j(t)\in F(t)$ и $\rho(f_j(t),g(t))<\rho(g(t),F(t))+\varepsilon_j$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$. Определим функции

$$f(\cdot)=\sum_{j=1}^{+\infty}f_j(\cdot)\,\chi_{T_{j-1}\setminus T_j}(\cdot)+g(\cdot)\,\chi_T(\cdot)\,,\quad \widetilde{f}_n(\cdot)=\sum_{j=1}^{n}f_j(\cdot)\,\chi_{T_{j-1}\setminus T_j}(\cdot)+g(\cdot)\,\chi_{T_n}(\cdot)\,,\quad n\in\mathbb{N}.$$

В силу лемм 25 и 28 $\widetilde{f}_n \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$, $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, при п. в. $t \in T_j$

$$\rho(f_j(t), g(t)) < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon_j < 2^{-j+1} + \varepsilon_j \leqslant 2^{-j+2}$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \rho(f(t), \widetilde{f}_n(t)) = \sup_{j\geqslant n+1} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in T_{j-1}\setminus T_j} \rho(f_j(t), g(t)) \leqslant 2^{-n+1} \to 0$$

при $n \to +\infty$. Поэтому из леммы 27 следует, что также $f \in \mathcal{R}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$. При этом $f(t) = g(t) \in F(t)$ при п. в. $t \in T$ и

$$\rho(f(t), g(t)) < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon_j \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(2^{-j}) < \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$$

при п. в. $t \in T_{j-1}\setminus T_j$, $j \in \mathbb{N}$. Откуда $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если $F \in \mathcal{R}^p_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то (см. теорему 11) $F \in \widetilde{\mathcal{M}}^p_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b U)$. Так как $f(t) \in F(t)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$, то отсюда следует, что $f \in \widetilde{\mathcal{M}}^p_{\Gamma}(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$. Снова используя теорему 11, получаем, что $f \in \mathcal{R}^p_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$. □

Теорема 6 доказывается аналогично теореме 5. Отметим только изменения, которые необходимо сделать в доказательстве. Определяемые при доказательстве теоремы 5 множества T_j (в силу леммы 43 и теоремы 14) можно выбрать из $\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}\{\mathbb{R}\}$, а функции f_j — из пространства $\mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$ (см. теорему 16). Тогда (в силу лемм 26 и 29) $\widetilde{f}_n \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$ и, следовательно (см. леммы 11 и 27), $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{comp}}_{\Gamma\{\mathcal{T}\}}(\mathbb{R}, U)$. Если $F \in \mathcal{R}^{p,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то из теоремы 12 следует, что $F \in \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b U)$. Но тогда $f \in \widetilde{M}^p(\mathbb{R}, U)$ и (в силу теоремы 12) $f \in \mathcal{R}^{p,\mathrm{comp}}_{\Gamma}(\mathbb{R}, U)$.

Также аналогично доказательству теоремы 5, используя леммы 1, 40, теорему 17 и результаты из § 2, доказывается следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $F \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b U)$ и $g \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, существует функция $f \in M^{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}, U)$ такая, что $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $F \in L^{p,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathrm{Cl}_b U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f \in L^{p,\mathrm{comp}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, U)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Michael E. Continuous selections. I // Ann. Math. — 1956. — Vol. 63. — № 2. — P. 361–381.
2. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журнал. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 172–175.
3. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. — 1983. — Vol. 76, № 2. — P. 163–174.
4. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1993. — Вып. 1. — С. 16–78.
5. Данилов Л. И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 34–41.
6. Рохлин В. А. О разложении динамической системы на транзитивные компоненты // Матем. сборник. — 1949. — Т. 25 (67), № 2. — С. 235–249.
7. Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C. A general theorem on selectors // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1965. — Vol. 13. — P. 397–403.
8. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 316, № 1. — P. 110–127.
9. Данилов Л. И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 1. — С. 97–120.

10. Данилов Л. И. Об одном классе почти периодических по Вейлю сечений многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 34–55.
11. Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. — 1997. — Т. 188, № 10. — С. 3–24.
12. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения носителей мерозначных функций // Сибирские электронные математические известия. — 2006. — Т. 3. — С. 384–392.
13. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control (ed. by J. Andres, L. Górniewicz and P. Nistri). Lecture Notes in Nonlin. Anal. — 1998. — Vol. 2. — P. 35–50.
14. Ирисов А. Е., Тонков Е. Л. Достаточные условия оптимальности рекуррентных по Биркгофу движений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2005. — Вып. 1. — С. 59–74.
15. Панасенко Е. А. О существовании рекуррентных и почти периодических решений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 42–57.
16. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 456 с.
17. Левитан Б. М. Почти периодические функции. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 396 с.
18. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: КомКнига, 2005. — 216 с.
19. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982. — 271 с.
20. Cheban D., Mammana C. Invariant manifolds, almost periodic and almost automorphic solutions of second-order monotone equations // International Journal of Evolution Equations. — 2005. — Vol. 1, № 4. — P. 319–343.
21. Cheban D. Levitan almost periodic and almost automorphic solutions of V-monotone differential equations // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2008. — Vol. 20, № 3. — P. 669–697.
22. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие. — М.: Наука, 1973. — 551 с.
23. Danilov L. I. On equi-Weyl almost periodic selections of multivalued maps. Preprint arXiv: math.CA/0310010, 2003.

Поступила в редакцию 22.04.11

L. I. Danilov

Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections

Some classes of recurrent and almost recurrent multivalued maps are considered. It is proved that such multivalued maps have recurrent and almost recurrent selections (from corresponding classes).

Keywords: recurrent function, selection, multimap.

Mathematical Subject Classifications: 42A75, 54C65

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН. 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132. E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru