УДК 512.566

© *Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина*

О ПРОСТЫХ ИДЕАЛАХ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЕДИНИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Изучаются свойства простых идеалов в полукольцах непрерывных функций на топологических пространствах со значениями в единичном отрезке $[0,1]$. Описаны максимальные идеалы полуколец непрерывных $[0,1]$-значных функций. В терминах полуколец функций получены характеризации ряда свойств компактов. Показано, что теория идеалов в рассматриваемых полукольцах отличается от случая колец непрерывных функций.

Ключевые слова: полукольцо, единичный отрезок, компакт, полукольцо непрерывных функций, простой идеал полукольца.

Статья является развитием классической теории колец непрерывных действительнозначных функций [1]. Полукольца непрерывных неотрицательных функций систематически изучаются, начиная с работы [2]. Теории полуколец посвящена, в частности, монография Голана [3]. Полукольца непрерывных функций со значениями в компактном числовом полукольце $[0,1]$ впервые исследовались в [2].

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложением $+$ и умножением $\cdot$, для которых $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1 и $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$, $0\cdot a=0=a\cdot 0$ для любых $a,b,c\in S$. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Полукольцо, в котором выполняется тождество $a+a=a$, называется (*аддитивно*) *идемпотентным*.

Через $C(X,S)$ обозначается полукольцо всех непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце S, с поточечно определенными операциями над функциями. Пусть $\mathbf{I}=[0,1]$ — единичный числовой отрезок, рассматриваемый как полукольцо со сложением max ($\vee$) и обычным умножением $\cdot$ в стандартной топологии. Тогда $C(X,\mathbf{I})$ будет идемпотентным коммутативным полукольцом.

Далее рассматриваются только **коммутативные полукольца**.

В полукольце S можно определить отношение делимости: для любых $a,b\in S$ элемент a делится на элемент b, если найдется элемент $c\in S$, для которого $a=bc$. В идемпотентном полукольце S естественным образом вводится отношение порядка: для любых $a,b\in S$ $a\leqslant b$ означает, что $b=a+c$ для некоторого $c\in S$.

Идемпотентное полукольцо S назовем *c-полукольцом*, если выполняются условия:

1) 1 – наибольший элемент в упорядоченном множестве $\langle S,\leqslant\rangle$;

2) для любого $a\in S$ существует единственный элемент $\sqrt{a}$, такой, что $(\sqrt{a})^2=a$;

3) для любых $a,b\in S$: если $a\leqslant b^2$, то a делится на b.

Если в c-полукольце элемент a делится на b, то $a\leqslant b$, обратное не обязано выполняться. Для нас основополагающим мотивом введения и исходным примером понятия c-полукольца послужили идемпотентные полукольца $C(X,\mathbf{I})$ (предложение 4). Другим примером c-полукольца являются ограниченные дистрибутивные решетки (основы теории решеток см. в [4]).

Идеалом (*фильтром*) полукольца S называется всякое его непустое подмножество J, такое, что для любых $a,b\in J$, $s\in S$ выполняется: $as\in J$, $a+b\in J$ ($a+s\in J$, $ab\in J$). Идеал (фильтр) J в S называется *простым*, если его дополнение до S непусто и мультипликативно (аддитивно) замкнуто. Как частный случай получаем фильтр в решетке подмножеств данного множества.

Идеал J полукольца S называется *полупростым*, если $a^2 \in J$ влечет $a \in J$ для любого $a \in S$. Очевидно, простые идеалы являются полупростыми.

Известно, что любой собственный идеал полукольца S содержится в некотором его максимальном идеале; максимальные идеалы в S простые; полупростые идеалы в S совпадают с пересечениями простых идеалов, их содержащих, каждый простой идеал в S содержит какой-то минимальный простой идеал.

Следующие леммы 1 и 3 очевидны, а лемма 2 вытекает из леммы 1:

Лемма 1. *Для подмножества J c-полукольца S эквивалентны следующие утверждения:* 1. *J — простой идеал.* 2. *$S \setminus J$ — простой фильтр.* 3. *J — идеал, $S \setminus J$ — фильтр.*

Лемма 2. *Для подмножества J c-полукольца S имеем:*
J — минимальный простой идеал (фильтр) $\Leftrightarrow$ $S \setminus J$ — максимальный фильтр (идеал).

Лемма 3. *Любой полупростой идеал c-полукольца S с каждым своим элементом содержит все элементы меньшие его.*

Заметим, что фильтры в c-полукольцах — это в точности непустые мультипликативно замкнутые множества, с каждым своим элементом a содержащие все элементы, большие a.

Для простых идеалов P (простых фильтров F) полукольца S определяются множества $O_P = \{s \in S : (\exists e \in S \setminus P) se = 0\}$ $(E_F = \{s \in S : (\exists e \in S \setminus F) s + e = 1\})$. Полукольцо S называется *редуцированным*, если в нем нет ненулевых нильпотентных элементов, то есть не существует такого ненулевого элемента $a \in S$, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$.

Лемма 4 (см. [5, с. 24]). *В любом полукольце S выполняются следующие свойства:*
1. *Для любого простого идеала P множество O_P — идеал, причем в редуцированном S идеал O_P полупростой.*
2. *Для простых идеалов $P \subseteq Q$ выполнено $O_Q \subseteq O_P \subseteq P$.*

Аналогично для фильтров имеет место:

Лемма 5. *В идемпотентном полукольце S с наибольшим элементом* 1 *для простых фильтров F, G выполняются свойства:* 1. *E_F — фильтр.* 2. *Если $F \subseteq G$, то $E_G \subseteq E_F \subseteq F$.*

Обозначим через $\mathrm{Spec}\, S$ множество всех простых идеалов полукольца S, $\mathrm{Max}\, S$ — множество всех его максимальных идеалов и $\mathrm{Min}\, S$ — множество всех его минимальных простых идеалов. Положим $D(A) = \{P \in \mathrm{Spec}\, S : A \nsubseteq P\}$ и $D(a) = \{P \in \mathrm{Spec}\, S : a \notin P\}$ для любых множества $A \subseteq S$ и элемента $a \in S$. Множества вида $D(A)$ образуют *топологию Стоуна–Зарисского* на множестве $\mathrm{Spec}\, S$. Получаем топологическое пространство $\mathrm{Spec}\, S$, называемое *простым спектром* полукольца S, причем множества $D(a)$, $a \in S$, образуют открытую базу в нем. В пространстве $\mathrm{Spec}\, S$ выделим подпространства: *максимальный спектр* $\mathrm{Max}\, S$ и *минимальный спектр* $\mathrm{Min}\, S$ полукольца S. Легко видеть, что $\mathrm{Spec}\, S$ — компактное T_0-пространство и $\mathrm{Max}\, S$ — компактное T_1-пространство.

Предложение 1 (см. [5, с. 64]). *Для любых простых идеалов P, Q полукольца S эквивалентны следующие условия:* 1. *В пространстве $\mathrm{Spec}\, S$ точки P и Q не отделимы.* 2. *$P \cap Q$ содержит простой идеал.* 3. *$O_P \subseteq Q$.*

Предложение 2 (см. [5, с. 78]). *Для любого простого идеала P редуцированного полукольца S выполняется следующее свойство: $P \in \mathrm{Min}\, S \Leftrightarrow O_P = P$.*

Предложение 3. *Пусть F — простой фильтр в c-полукольце S. Тогда $F = E_F \Leftrightarrow F$ — минимальный простой фильтр.*

Заметим, что для редуцированного полукольца S топологическое пространство $\operatorname{Min} S$ *нульмерное* (то есть его открыто-замкнутые множества образуют базу топологии) и хаусдорфово. Действительно, пусть даны $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Min} S$ и $a \in Q_1 \setminus Q_2$. Тогда $Q_2 \in D(a)$, $Q_1 \notin D(a)$ и в пространстве $\operatorname{Min} S$ открытое множество $D(a) \cap \operatorname{Min} S = \{P \in \operatorname{Min} S : a \notin P = O_P\} = \{P \in \operatorname{Min} S : \operatorname{Ann} a \subseteq P\}$ замкнуто.

Простые идеалы колец $C(X, \mathbf{R})$ и полуколец $C(X, \mathbf{R}^+)$ изучались в [1] и [2].

Для любого топологического пространства X существует *компакт* $Z = \beta\tau X$ (то есть компактное хаусдорфово пространство) такой, что полукольца $C(Z, \mathbf{I})$ и $C(X, \mathbf{I})$ канонически изоморфны. Здесь τX — тихоновизация пространства X, а $\beta(\tau X)$ — стоун-чеховская компактификация тихоновского пространства τX [1, с. 41, 82], [6]. Поэтому при изучении свойств полуколец $C(X, \mathbf{I})$ всюду далее будем считать топологическое пространство X **компактом**.

Под *окрестностью* подмножества пространства X понимается любое содержащее его открытое множество в X. Каждой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ соответствуют *нуль-множество* $\mathrm{Z}(f) = f^{-1}(0)$, его внутренность $\mathrm{Z}^0(f)$ и *конуль-множество* $\operatorname{coz} f = X \setminus Z(f)$. Заметим, что множества $\mathrm{Z}^0(f)$ образуют базу открытых множеств в X, а нуль-множества и замыкания $\overline{\operatorname{coz} f}$ конуль-множеств дают базы замкнутых множеств пространства X. В полукольце $C(X, \mathbf{I})$ все элементы, кроме 1, не обратимы, однако любой функции $f \in C(X, \mathbf{I})$ можно сопоставить функцию $1 - f \in C(X, \mathbf{I})$.

Каждой точке $x \in X$ отвечают следующие подмножества полукольца $C(X, \mathbf{I})$: фильтр $E_x = \{f \in C(X, I) : f = 1$ на некоторой окрестности точки $x\}$, полупростой идеал $O_x = 1 - E_x = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : x \in \mathrm{Z}^0(f)\}$, простые идеалы $M_x = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f(x) = 0\}$ и $N_x = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f(x) \neq 1\} = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f(x) < 1\} = C(X, \mathbf{I}) \setminus (1 - M_x)$.

Легко доказываются следующие две леммы.

Лемма 6. *Пусть X — тихоновское пространство и U — окрестность точки $x \in X$. Тогда существуют такие окрестности $V \subseteq W$ точки x и функция $f \in C(X, \mathbf{I})$, что $\overline{W} \subseteq U$ и $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$.*

Обозначим $f \wedge g = \min(f, g)$ для произвольных функций $f, g \in C(X, \mathbf{I})$.

Лемма 7. *Для любой точки x тихоновского пространства X выполняются следующие утверждения:* 1) *для любой функции $f \in O_x$ ($g \in E_x$) найдется такая функция $h \in E_x$ ($h \in O_x$), что $fh = 0$ ($g \vee h = 1$);* 2) *если $y \in X \setminus \{x\}$, то $O_x \vee O_y = C(X, \mathbf{I}) = E_x \wedge E_y$.*

В идемпотентном полукольце $C(X, \mathbf{I})$ отношение $f \leqslant g$ равносильно тому, что $f(x) \leqslant g(x)$ для любых $x \in X$. Как и в $C(X, \mathbf{R}^+)$, в $C(X, \mathbf{I})$ выполняется следующая

Лемма 8. *Для любых $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ если $f \leqslant g^2$, то f делится на g.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть $h = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \in Z(g); \\ \frac{f}{g}, & \text{если } x \in \operatorname{coz} g. \end{cases}$ На открытом множестве $\operatorname{coz} g$ функция h непрерывна. Пусть $x_0 \in Z(g)$. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$, тогда множество $U = \{x \in X : g(x) < \epsilon\}$ будет окрестностью точки x_0. Для любого $x \in U$ значение $h(x) = \frac{f}{g} \leqslant g < \epsilon$, а значит, и в любой точке из $Z(g)$ функция h непрерывна. Поэтому $h \in C(X, \mathbf{I})$ и $f = gh$ делится на g. □

Как следствие из леммы 8 получаем

Предложение 4. *Полукольца $C(X, \mathbf{I})$ являются c-полукольцами.*

Теорема 1. *Любой простой идеал P полукольца $C(X, \mathbf{I})$ обладает следующими свойствами:* 1) *$O_x \subseteq P$ для однозначно определенной точки $x \in X$;* 2) *$P \subseteq C(X, \mathbf{I}) \setminus E_x$ для некоторой единственной точки $x \in X$;* 3) *если $O_x \subseteq P$, то $P \subseteq M_x$ или $N_x \subseteq P$.*

Доказательство. 1) Пусть это не так. Тогда для любой точки $x \in X$ найдется такая $f \in O_x \setminus P$, что $f(x) = 0$ на некоторой окрестности U_x точки x. Для открытого покрытия U_x, $x \in X$, компакта X существует конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_k$, для которого $0 = f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \in S \setminus P$, противоречие. Значит, P содержит O_x для некоторой точки $x \in X$. Единственность этой точки вытекает из пункта 2) леммы 7.

2) Из пункта 1) и леммы 6 вытекает существование искомой точки x, а ее единственность следует из из пункта 2) леммы 7.

3) Возьмем простой идеал $P \supseteq O_x$. Предположим, что найдется функция $f \in P \setminus M_x$. Идеал P вместе с любой функцией f содержит всевозможные корни $\sqrt[n]{f}$, $n \in \mathbf{N}$. Значение функций $\sqrt[n]{f}$ в точке x стремится к 1 при $n \to \infty$. Возьмем произвольную функцию $g \in N_x$, $g(x) = a < 1$. Тогда на некоторой окрестности U точки x $g(x) < a + \frac{1-a}{2}$. Найдется такой корень $\sqrt[n]{f} \in P$, что $\sqrt[n]{f} > a + \frac{1-a}{2}$ в точке x, а значит, и на некоторой ее окрестности V. Возьмем функцию $h \in E_x \subseteq C(X, \mathbf{I}) \setminus P$, равную 1 на такой окрестности W точки x, что $\overline{W} \subseteq U \cap V$, и равную 0 на $X \setminus (U \cap V)$. Получили $gh \leqslant \sqrt[n]{f}h \in P$. По лемме 3 $gh \in P$, значит, $g \in P$. Поэтому $N_x \subseteq P$. □

Идеал J полукольца $C(X, \mathbf{I})$ называется *z-идеалом*, если для любых $f \in J$, $g \in C(X, \mathbf{I})$ равенство $Z(f) = Z(g)$ влечет $g \in J$. Из теоремы 1, предложения 4 и лемм 2 и 5 получаем:

Предложение 5. *Для любого простого идеала P полукольца $C(X, \mathbf{I})$ идеал O_P обладает следующими свойствами:* 1) *$O_x \subseteq O_P$ для однозначно определенной точки $x \in X$, такой что $O_x \subseteq P$;* 2) *O_P равен пересечению всех минимальных простых идеалов полукольца $C(X, \mathbf{I})$, его содержащих;* 3) *O_P — z-идеал.*

Лемма 9. *Если F — фильтр в полукольце $C(X, \mathbf{I})$, то $1 - F$ — идеал.*

Доказательство. Поскольку $0 \in 1-F$, то $1-F \neq \varnothing$. Заметим, что $f \leqslant g \Leftrightarrow 1-f \geqslant 1-g$ для любых $f, g \in C(X, \mathbf{I})$. Так как фильтр F с каждым своим элементом содержит все большие его элементы, то $1 - F$ с каждым своим элементом содержит все меньшие его элементы. Для $f \in 1 - F$ и $c \in C(X, \mathbf{I})$ получаем $f \geqslant fc \in 1 - F$. Пусть $g, h \in F$, тогда $gh \in F$ и $gh \leqslant g \wedge h \in F$. Получаем $(1 - g) \vee (1 - h) = 1 - (g \wedge h) \in 1 - F$. □

Лемма 10. *Если P — простой идеал в полукольце $C(X, \mathbf{I})$, то $1 - P$ с каждым своим элементом содержит все элементы, большие его, и множество $C(X, \mathbf{I}) \setminus (1 - P)$ замкнуто относительно $\vee$.*

Доказательство. Поскольку $1 \in 1 - P$, то $1 - P \neq \varnothing$. Так как по лемме 3 простой идеал P с каждым своим элементом содержит элементы, меньшие его, то $1 - P$ с каждым своим элементом содержит элементы, большие его. Если $f, g \in C(X, \mathbf{I}) \setminus P$, то $(1 - f) \vee (1 - g) = 1 - (f \wedge g) \in 1 - (C(X, \mathbf{I}) \setminus P) = C(X, \mathbf{I}) \setminus (1 - P)$. □

Лемма 11. *Если P — простой идеал в полукольце $C(X, \mathbf{I})$ и $P \subseteq M_x$, то $1 - P$ — простой фильтр.*

Доказательство. В силу леммы 10 достаточно показать замкнутость множества $1 - P$ относительно умножения. Имеем $(1 - f) \cdot (1 - g) = 1 - (f + g - fg)$ для любых $f, g \in P$. Но $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \geqslant \frac{1}{2}(f + g - fg)$. Так как $f \vee g \in P$ и $\frac{1}{2} \notin P$, то $f + g - fg \in P$ и $(1 - f) \cdot (1 - g) \in 1 - P$. □

Далее заметим, что для любых функций $f, e \in C(X, \mathbf{I})$ $fe = 0 \Leftrightarrow f \wedge e = 0 \Leftrightarrow 1 - (f \wedge e) = 1 \Leftrightarrow (1 - f) \vee (1 - e) = 1$, $e \in M \Leftrightarrow 1 - e \in 1 - M$.

Предложение 6. *Подмножество P полукольца $C(X, \mathbf{I})$ является его минимальным простым идеалом тогда и только тогда, когда $1 - P$ есть минимальный простой фильтр.*

Доказательство. Пусть P — минимальный простой идеал. Имеем $O_x \subseteq O_P = P \subseteq M_x$ в силу предложения 2. В силу леммы 11 нужно доказать минимальность простого фильтра $1-P$. Поскольку $1 - O_P = \{1 - f \in C(X,\mathbf{I}) : (\exists e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus P) fe = 0\} = \{1 - f \in C(X,\mathbf{I}) : (\exists (1-e) \in C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-P))(1-f) \vee (1-e) = 1\} = E_{1-P}$, то $1-P = E_{1-P}$ и $1-P$ — минимальный простой фильтр полукольца $C(X,\mathbf{I})$.

Обратно, пусть F — минимальный простой фильтр в $C(X,\mathbf{I})$. По лемме 9 $1-F$ — идеал. Пусть $f, g \notin 1-F$ и $fg \in 1-F$. Тогда $1 - fg \in F = E_F$ и найдется такой $e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus F$, что $(1-fg) \vee e = 1$. Имеем: $(1-fg) \vee e = 1 \Leftrightarrow (1 - f \wedge g) \vee e = 1 \Leftrightarrow ((1-f) \vee (1-g)) \vee e = 1$. Поэтому $(1-f) \vee (1-g) \in F$, что противоречит простоте фильтра F. Значит, $1-F$ — простой идеал. Имеем $1 - F = 1 - E_F = \{1 - f \in C(X,\mathbf{I}) : (\exists e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus F) f \vee e = 1\} = = \{1 - f \in C(X,\mathbf{I}) : (\exists (1-e) \in C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-F))(1-f) \cdot (1-e) = 0\} = 0_{1-F}$. Следовательно, $1-F$ — минимальный простой идеал по предложению 3. □

В силу леммы 2, предложений 2 и 6 получаем:

Теорема 2. *Для любого компакта X максимальные идеалы полукольца $C(X,\mathbf{I})$ — это в точности идеалы вида $C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-P)$ по всем простым идеалам P полукольца $C(X,\mathbf{I})$, совпадающим с O_P.* □

Следствие 1. *Для подмножества F в $C(X,\mathbf{I})$ имеем:*
F — максимальный фильтр $\Leftrightarrow$ $1-F$ — максимальный идеал.

Для произвольной точки $x \in X$ зададим конгруэнцию ρ_x на полукольце $C(X,\mathbf{I})$, положив для любых $f, g \in C(X,\mathbf{I})$ $f \rho_x g \Leftrightarrow f = g$ на некоторой окрестности точки x. В факторполукольце $C(X,\mathbf{I})/\rho_x$ введем отношение $\preceq$: $[f]_{\rho_x} \preceq [g]_{\rho_x} \Leftrightarrow f \leqslant g$ на некоторой окрестности точки x, очевидно, являющееся отношением порядка.

Лемма 12. *Пусть P — простой идеал, содержащий O_x. Если $f \in P$ и $[g] \preceq [f]$, то $g \in P$. В частности, если $f \in P$ и $[f] = [g]$, то $g \in P$.*

Доказательство. Пусть P — простой идеал, содержащий O_x, функции $f \in P$, $g \in C(X,\mathbf{I})$. Если $[g] \preceq [f]$, то $g \leqslant f$ на некоторой окрестности U точки x. Возьмем функцию $e \in E_x$ из леммы 6, равную 0 на окрестности множества $X \setminus U$ и 1 на окрестности точки x. Тогда $ge \leqslant fe \in P$, откуда по лемме 3 $ge \in P$. По теореме 1 $e \notin P$, значит, $g \in P$. □

Таким образом, принадлежность функции f к простому идеалу P, содержащему O_x, определяется ее значениями на некоторой окрестности точки x. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi : C(X,\mathbf{I}) \to C(X,\mathbf{I})/\rho_x$, для которого $\pi(f) = [f]$, $f \in C(X,\mathbf{I})$. Тогда $\pi(O_x) = [0]_{\rho_x}$.

Следствие 2. *Канонический эпиморфизм $\pi : C(X,\mathbf{I}) \to C(X,\mathbf{I})/\rho_x$ задает взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами P в $C(X,\mathbf{I})$, содержащими O_x, и простыми идеалами $\pi(P)$ факторполукольца $C(X,\mathbf{I})/\rho_x$.*

Точка $x \in X$ называется: F-*точкой*, если для любых функций $f, g \in C(X,\mathbf{I})$ из $x \in \mathrm{Z}^0(fg)$ следует $x \in \mathrm{Z}^0(f) \cup \mathrm{Z}^0(g)$; P-*точкой*, если $x \in Z(f)$ влечет $x \in Z^0(f)$ для любой $f \in C(X,\mathbf{I})$.

Предложение 7. *Для любой точки x компакта X эквивалентны следующие утверждения:* 1) *x есть F-точка;* 2) *идеал O_x простой;* 3) *множество $C(X,\mathbf{I}) \setminus E_x$ является идеалом (или, что равносильно, максимальным идеалом);* 4) *$C(X,\mathbf{I})/\rho_x$ — линейно упорядоченное полукольцо относительно порядка $\preceq$;* 5) *в $C(X,\mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие O_x (или, что равносильно, содержащие M_x), образуют цепь.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) вытекает из определений F-точки и идеала O_x. Поскольку $C \setminus (1 - O_x) = C \setminus E_x$, то по теоремам 2 и 1 получаем, что 2) $\Leftrightarrow$ 3).

1) $\Rightarrow$ 4). Пусть $x \in X$ — F-точка. Покажем, что порядок $\preceq$ на S линейный. Возьмем $[f], [g] \in S$, $f, g \in C(X,\mathbf{I})$. Рассмотрим в $C(X,\mathbf{I})$ функции $h_1 = (f-g) \vee 0$ и $h_2 = (g-f) \vee 0$. Имеем

$Z(h_1h_2) = X$. Поскольку x — F-точка, то $x \in Z^0(h_1) \cup Z^0(h_2)$. Если $x \in Z^0(h_1)$, то $f \leqslant g$ на окрестности $Z^0(h_1)$ точки x, если же $x \in Z^0(h_2)$, то $g \leqslant f$ на окрестности $Z^0(h_2)$ точки x. Значит, $[f] \preceq [g]$ или $[g] \preceq [f]$.

4) $\Rightarrow$ 5). Пусть для $C(X, \mathbf{I})/\rho_x$ выполняется утверждение 4). Возьмем произвольные простые идеалы P и Q в полукольце $C(X, \mathbf{I})$, содержащие O_x. Если $P \nsubseteq Q$, то найдется $p \in P \setminus Q$. Для любой функции $g \in Q$ по лемме 12 имеем $[p] \neq [g]$. Так как полукольцо $C(X, \mathbf{I})/\rho_x$ — линейно упорядоченное, то элементы $[p]$, $[g]$ сравнимы. По лемме 12 $[p] \nleqslant [g]$. Значит, $[g] \leqslant [p]$ и $g \in P$. Получаем, что $Q \subseteq P$, то есть в $C(X, \mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие O_x, образуют цепь.

5) $\Rightarrow$ 2). Из 5) следует единственность максимального идеала, содержащего O_x. По теореме 2 единственным будет и минимальный простой идеал, содержащий O_x. Этим минимальным простым идеалом служит O_x. $\square$

Каждому простому идеалу P полукольца $C(X, \mathbf{I})$ соответствует единственная точка $x_P \in X$, для которой $O_{x_P} \subseteq P$. Рассмотрим отображение $\phi : \operatorname{Spec} C(X, \mathbf{I}) \to X$, $\phi(P) = x_P$ для любого простого идеала P полукольца $C(X, \mathbf{I})$.

Предложение 8. *Отображение* $\phi : \operatorname{Spec} C(X, \mathbf{I}) \to X$ *непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что отображение ϕ непрерывно в произвольной точке $Q \in \operatorname{Spec} C(X, \mathbf{I})$. Для этого возьмем окрестность U точки $x_Q = \phi(Q)$ в пространстве X. В силу тихоновости компакта X и леммы 6 существует такая функция $f \in E_{x_Q}$, что $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$ для некоторых окрестностей $V \subseteq W$ точки x_Q, $\overline{W} \subseteq U$. Рассмотрим открытое множество $D(f)$ простого спектра $\operatorname{Spec} C(X, \mathbf{I})$. По теореме 1, пункт 2) $f \notin Q$, то есть $Q \in D(f)$. Покажем, что $\phi(D(f)) \subseteq U$. Пусть это не так, тогда найдется точка $y \in \phi(D(f)) \setminus U$. Это значит, что $O_y \subseteq P \in D(f)$ для некоторого P. Поскольку $f = 0$ в некоторой окрестности множества $X \setminus U$, то $f \in O_y$, противоречие. Значит, $\phi(D(f)) \subseteq U$. Таким образом, ϕ непрерывна в любой точке простого спектра, то есть непрерывна. $\square$

Топологическое пространство X называется F-*пространством*, если все его точки являются F-точками.

Теорема 3. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения:* 1) X — F-*пространство;* 2) *все идеалы* O_x, $x \in X$, *простые;* 3) *максимальные идеалы полукольца* $C(X, \mathbf{I})$ *имеют вид* $C(X, \mathbf{I}) \setminus E_x$ *по всем* $x \in X$; 4) *пространство* $\operatorname{Max} C(X, \mathbf{I})$ *хаусдорфово;* 5) *отображение* ϕ *осуществляет гомеоморфизм пространств* $\operatorname{Max} C(X, \mathbf{I})$ *и* X; 6) *каждый простой идеал полукольца* $C(X, \mathbf{I})$ *содержится в единственном максимальном идеале;* 7) *каждый простой идеал полукольца* $C(X, \mathbf{I})$ *содержит единственный минимальный простой идеал;* 8) *все простые идеалы полукольца* $C(X, \mathbf{I})$, *содержащие данный простой идеал, образуют цепь.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 7 получаем эквивалентность условий 1), 2), 3). Из теоремы 2 получаем эквивалентность условий 6), 7), 8). Очевидно, что 4) $\Leftrightarrow$ 5), 3) $\Rightarrow$ 4), 5) $\Rightarrow$ 6). Импликация 7) $\Rightarrow$ 2) носит общий характер [5, с. 79]. $\square$

Замечание 1. Кольцевые характеризации свойств топологических пространств рассматривались в [1] и [7], а полукольцевые — в [2]. Теорема 3 показывает существенное отличие теории идеалов в полукольцах $C(X, \mathbf{I})$ от классического случая колец $C(X, \mathbf{R})$. В кольцах $C(X, \mathbf{R})$ и полукольцах $C(X, \mathbf{R}^+)$ простые идеалы, содержащие данный простой идеал, всегда образуют цепь [1, 2]. Также в терминах полукольца $C(X, \mathbf{I})$ можно сформулировать характеризации следующих свойств компактов X : быть P-пространством, базисная несвязность, экстремальная несвязность, конечность.

Пример 1. В индуцированной топологии числовое множество $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$ является нульмерным компактом, в котором все точки $x \neq 0$ изолированные, то есть являются P-точками. Для $x \neq 0$ имеем $O_x = M_x$ — минимальный простой идеал полукольца $C(X, \mathbf{I})$, а N_x — максимальный идеал, единственный среди простых идеалов, строго содержащих O_x. Точка 0 не является F-точкой, значит, не будет и P-точкой. Обозначим через L булеву решетку всех подмножеств (нуль-множеств) в X, содержащих точку 0. Фильтры $\mathcal{F}$, не содержащие конечных множеств, называются *свободными*. В полукольце $C(X, \mathbf{I})$ минимальные простые идеалы $P \supseteq O_0 = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : \operatorname{coz} f$ — конечное множество изолированных точек из $X\}$ совпадают с z-идеалами $Z^{-1}[\mathcal{F}] = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$ по всем свободным максимальным фильтрам $\mathcal{F}$ булевой решетки L. Заметим также, что любой содержащий O_0 простой z-идеал в $C(X, \mathbf{I})$ либо является минимальным, либо содержит M_0. Существуют простые идеалы $P \subseteq M_0$, не являющиеся z-идеалами. Максимальные идеалы M полукольца $C(X, \mathbf{I})$, содержащие O_0, имеют вид $M = \{f \in C(X, \mathbf{I}) : f \not\equiv 1$ ни на каком множестве $A \in \mathcal{F}\}$, где $\mathcal{F}$ — произвольный свободный максимальный фильтр булевой решетки L. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. — Van Nostrand, Princeton, 1976. — 300 p.
2. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 493–510.
3. Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Kluwer Academic Publishers. Dordrecht–Boston–London, 1999. — 380 p.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982. — 456 с.
5. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец: монография. — Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. — 224 с.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. — 752 с.
7. Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы: учеб. пособие для спецкурса. – М.: МПГУ, 1992. – 121 с.

Поступила в редакцию 20.05.11

E. M. Vechtomov, E. N. Lubiagina
About prime ideals in semirings of continuous function with values in unit segment

The properties of the prime ideals in semirings of the continuous functions on topological spaces with values in $[0, 1]$ are researches. Maximal ideals of the semirings of continuous $[0, 1]$-valued functions are described. The characterizations of the compacts are received in terms of semiring of the functions. It is shown that the theory of ideals in considered semirings differs from the case of rings of continuous functions.

Keywords: semiring, $[0, 1]$-interval, compact, semiring of the continuous functions, prime ideal of the semiring.

Mathematical Subject Classifications: 16Y60, 12K10

Вечтомов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра алгебры и дискретной математики, Вятский государственный гуманитарный университет. 610002, Россия, г. Киров, ул. Красноармейская, 26.
E-mail: vecht@mail.ru
Лубягина Елена Николаевна, аспирант кафедры алгебры и дискретной математики, Вятский государственный гуманитарный университет. 610002, Россия, г. Киров, ул. Красноармейская, 26.
E-mail: mathematic@vshu.kirov.ru